

Une nouvelle écriture du développement de Karhunen-Loève - Application à l'interpolation d'images -

Philippe Courmontagne et Jean-François Cavassilas

MS-GESSY, ISITV
Université de Toulon et du Var
avenue G. Pompidou, BP56
83162 La Valette du Var Cedex
e-mail : colline@isitv.univ-tln.fr

RÉSUMÉ

Le problème de la décomposition d'un signal bidimensionnel en une série de fonctions, avec pour coefficients de décomposition des variables aléatoires décorréelées, apparaît dans de nombreuses questions en traitement d'images. Le développement de Karhunen-Loève offre de telles possibilités, mais il est très rarement utilisé en pratique, car on ne dispose pas d'algorithme de calcul rapide pour l'évaluer efficacement. Après avoir rappelé brièvement le principe du développement de Karhunen-Loève, nous proposons une méthode originale pour déterminer les solutions de l'équation intégrale de Fredholm. Puis nous proposons une nouvelle écriture pour le développement de Karhunen-Loève, afin qu'il puisse être appliqué en un délai relativement court. Une application est proposée dans le cadre de l'interpolation d'images.

1 Introduction

Lorsque nous désirons réaliser l'interpolation d'un signal, il est courant d'avoir recours au développement de Karhunen-Loève, afin de transformer le signal en un jeu de coefficients non corrélés. Ce développement est un traitement linéaire qui consiste en une décomposition du signal en une série de fonctions, avec pour coefficients de décomposition des variables aléatoires décorréelées. Les fonctions de base sont solutions d'une équation intégrale connue sous l'appellation d'équation intégrale de Fredholm. Pour résoudre cette dernière, il est courant de considérer son écriture discrète, afin de se ramener à un système matriciel. Malheureusement, les solutions obtenues sont fortement liées au pas d'échantillonnage du signal, et peuvent donc engendrer des problèmes lors de la mise en oeuvre de l'interpolateur. De plus elles ne constituent qu'une approximation souvent insuffisante des solutions exactes. En outre, sous sa forme discrète le développement de Karhunen-Loève est relativement long à mettre en oeuvre. Aussi, nous nous sommes intéressés à une nouvelle écriture de ce développement.

Nous rappellerons, dans une première partie, le développement de Karhunen-Loève pour des signaux bidimensionnels. Nous expliciterons ensuite, dans une seconde partie, une méthode de résolution permettant

ABSTRACT

The development of a two-dimensional signal into series of functions, with uncorrelated variables for decomposition coefficients, appears in many aspects of image processing. These possibilities are offered by the Karhunen-Loève expansion. It is rarely used in practice, because we are not able to estimate it quickly and efficiently. After recalling briefly the Karhunen-Loève expansion, we describe a new method to approximate solutions of the Fredholm integral equation. Then, we propose a new formulation for the Karhunen-Loève expansion, in order to obtain results quickly. Applications to image interpolation are proposed.

l'obtention d'une approximation analytique des solutions de l'équation intégrale de Fredholm. Nous proposerons alors, dans une troisième partie, une nouvelle écriture pour le développement de Karhunen-Loève, afin d'obtenir des résultats en un délai relativement court. Enfin, nous présenterons, dans une dernière partie, des résultats obtenus dans le cadre de l'interpolation d'images.

2 Transformation de Karhunen-Loève dans le cas de signaux bidimensionnels

Le principe du développement de Karhunen-Loève, dans le cas de signaux bidimensionnels est d'obtenir à partir d'un ensemble d'échantillons corrélés, provenant d'une image $I(x, y)$, un ensemble d'autres échantillons le moins corrélés possible. Le formalisme général d'une telle transformation linéaire de signaux bidimensionnels, pour une image définie sur le carré du plan $D = [-T, T] \times [-T, T]$, est ([5], [4]) :

$$I(x, y) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M V_i \Phi_i(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \quad (1)$$

où $\{\Phi_i(x, y)\}$ constitue un système orthonormé à déterminer de telle sorte que les variables aléatoires V_i soient décorréelées.

Les variables aléatoires centrées V_i sont construites de la manière suivante :

$$V_i = \iint_D I(x, y) \Phi_i(x, y) dx dy \tag{2}$$

Compte tenu de la relation (2) et de la contrainte de décorrélation des variables aléatoires V_i , il est possible de montrer que les fonctions de base $\Phi_i(x, y)$ doivent vérifier l'équation intégrale suivante :

$$\iint_D M(x, x', y, y') \Phi_i(x', y') dx' dy' = \lambda_i \Phi_i(x, y) \tag{3}$$

avec: - $M(x, x', y, y')$: noyau de l'équation intégrale, covariance du signal étudié

- $\Phi_i(x, y)$: fonctions propres bidimensionnelles à déterminer

- λ_i : valeurs propres associées à $\Phi_i(x, y)$.

Cette équation intégrale constitue une extension bidimensionnelle de l'équation intégrale de Fredholm homogène de seconde espèce.

3 Approximation analytique des solutions de l'équation intégrale de Fredholm

Nous désirons déterminer les solutions de l'équation intégrale (3). Dans ce but, nous allons décomposer le noyau et les fonctions propres en séries de Fourier bidimensionnelles. Afin de s'assurer de la convergence uniforme des séries ainsi introduites, nous allons tout d'abord composer le noyau et les fonctions propres avec la fonction valeur absolue décalée. Les fonctions ainsi obtenues sont définies sur le carré du plan $\hat{D} = [-2T, 2T]x[-2T, 2T]$, et sont telles que :

$$\begin{cases} \hat{M}(x, x', y, y') = M(T - |x|, T - |x'|, T - |y|, T - |y'|) \\ \hat{\Phi}_i(x', y') = \Phi_i(T - |x'|, T - |y'|) \end{cases}$$

Dans ces conditions, il est possible de montrer que résoudre l'équation (3) revient à déterminer les solutions de l'équation intégrale suivante, pour $(x, y) \in \hat{D}$:

$$\frac{1}{4} \iint_{\hat{D}} \hat{M}(x, x', y, y') \hat{\Phi}_i(x', y') dx' dy' = \lambda_i \hat{\Phi}_i(x, y) \tag{4}$$

Les fonctions $\hat{M}(x, x', y, y')$ et $\hat{\Phi}_i(x', y')$ présentent alors un grand intérêt. En effet, ces fonctions étant paires, elles peuvent donc être décomposées en séries de Fourier, tout en s'affranchissant du phénomène de Gibbs ([1], [2]).

Considérons la décomposition en série de Fourier de $\hat{\Phi}_i(x', y')$:

$$\hat{\Phi}_i(x', y') = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \alpha_{n,m}^i \cos\left(\frac{\pi n}{2T} x'\right) \cos\left(\frac{\pi m}{2T} y'\right)$$

Si on appelle $K_{n,m}(x, y)$ les coefficients en série de Fourier du noyau $\hat{M}(x, x', y, y')$; ces derniers sont obtenus par résolution de l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{4T^2} \iint_{\hat{D}} \hat{M}(x, x', y, y') \cos\left(\frac{\pi n}{2T} x'\right) \cos\left(\frac{\pi m}{2T} y'\right) dx' dy'$$

En remplaçant, dans la relation (4), la fonction propre $\hat{\Phi}_i(x', y')$ par sa décomposition en série de cosinus, et en identifiant dans l'expression ainsi obtenue les coefficients $K_{n,m}(x, y)$, on obtient pour nouvelle expression :

$$T^2 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \alpha_{n,m}^i K_{n,m}(x, y) = \lambda_i \hat{\Phi}_i(x, y) \quad \forall (x, y) \in \hat{D} \tag{5}$$

Multiplions, à présent, les deux membres de la relation (5) par la fonction

$$\cos\left(\frac{\pi k}{2T} x\right) \cos\left(\frac{\pi l}{2T} y\right)$$

et intégrons par rapport à x et à y sur le carré \hat{D} du plan, il vient :

$$\begin{cases} \frac{1}{16} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \alpha_{n,m}^i \Omega_{n,m,0,0} = \lambda_i \alpha_{0,0}^i \\ \frac{1}{8} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \alpha_{n,m}^i \Omega_{n,m,k,0} = \lambda_i \alpha_{k,0}^i \\ \frac{1}{8} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \alpha_{n,m}^i \Omega_{n,m,0,l} = \lambda_i \alpha_{0,l}^i \\ \frac{1}{4} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \alpha_{n,m}^i \Omega_{n,m,k,l} = \lambda_i \alpha_{k,l}^i \end{cases} \tag{6}$$

avec :

$$\Omega_{n,m,k,l} = \iint_{\hat{D}} K_{n,m}(x, y) \cos\left(\frac{\pi k}{2T} x\right) \cos\left(\frac{\pi l}{2T} y\right) dx dy$$

Le calcul des coefficients $\Omega_{n,m,k,l}$ peut être effectué numériquement à l'aide de transformées de Fourier successives.

La résolution du système (6) conduit à la détermination des coefficients en série de cosinus $\alpha_{n,m}^i$. Les fonctions propres recherchées $\Phi_i(x, y)$, pour $(x, y) \in D$, sont alors obtenues par la formule de reconstruction :

$$\Phi_i(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \alpha_{n,m}^i \cos\left(\frac{\pi n}{2T} (T-x)\right) \cos\left(\frac{\pi m}{2T} (T-y)\right)$$

4 Recherche d'une approximation rapide au développement de Karhunen-Loève

Afin de pouvoir appliquer le développement de Karhunen-Loève de manière rapide, nous allons chercher à exprimer les variables aléatoires V_i en fonction des coefficients en série de cosinus des fonctions propres $\Phi_i(x, y)$ et de ceux du signal bidimensionnel $I(x, y)$.

Dans ce but, nous allons considérer la fonction $\hat{I}(x, y)$, définie sur le carré \hat{D} du plan :

$$\hat{I}(x, y) = I(T - |x|, T - |y|)$$

Cette fonction est paire et peut donc être décomposée en série de cosinus tout en garantissant la convergence

uniforme. Les coefficients de décomposition de $\hat{I}(x, y)$ sont construits de la manière suivante :

$$\vartheta_{n,m} = \frac{1}{4T^2} \iint_{\hat{D}} \hat{I}(x, y) \cos\left(\frac{\pi n}{2T} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{2T} y\right) dx dy$$

D'autre part, on peut montrer que l'expression (2), définissant les variables aléatoires V_i , est identique à la relation suivante :

$$V_i = \frac{1}{4} \iint_{\hat{D}} \hat{I}(x, y) \hat{\Phi}_i(x, y) dx dy$$

En remplaçant la fonction $\hat{\Phi}_i(x, y)$ par sa décomposition en série de cosinus et en identifiant les coefficients de décomposition $\vartheta_{n,m}$ de $\hat{I}(x, y)$, il vient :

$$V_i = T^2 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \vartheta_{n,m} \alpha_{n,m}^i \quad (7)$$

Intéressons nous à présent à la nouvelle écriture de la relation (1). Cette dernière est équivalente à l'expression suivante :

$$\hat{I}(x, y) = \sum_{i=1}^M V_i \hat{\Phi}_i(x, y) \quad \forall (x, y) \in \hat{D} \quad (8)$$

Considérons la décomposition en série de cosinus de la fonction bidimensionnelle $\hat{I}(x, y)$:

$$\hat{I}(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \varphi_{n,m} \cos\left(\frac{\pi n}{2T} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{2T} y\right)$$

Dans ces conditions, on montre que la relation (8) est équivalente à :

$$\varphi_{n,m} = \sum_{i=1}^M V_i \alpha_{n,m}^i \quad (9)$$

Compte tenu des relations (7) et (9), il vient :

$$\varphi_{n,m} = T^2 \sum_{i=1}^M \left[\alpha_{n,m}^i \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \vartheta_{k,l} \alpha_{k,l}^i \right] \quad (10)$$

Le signal bidimensionnel $I(x, y)$ est alors obtenu par la formule de reconstruction, pour $(x, y) \in D$:

$$I(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \varphi_{n,m} \cos\left(\frac{\pi n}{2T} (T-x)\right) \cos\left(\frac{\pi m}{2T} (T-y)\right) \quad (11)$$

Cette relation constitue une nouvelle écriture du développement de Karhunen-Loève, avec les coefficients $\varphi_{n,m}$ obtenus soit par la relation (10), soit par les relations (7) et (9) selon l'utilisation désirée.

5 Application : interpolation d'images

Afin de valider cette nouvelle écriture pour le développement de Karhunen-Loève, nous avons choisi de l'utiliser en vu de réaliser une interpolation d'images codées sur 8 bits, soit 256 niveaux de gris.

L'interpolation d'une image numérisée de dimension $L \times L$, définie avec un pas d'échantillonnage $\Delta T = 2T/(L-1)$, pourra être effectuée à l'aide de la relation suivante :

$$I(k\Delta T', l\Delta T') =$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \varphi_{n,m} \cos\left(\frac{\pi n}{2T} (T - k\Delta T')\right) \cos\left(\frac{\pi m}{2T} (T - l\Delta T')\right)$$

pour k, l entiers, $\Delta T' = \Delta T/z$, z désignant le facteur d'interpolation de l'image et $\varphi_{n,m}$ obtenus par la relation (10).

Il est intéressant de remarquer que le facteur d'interpolation a peu d'impact sur le temps de calcul nécessaire au grossissement de l'image. En effet, ce dernier n'intervient que dans la phase de reconstruction, or la majorité des calculs sont effectués pour la détermination des coefficients $\varphi_{n,m}$. Cette méthode permet ainsi d'effectuer un fort grossissement de l'image en un temps nettement plus court que le développement de Karhunen-Loève classique.

Pour pouvoir déterminer les coefficients de décomposition $\alpha_{n,m}^i$ des fonctions propres solutions de l'équation intégrale (3), il est nécessaire de connaître l'autocorrélation du signal. Diverses expérimentations ont montré qu'il était possible de modéliser cette dernière à l'aide d'une fonction exponentielle décroissante suivant les deux axes (figure 1).

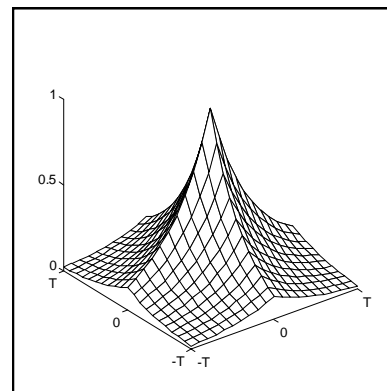


Figure 1. - Fonction d'autocorrélation normalisée -

Les solutions de l'équation intégrale ont été déterminées avec $N=32$.

Le traitement a été appliqué sur deux images de dimension 256×256 pixels. Ces images sont présentées figure 2 et 3. Le traitement s'est fait par fenêtre glissante, avec des imagerie de dimension 7×7 , pour les deux images traitées.

L'entier M intervenant dans la somme partielle de la relation (10), qui définit les coefficients de décomposition $\varphi_{n,m}$, est choisi de sorte que :

$$\sigma_i^2 \lambda_M \geq \text{seuil}$$

où σ_i^2 représente la puissance du signal au sein d'une imagerie, le seuil étant pris par exemple égal à 1 (soit 0 dB).



Figure 2. - Image native I : Léna -
(256x256 pixels)

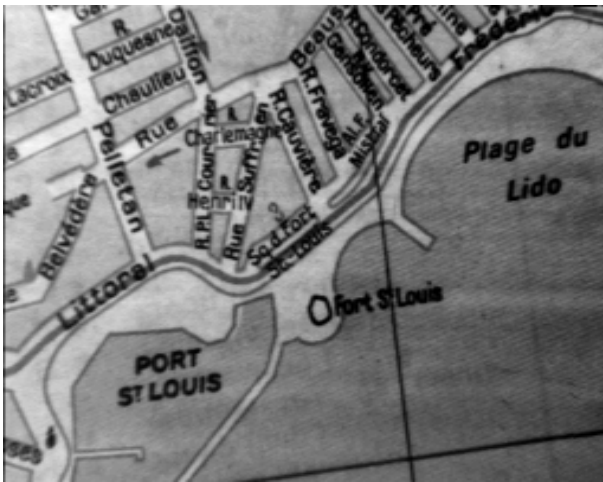


Figure 3. - Image native II : Plan -
(256x256 pixels)

Nous avons réalisé un grossissement d'un facteur 10 de l'oeil droit de Léna (30x30 pixels), ramenant ainsi sa dimension à 300x300 pixels. Le résultat obtenu est présenté figure 4. Nous avons également réalisé un grossissement d'un facteur 7 d'une rue centrale du plan (40x40 pixels), le résultat obtenu est présenté figure 5, avec une dimension de 280x280 pixels.



Figure 4. - Image I : grossissement d'un facteur 10 -
(300x300 pixels)

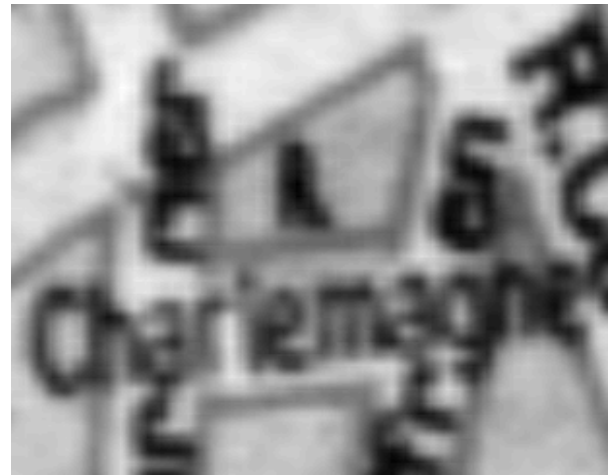


Figure 5. - Image II : grossissement d'un facteur 7 -
(280x280 pixels)

L'analyse de ces résultats montre que les images données figure 4 et 5 sont de bonne qualité et permettent de visualiser des détails présents figure 3 et 4.

6 Conclusions

La nouvelle écriture pour le développement de Karhunen-Loève n'a en rien altéré les qualités de cette dernière. La méthode proposée s'avère être nettement plus rapide que le développement traditionnel, puisque toutes les étapes de la réalisation peuvent être effectuées à l'aide d'un algorithme de calcul de transformée de Fourier rapide. De plus, différentes expérimentations ([3]) ont montré que les résultats obtenus par la méthode proposée sont de meilleure qualité que ceux obtenus par les interpolateurs classiques d'ordre 0, 1 et 2, ainsi que par les méthodes basées sur la transformée de cosinus discrète ou le développement de Karhunen-Loève classique.

7 Références

- [1] Blinn J.F. "What's the Deal with the DCT?", IEEE Computer Graphics & Applications., pp. 78-83, Juillet 1993.
- [2] Boccara N. "Analyse Fonctionnelle - une Introduction pour les Physiciens", Ellipses, 1984.
- [3] Courmontagne P. "Interpolation d'un Signal Bidimensionnel en Présence de Termes Perturbateurs", Mémoire de Thèse, Laboratoire GESSY, Juin 1997.
- [4] Kunt M. "Traitement Numérique des Signaux", Dunod, 1981.
- [5] Van Trees H.L. "Detection, Estimation and Modulation Theory", Part. I, John Wiley & Sons.