

Simulation de champs aléatoires invariants par rotation et homothétie

Ioana Donescu*, Christian Roux**, Alain Hillion**, Olivier Avaro*

* CNET/France Télécom, 38-40 rue du Général Leclerc, 92794 Issy Moulineaux Cedex 9, France

**ENST Bretagne, Dép. ITI BP 832, 29285 Brest CEDEX, France

e-mail : donescu@issy.cnet.fr

RÉSUMÉ

La notion de texture aléatoire est associée à la notion de stationnarité, donc d'invariance par translation. Or tous les modèles de texture connus ne sont pas stationnaires. Dans cet article, la notion plus générale d'invariance au second ordre pour un ensemble de transformations planes est étudiée. On s'intéresse en particulier à l'invariance par homothétie et par rotation d'un centre fixé. Pour la simulation de champs possédant cette invariance on propose la méthode du krigage. On étudie théoriquement l'erreur de corrélation induite par la méthode de simulation.

ABSTRACT

The concept of random texture is generally related to the stationarity, e.g. translation invariance. However, all known texture models are not second-order stationary. Therefore we propose to study a larger class of random fields, second-order invariant for a set of transformations in the plane. The examples focus on scale and rotation invariant fields. We use kriging for the simulation of random fields that have this invariance property, and we study the correlation error for the synthesized fields.

1 Introduction

La notion de texture est associée en général à la notion de stationnarité, et plus précisément à l'invariance par translation d'une caractéristique statistique (moments, loi de probabilité). Cependant toutes les textures aléatoires ne rentrent pas dans cette définition, en particulier le mouvement Brownien fractionnaire (fBm) [3], qui est généralisable à 2 dimensions, comme champ aléatoire non stationnaire, mais à accroissements stationnaires. Le fBm a cependant trouvé de nombreuses applications pour la synthèse et l'analyse de textures réelles, ce qui justifie l'étude des processus non stationnaires pour le modélisation de textures. Cependant, étant donné que la phase d'analyse s'appuie toujours sur une estimation, il faut définir et contrôler certaines propriétés d'invariance. Dans cet article, on se propose de reformuler la notion d'invariance au second ordre pour un groupe de transformations planes, et de décrire ensuite une méthode de simulation de tels champs. Pour l'exemple, on se restreint au groupe des homothéties-rotations, car c'est l'invariance sous-jacente au fBm 2-D. Enfin, on étudiera brièvement l'erreur de corrélation pour les champs simulés.

2 Définition de l'invariance

L'image est modélisée ici par un champ aléatoire réel continu $\{X(s), s \in \mathbb{R}^2\}$. Pour les applications pratiques, il faut discrétiser, de façon à retrouver $\{X_d(l), l \in \mathbb{Z}^2\}$. Dans le cas le plus général, on note T la transformation plane, et on note $\mathcal{T} = \{T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\}$. On note X_T l'image transformée par T du champ X . Pour une caractéristique \mathcal{C} donnée (moments, loi de probabilité), on dit que l'image est \mathcal{C} -invariante pour

l'ensemble des transformations \mathcal{T} si :

$$\forall T \in \mathcal{T}, \mathcal{C}(X_T) = \mathcal{C}(X) \quad (1)$$

On se limite ici à l'invariance du second ordre : $\mathcal{C}(X) = \{E[X(s)], E[X^2(s)], cov(X(s), X(t))\}$, qui donne lieu à la stationnarité au sens large dans la théorie classique.

On définit l'invariance au second ordre pour l'ensemble des transformations \mathcal{T} :

$$\forall s \in \mathbb{R}^2, E[X(s)] = \text{cste} \quad (2)$$

On peut supposer sans perte de généralité la moyenne nulle.

$$\forall s, E[X^2(s)] = \sigma^2 < \infty \quad (3)$$

$$\forall s, t, \forall T \in \mathcal{T}, E[X(s)X(t)] = E[X(T(s))X(T(t))] \quad (4)$$

Un des points principaux de la stationnarité au sens large classique est l'existence d'une fonction de corrélation, qui ne dépend que du vecteur de translation entre les 2 points. On peut montrer que la formulation 4 équivaut à la formulation :

$$\forall s, \forall T \in \mathcal{T}, E[X(s)X(T(s))] \text{ dépend uniquement de } T \quad (5)$$

si les 2 conditions suivantes sont remplies :

1. \mathcal{T} forme un groupe commutatif
2. $\forall (s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \exists ! T_0$ t.q. $t_0 = T_0(s_0)$

Les 2 conditions sont remplies pour le groupe des translations, pour lequel on définit la fonction de corrélation par 5. On peut envisager divers groupes de transformations, et notamment des sous-groupes du groupe affine (transformations affines et inversibles), qui ont des interprétations géométriques simples. Ces transformations présentent le grand avantage d'être paramétrées et définies de façon équivalente par l'ensemble des paramètres. En particulier on pourra définir la fonction de corrélation à partir des paramètres qui caractérisent la transformation du groupe considéré qui lient les 2 points mis en relation.

Exemple étudié : Dans la pratique, en plus du groupe des translations utilisé comme référence, on s'intéressera dans cet article au groupe des homothéties-rotations, i.e. défini par les transformations linéaires paramétrées par r, θ :

$$s_2 = r A_{r,\theta}(s_1), \quad r = \frac{\|s_2\|}{\|s_1\|}, \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. L'ensemble des transformations ainsi définies forme un groupe commutatif, noté \mathcal{HR} . Ces transformations dépendent d'un point centre, qui est fixé à l'origine du repère O sans perte de généralité. Les champs \mathcal{HR} -invariants au second ordre seront invariants pour les rotations de centre O et pour les homothéties de centre O .

Le repère adapté pour \mathcal{HR} est le repère des coordonnées polaires $s = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. La caractéristique d'invariance de second ordre s'écrit dans ce cas particulier :

$$E[X(r_1, \theta_1)X(r_2, \theta_2)] = R(|\ln(r_2/r_1)|, |\theta_2 - \theta_1|) \quad (7)$$

On note $p_1 = |\ln(r_2/r_1)|$ et $p_2 = |\theta_2 - \theta_1|$ les paramètres dont dépend la fonction de corrélation. Ces paramètres sont choisis pour avoir :

$$E[X(r_1, \theta_1)X(r_2, \theta_2)] = E[X(r_2, \theta_2)X(r_1, \theta_1)] \quad (8)$$

On peut définir un processus 2-D, noté Z , auto-similaire avec paramètre d'autosimilarité H ($H \in]0, 1[$) à partir d'un processus \mathcal{HR} -invariant au second ordre X , par $Z(r, \theta) = r^H X(r, \theta)$. En effet, si Z est un mouvement brownien fractionnaire alors on a :

$$E[Z(s)Z(t)] = \frac{\sigma^2}{2} [\|s\|^{2H} + \|t\|^{2H} - \|s-t\|^{2H}] \quad (9)$$

$$E[X(r, \theta)X(kr, \theta + d\theta)] = \frac{\sigma^2}{2} [k^H + k^{-H} - (k + k^{-1} - 2 \cos(d\theta))^H] \quad (10)$$

L'invariance par homothétie-rotation de cette fonction de corrélation est évidente.

3 Simulation par krigeage

La première question est la simulation de champs possédant des caractéristiques d'invariance au second ordre données, et non stationnaires au sens classique.

Une méthode de synthèse possible est la méthode basée sur la décomposition de Cholesky [5, 2] de la matrice de corrélation. Cette méthode permet de simuler des champs qui présentent exactement les caractéristiques du second ordre voulues. Cependant, son coût calculatoire est trop élevé en 2 dimensions, et donc cette méthode n'est pas retenue.

La méthode proposée et utilisée pour la synthèse de ces champs aléatoires est le **krigeage** [4, 1], qui consiste à faire une interpolation en prenant en compte les caractéristiques du second ordre du processus.

3.1 Principe de la méthode

La méthode du krigeage est définie a priori pour les champs à accroissements stationnaires par translation, mais on peut

facilement la généraliser à des accroissements invariants pour tout autre groupe de transformations.

On définit le variogramme "généralisé" γ par :

$$2\gamma(s, T(s)) = 2\gamma(T) = \text{var}(X(T(s)) - X(s)) \quad (11)$$

Supposons qu'on connaisse les réalisations (valeur en niveau de gris) du champ en un ensemble de points d'appui t_1, \dots, t_n . On cherche une estimation de X au point t_0 , basée sur ses caractéristiques du second ordre. On écrit :

$$X^*(t_0) = \sum_{k=1}^n \lambda_k X(t_k) \quad (12)$$

L'estimateur est calculé sous les contraintes : $E[X^*(t_0) - X(t_0)] = 0$, $E[X^*(t_0) - X(t_0)]^2$ minimal : estimateur sans biais à variance minimale. On trouve alors les coefficients λ_k comme solutions du système d'ordre $n + 1$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \lambda_k \gamma(t_j, t_k) + \mu = \gamma(t_j, t_0) & \forall j \in [1, n] \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \end{cases} \quad (13)$$

La variance de l'erreur d'estimation en un point est :

$$E[|X^*(t_0) - X(t_0)|^2] = \sigma_e^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(t_i, t_0) + \mu \quad (14)$$

3.2 Algorithme itératif

Le résultat dépend fortement du placement des points d'appui et de leur nombre. On choisit une mise en oeuvre itérative, qui utilise à chaque étape les points estimés à l'étape précédente comme points d'appui. Les points d'appui initiaux sont placés aux coins de la grille sur laquelle on simule le champ (voir 1). Ils forment un carré de côté D . On estime les points situés à distance $D/2$ des points d'appui. On prend ensuite comme points d'appui les carrés de côté $D = D/2$ et ainsi de suite. La distance entre points estimés et points d'appui est divisée par 2 à chaque itération. Par contre, la taille du système à inverser reste constante et égale à 5. Cette méthode est simple et efficace. On simule les champs sur une grille $M \times M$, avec $M = 2^p$.

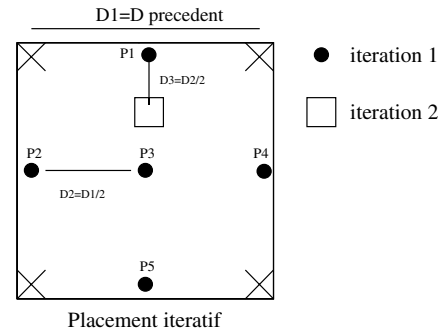


FIG. 1 — Ensembles de points d'appui successifs.

Certains points intérieurs pourraient être estimés à partir de plusieurs ensembles de points d'appui, et il n'y a pas de critère de décision a priori. On peut simplement donner l'avantage à la première estimation, la conséquence étant que

le résultat dépendra de l'ordre de balayage. Cette méthode de simulation est adaptée à l'invariance par translation, et on peut se demander si elle est bien adaptée à tout type d'invariance. On pourrait effectivement envisager des évolutions des points de support à chaque itération en fonction de \mathcal{T} . Néanmoins, cette mise en oeuvre étant simple et systématique, on la conserve ici.

3.3 Exemples de champs simulés

La mise en oeuvre de l'algorithme du krigeage pour la simulation nécessite la définition de variogrammes - et de fonctions de corrélation associées valides pour les groupes de transformations considérés. On peut déduire des fonctions de corrélation valides à partir de fonctions de corrélation connues pour le cas des translations. On note (p_1, p_2) les paramètres caractérisant chaque groupe de transformations.

Par exemple, on utilise ici :

$$R_1(p_1, p_2) = \sigma^2 \rho^{(p_1+p_2)}, \quad \gamma_1 = \sigma^2 - R(p_1, p_2) \quad (15)$$

R_1 correspond au processus de type AR1 séparable, à coefficient de corrélation constant dans les 2 directions.

$$R_2(p_1, p_2) = \frac{\sigma^2}{2} (e^{p_1 H} + e^{-p_1 H} - (e_1^p + e^{-p_1} - 2 \cos(p_2))^H) \quad (16)$$

R_2 correspond au champ X qui permet de générer les fBm dans le cas de l'homothétie-rotation (voir eq.10).

On peut vérifier que ces 2 fonctions sont définies positives pour les paramètres proposés pour les paramètres qui définissent le groupe des translations et le groupe des homothéties-rotations.

On montre des exemples de simulation dans la 2 (modèle R_1) et la 3 (modèle R_2). Les 2 figures montrent un champ simulé avec les paramètres de translation (à gauche) et à côté un champ simulé avec les paramètres d'homothétie-rotation $(\ln(r), \theta)$. L'origine est placé arbitrairement au coin supérieur gauche de l'image.

D'autres variogrammes bien plus complexes peuvent être utilisés pour la simulation.

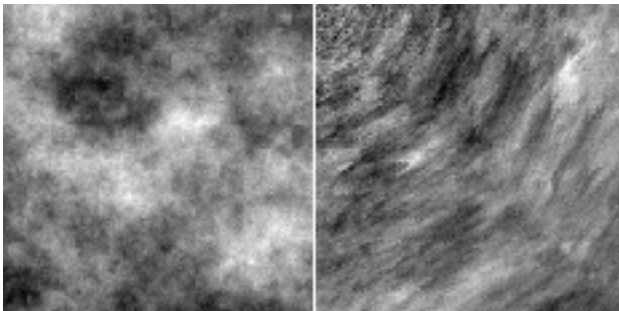


FIG. 2 — Champs simulés par krigeage avec la fonction de corrélation R_1 : a) invariance par translation, $\rho = 0.9$, b) invariance par homothétie-rotation, $\rho = 0.7$.

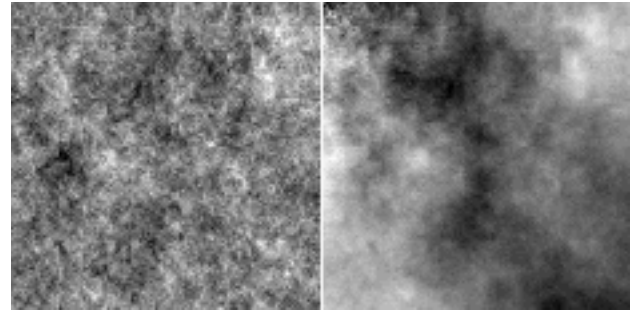


FIG. 3 — Champs simulés par krigeage ($H=0,6$) avec la fonction de corrélation R_2 : a) invariance par translation, b) invariance par homothétie-rotation.

4 Erreur de corrélation

A cause de l'erreur d'interpolation, il existe une erreur entre la fonction de corrélation désirée et la fonction de corrélation réelle du champ simulé. Cette erreur est néanmoins calculable théoriquement pour chaque couple de points considéré.

4.1 Evaluation théorique

On peut calculer l'erreur sur la variance :

$$E[X^{*2}(t_0)] - E[X^2(t_0)] = 2\mu - \sigma_e^2 \quad (17)$$

On peut ajouter en chaque point un bruit additif $g \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e)$. L'erreur ci-dessus 17 devient alors égale à 2μ , ce qui signifie une diminution comme on le verra plus loin.

La corrélation entre un point estimé et un point d'appui est donnée par :

$$E[X^*(t_0)X(t_i)] - E[X(t_0)X(t_i)] = \mu \quad (18)$$

Etant donné l'algorithme de mise en oeuvre, il faut également tenir compte de la propagation de l'erreur à chaque itération.

En effet, à chaque nouvelle itération on prend comme points d'appui les points estimés aux itérations précédentes, donc l'expression formelle devient rapidement complexe. Si on note t_{ik} un point estimé à l'itération i on a :

$$E[X^*(t_{ik})X^*(t_{il})] = \sum \lambda_m^{ik} \lambda_n^{ik} E[X^*(t_{(i-1)m})X^*(t_{(i-1)n})] \quad (19)$$

On peut donc estimer l'erreur de corrélation pour chaque couple de points connu à une itération donnée.

On peut donner une borne supérieure de la variance en chaque site. On note D_i la distance entre points d'appui à l'itération i . On a :

$$E[X^{*2}(t_{ik})] - E[X^2(t_{ik})] \leq 2 \sum_{j=0}^i \mu_{\max}(j, D_j) \quad (20)$$

La variance théorique en chaque point dépend du point, donc le champ simulé réellement par cette méthode n'est pas invariant au second ordre. Néanmoins, comme on le verra par la suite, les erreurs sont faibles et contrôlables.

4.2 Evaluation pour les cas étudiés

L'erreur de corrélation dépend d'une part de la distance entre points d'appui, et d'autre part de l'indice d'itération. Les points estimés dans un support donné sont notés de $P1$ à $P5$ (cf. 1). Si on prend la fonction de corrélation symétrique R_1 ($\rho = 0.9, \sigma^2 = 1$) avec l'invariance par translation, on a seulement 2 types de points à estimer : point central ($P3$) et points sur le côté du carré (cf. 1). On calcule la variance de l'erreur d'estimation (voir eq.14) ainsi que le coefficient μ en fonction de $D = 2^p$ pour un tel processus. Les résultats sont donnés dans 4 et 5. Sans surprise, ces 2 paramètres augmentent avec la distance entre les points d'appui, et ceci pour les 2 types de points. Pour l'invariance par homothétie-rotation, on applique le même test avec la même fonction de corrélation. On place le centre du repère au coin supérieur gauche, ce qui fait qu'on a un axe de symétrie ($y=x$) et donc 3 types de points par rapport à cet axe ($P1 \equiv P2, P3, P4 \equiv P5$). On montre dans la 6 et 7 l'évolution des paramètres μ et σ_e pour ce type d'invariance. On constate également une croissance en fonction de la taille du carré de points d'appui. Il est intéressant de constater que l'amplitude des paramètres est plus faible pour le cas de l'homothétie-rotation, donc les erreurs sur la corrélation sont moins importantes. Tous les supports de points d'appui ne sont pas équivalents dans le cas \mathcal{HR} , comme dans le cas du groupe des translations. Les résultats présentés donnent les erreurs maximales, issues du carré de support centré pour ce test.

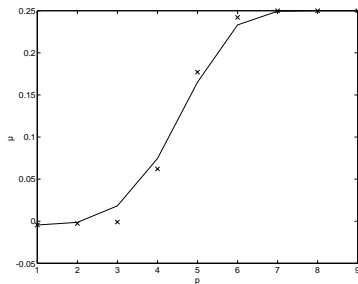


FIG. 4 — Valeur de μ (trait continu -P1, x - P3) en fonction de la distance entre points d'appui $D = 2^p$.

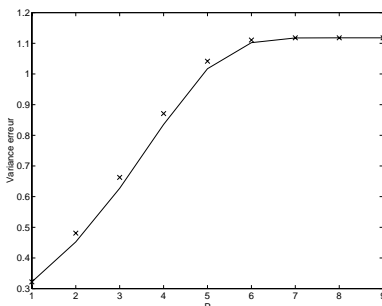


FIG. 5 — Valeur de σ_e^2 (trait continu -P1, x-P3) en fonction de la distance entre points d'appui $D = 2^p$.

5 Conclusion

On propose dans cet article d'utiliser le krigeage "généralisé" comme méthode simple et générale qui permet de simu-

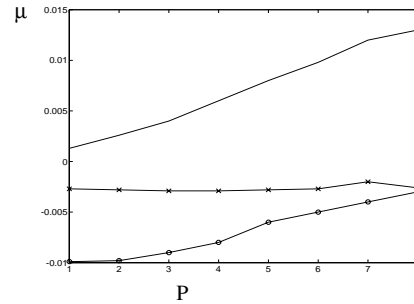


FIG. 6 — Valeur de μ dans le cas de l'homothétie-rotation (trait continu -P1, o -P3, x-P5) en fonction de $D = 2^p$.

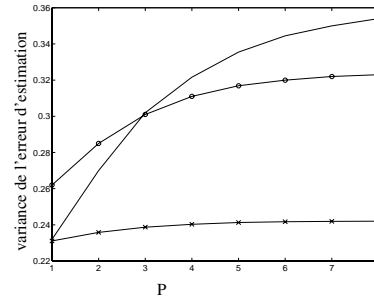


FIG. 7 — Valeur de σ_e^2 dans le cas de l'homothétie-rotation (trait continu -P1, o -P3, x-P5) en fonction de $D = 2^p$.

ler des champs aléatoires dont on connaît les caractéristiques du second ordre, et qui présentent des invariances, mais pas nécessairement en translation. En particulier, on peut modéliser ainsi un ensemble de processus auto-similaires au second ordre. De tels processus pourront trouver des applications dans la modélisation des textures naturelles. La méthode de synthèse est intéressante car on peut contrôler théoriquement l'erreur sur la corrélation. On montre en particulier comment varie cette erreur avec les paramètres d'implantation.

Références

- [1] N. Cressie, *Statistics for Spatial Data*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1991
- [2] T. Lundahl, W. J. Ohley, S. M. Kay and R. Siffert, "Fractional Brownian Motion : A Maximum Likelihood Estimator and Its Application to Image Texture", IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. MI-5, No.3, Sep 1986, pp 152-161
- [3] B. B. Mandelbrot and J.W. Van Ness, "Fractional Brownian Motion, fractional noises and applications", SIAM Revue, vol. 10, No.4, pp 422-437, 1968
- [4] G. Matheron, "Kriging, or polynomial interpolation procedures", Canadian Mining and Metallurgical Bulletin, vol. 60, pp. 1041-1045, 1967
- [5] B. D. Ripley, *Statistical Inference for Spatial Processes*, Cambridge University Press, 1988