

Construction de Bancs de Filtrés Non Uniformes à Partir des Paquets d'Ondelettes

Imad Abdallah, Silvio Montresor et Marc Baudry

Laboratoire d'Informatique de l'Université du Maine,
Avenue Olivier Messiaen 72085 Le Mans cedex 09
France

Email : imad@lium.univ-lemans.fr

Tel : 02 43 83 38 40

RÉSUMÉ

Nous proposons une nouvelle représentation dans le plan temps-fréquence, des signaux à énergie finie. Nous commencerons par décrire deux bibliothèques de bases orthogonales qui sont les paquets d'ondelettes et les ondelettes de Malvar. Nous présentons ensuite les bases Σ -dyadiques d'ondelettes qui forment une extension de ces deux dernières et présenterons les représentations temps-fréquence correspondantes. Les connexions entre les bases orthogonales d'ondelettes discrètes avec d'une part les filtres à réponse impulsionnelle finie et d'autre part les bancs de filtres à reconstruction parfaite ont été établies par plusieurs auteurs. Les représentations obtenues nous permettent de construire de nouvelles familles de bancs de filtres non uniformes.

1 Introduction

L'analyse et la synthèse de signaux par des bancs de filtres à reconstruction parfaite présente un intérêt certain dans des applications comme la transmission et le codage de parole ou la restauration d'archives sonores. Par ailleurs, les connexions entre les bases orthogonales d'ondelettes discrètes avec d'une part les filtres à réponse impulsionnelle finie et d'autre part les bancs de filtres à reconstruction parfaite ont été établies par plusieurs auteurs [1]. Nous proposons dans cet article de nouvelles représentations dans le plan temps-fréquence des signaux à énergie finie. Il s'agit d'une extension des bibliothèques de bases organisées en arbres binaires et basées sur les paquets d'ondelettes [2,3] et des ondelettes de Malvar [4,5]. Nous décrivons les représentations temps-fréquence relatives à ces bibliothèques. L'entropie de Shannon est un critère qui permet de choisir la meilleure base représentant le signal [2]. En utilisant ces nouvelles représentations, nous construisons de nouvelles bases appelées bases Σ -dyadiques. Une base est dite Σ -dyadique si ses différentes composantes sont de taille $\Sigma 2^j$, où j est un entier. Ces bases ne peuvent pas être obtenues en adoptant une organisation en arbre binaire. A partir de ces bases nous pouvons construire une nouvelle

ABSTRACT

We propose a new time-frequency plane representations for finite energy signals. Firstly, we describe two libraries of orthogonal bases that are the wavelet-packets and Malvar wavelets. Then we present an extension of these two libraries, and the corresponding time-frequency representations. We called them Σ -dyadic discrete wavelet bases. Connection between Finite Impulse Response filters, Perfect Reconstruction Filter Banks and discrete wavelet bases have been established by many authors. Consequently, Σ -dyadic discrete wavelet bases allows to conceive a new family of non uniform filter banks.

famille de bancs de filtres non uniformes. Nous montrons dans la suite comment nous pouvons utiliser ces différentes représentations dans des applications telle la restauration des enregistrements de musique anciens.

2 Les ondelettes de Malvar et les paquets d'ondelettes

2.1 La base locale en cosinus ou les ondelettes de Malvar

Pour obtenir la base en cosinus locale il suffit de prendre la famille des fonctions suivantes:

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{|I_j|}} \cdot P_j(t) \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \frac{\pi}{|I_j|} \cdot (t-a_j)\right) \quad (1)$$

où $I_j = [a_j, a_{j+1}]$ et $R = \bigcup_j I_j$, et $P_j(t)$ une fonction

vérifiant :

$$\left|P_j(t)\right|^2 + \left|P_j(-t)\right|^2 = 1 \quad \forall t \in [-1,1]$$

Un exemple de la fonction $P_j(t)$ est le suivant :

$$P_j(t) = \sin(\pi/4(1 + \sin((\pi/2).t))) \quad \forall t \in [-1,1]$$

Dans le cas discret, on peut établir une relation entre les ondelettes de Malvar d'une part et la transformée en cosinus discret (DCT) et l'opérateur «Folding» décrit dans [6] d'une autre part, de façon à réduire la complexité de leur implémentation algorithmique.

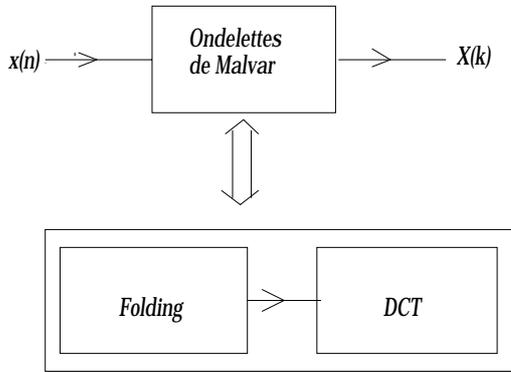


Figure 1 : relation entre les ondelettes de Malvar et la DCT.

2.2 Les Paquets d'ondelettes

Les paquets d'ondelettes sont obtenus en utilisant l'approche suivante basée sur une paire de filtres QMF: Soit \$F_0\$ un filtre dont les coefficients de la réponse impulsionnelle satisfont les conditions suivantes :

$$\sum_n h(n-2k)h(n-2l) = \delta_{k,l} \quad (2)$$

et

$$\sum_n h(n) = \sqrt{2} \quad (3)$$

et \$F_1\$ un filtre dont les coefficients \$g(n)\$ sont obtenus par :

$$g_k = (-1)^k h(1-k) \quad (4)$$

Soient \$F_0(\theta)\$ et \$F_1(\theta)\$ les fonctions de transfert des filtres \$F_0\$ et \$F_1\$ définies par :

$$F_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\theta} \quad (5)$$

$$F_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k e^{ik\theta} \quad (6)$$

et soit \$M\$ la matrice suivante :

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} F_0(\theta) & F_1(\theta) \\ F_0(\theta + \pi) & F_1(\theta + \pi) \end{pmatrix} \quad (7)$$

\$M\$ est une matrice unitaire \$\forall \theta \in [0, 2\pi]\$, \$F_0\$ et \$F_1\$ forment une paire de filtres QMF.

A partir des coefficients des filtres \$F_0\$ et \$F_1\$ on peut construire la suite des fonctions suivantes :

$$W_{2n}(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k W_n(2x-k) \quad (8)$$

$$W_{2n+1}(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k W_n(2x-k) \quad (9)$$

\$W_n(x-k)\$ où \$n \in \mathbb{N}\$ et \$k \in \mathbb{Z}\$ est une base orthonormée de \$L^2(\mathbb{R})\$.

Ainsi les ondelettes \$\phi\$ (père des ondelettes ou tendance) \$\psi\$ (mère des ondelettes ou fluctuation) seront définies par :

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x-k) \quad (10)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \psi(2x-k) \quad (11)$$

3 Représentations temps-fréquence et organisation binaire et \$\Sigma\$-dyadique

3.1 Bibliothèque de bases binaires.

Soit l'intervalle \$I = [0,1]\$. la bibliothèque de bases orthonormées est un arbre binaire qui satisfait les conditions suivantes:

1- Les supports de vecteurs des bases peuvent être identifiés à des intervalles de \$I\$ de la forme :

$$I_j^k = [k/2^j, (k+1)/2^j] \quad \forall j, k \geq 0 \quad (12)$$

2- Chaque base de la bibliothèque correspond à un recouvrement disjoint d'intervalles de \$I\$ de la forme \$I_j^k\$, où \$j \in \mathbb{N}\$ et \$k\$ est un entier qui vérifie \$0 \leq k \leq 2^j - 1\$.

3- \$V_j^k\$ est le sous-espace correspondant à \$I_j^k\$ alors :

$$V_j^k = V_{j+1}^{2k} \oplus V_{j+1}^{2k+1} \quad (13)$$

où \$V_{j+1}^{2k}\$ et \$V_{j+1}^{2k+1}\$ sont les espaces correspondants aux intervalles \$I_{j+1}^{2k}\$ et \$I_{j+1}^{2k+1}\$.

Dans cet arbre binaire chaque sous-espace est la somme directe orthogonale de ces deux descendants directs.

Les bases orthogonales des ondelettes de Malvar et des paquets d'ondelettes sont organisables en arbre binaire. Dans une telle organisation, on peut construire une immense collection de bases dyadiques orthogonales. La première étape consiste à segmenter le signal en des intervalles disjoints de taille \$N = 2^j\$. Pour chacun de ces intervalles, une partition est réalisée en segments de taille \$2^\alpha\$, où \$\alpha\$ est assez petit pour pouvoir prendre en compte les détails les plus fins du signal. On commence par construire l'arbre binaire complet de profondeur \$j = \log_2(N) - \alpha\$. Il suffit de réunir les intervalles qui possèdent le même prédécesseur dans l'organisation hiérarchique en arbre binaire pour obtenir une nouvelle base et donc une nouvelle représentation du signal en arbre binaire [5].

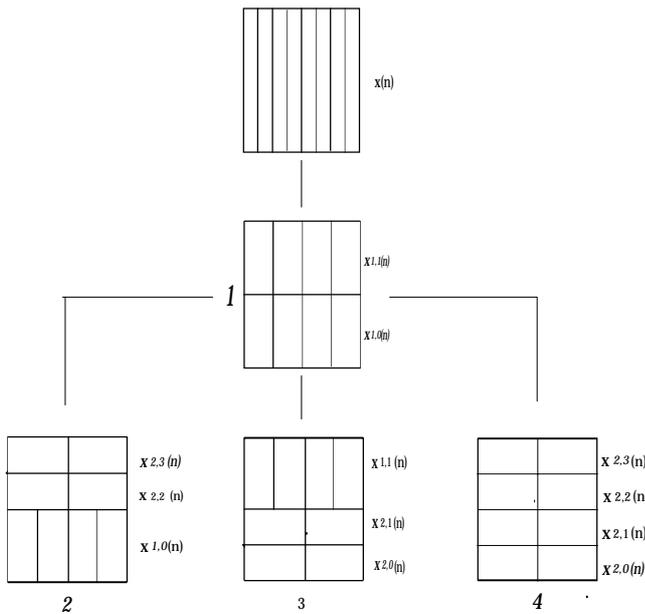


Figure 1 : représentations temps-fréquence correspondante à une organisation des paquets d'ondelettes en arbre binaire de profondeur 2 d'un signal composé de 8 coefficients.

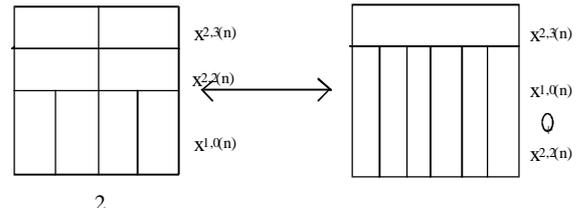
Dans une décomposition en paquets d'ondelettes, Chaque arbre binaire définit une partition du contenu fréquentiel du signal, alors que les ondelettes de Malvar effectuent une partition du contenu temporel du signal. Notons qu'on peut effectuer une segmentation fréquentielle du signal en utilisant les ondelettes de Malvar. Pour ceci il suffit d'appliquer l'algorithme de choix de la meilleure base en partant de la transformée du signal, par exemple en partant de sa transformée de Fourier (FFT) ou de sa transformée en cosinus discrète (DCT).

3.2 Représentations Σ -dyadiques et bancs de filtres non uniformes

Nous proposons une extension des représentations précédentes en construisant ce que nous appelons des représentations Σ -dyadiques qui mènent à l'élargissement de la famille de bases d'ondelettes orthogonales. Contrairement à une organisation en arbre binaire, la structure adoptée permet le regroupement de deux intervalles de profondeurs égales même lorsqu'ils ne sont pas issus du même prédécesseur [6]. Les bases correspondantes à ces deux intervalles sont alors remplacées par la base orthogonale relative à leur somme directe. Il s'agit donc d'une extension des bibliothèques des ondelettes de Malvar et des paquets d'ondelettes qui permet de construire des bases orthogonales Σ -dyadiques. En adoptant ces nouvelles représentations, on dispose d'une plus large collection de bases d'ondelettes.

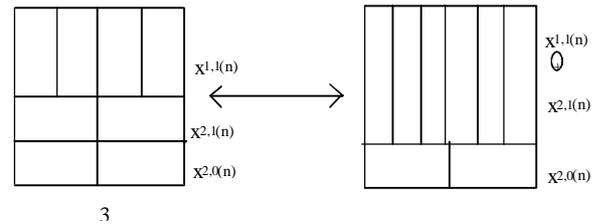
A titre d'exemple, Reprenons celui de la figure 1, dans les plans temps-fréquence (2,3,4), nous procédons de la façon suivante:

Plan 2 : remplacer $x_{1,0(n)}$ et $x_{2,2(n)}$ par leur somme directe $x_{1,0(n)} \oplus x_{2,2(n)}$:



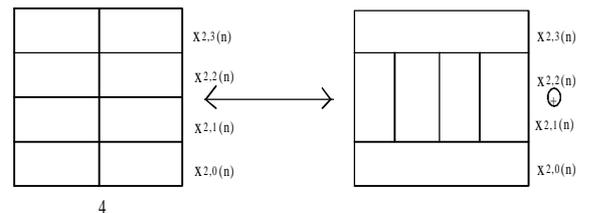
Plan 3 : remplacer $x_{1,1(n)}$ et $x_{2,1(n)}$ par leur somme directe

$x_{1,1(n)} \oplus x_{2,1(n)}$:



Plan 4 : remplacer $x_{2,1(n)}$ et $x_{2,2(n)}$ par leur

somme directe $x_{2,1(n)} \oplus x_{2,2(n)}$:



Notons que les nouvelles représentations obtenues ne sont pas proposées dans l'organisation binaire des paquets d'ondelettes et des ondelettes de Malvar. La généralisation de l'exemple cité auparavant ne pose aucun problème. Ainsi pour une représentation initiale d'un signal en arbre binaire de profondeur j , nous pouvons ajouter $2^j - 1$ nouvelles représentations.

La relation entre les bases d'ondelettes discrètes et les structures de filtres en arbre binaire a été établie [1], nous proposons ici une approche qui établie un lien entre une organisation en bases Σ -dyadiques et une nouvelle famille de bancs de filtres non uniformes. Ces nouvelles extensions permettent d'obtenir une meilleure concentration de l'énergie du signal dans le plan temps-fréquence.

3.3 Choix de la meilleure base

L'entropie de Shannon mesure la distance entre un signal et sa décomposition sur une base orthogonale. Elle permet ici de choisir la meilleure base d'ondelettes la plus proche du signal. L'entropie de Shannon est précisément définie par :

$$E(s, e_{j,k}) = -\sum_k \frac{|C_{j,k}|^2}{\|s\|^2} \ln \frac{|C_{j,k}|^2}{\|s\|^2} \quad (14),$$

où $C_{j,k}$ forme l'ensemble des coefficients de la décomposition du signal $s = \{s_n\}_{0 \leq n \leq N-1}$ sur la base orthonormée $\{e_{j,k}\}_{j,k}$.

4 Application à la restauration des enregistrements anciens

Dans le cadre d'une application telle que la restauration des archives sonores, il s'agit de décomposer le signal en différentes bandes de fréquences puis d'appliquer un algorithme de réduction de bruit sur chacune des composantes filtrées.

Cette opération sera effectuée en identifiant pour chacun des signaux des sous-bandes les coefficients résultant du bruit ainsi que ceux appartenant au signal utile. Des techniques basées sur un découpage en utilisant une décomposition en ondelettes [7,8], en paquets d'ondelettes et en ondelettes de Malvar [9] ont déjà été utilisées. En adoptant une décomposition en ondelettes, on utilise un découpage fréquentiel fixe qui peut s'avérer inadéquat avec les variations du contenu fréquentiel local du signal. Une décomposition sur les familles des paquets d'ondelettes et des ondelettes de Malvar a l'avantage de fournir une structure de bancs de filtres adaptatifs qui est plus en adéquation avec l'évolution temporelle du signal. Cependant, par construction, l'organisation en arbre binaire des paquets d'ondelettes et des ondelettes de Malvar introduit des discontinuités sur le contenu fréquentiel local du signal [9]. Les représentations Σ -dyadiques en paquets d'ondelettes et en ondelettes de Malvar offrent l'avantage de fournir une structure de bancs de filtres adaptative qui a la particularité de fournir une segmentation fréquentielle du signal qui ne contient pas les ruptures artificielles inhérentes à la construction dyadique des paquets d'ondelettes et des ondelettes de Malvar.

La dimension théorique normalisée est considérée ici comme un critère de séparation des composantes du découpage fréquentiel obtenu en des zones de bruit et des zones correspondantes au signal. Elle est définie par :

$$d(s_b) = \frac{e^{E(s_b, e_{j,k})}}{N} \quad (15),$$

où $E(s_b, e_{j,k})$ est l'entropie du signal de sous-bande s_b par rapport à sa décomposition sur la base $\{e_{j,k}\}_{j,k}$, et N la taille du signal s_b . La dimension théorique représente une mesure de la concentration en énergie de la décomposition du signal sur la base orthogonale $\{e_{j,k}\}_{j,k}$. Notons que $d(s)$ peut constituer un critère qui reflète le degré d'organisation de l'information. Par exemple, dans le cas d'un signal de musique, ce peut être la distinction entre des bandes de bruit et des bandes contenant des composantes harmoniques du signal. Pour chacun des signaux de sous-bandes, on calcule la dimension théorique correspondante ; on localise les n composantes les plus énergétiques où :

$$n = N \cdot d(s_b) \quad (16)$$

On considère que ces n composantes caractérisent le signal et que les $N-n$ composantes restantes seront considérées comme celles caractérisant le bruit. Par conséquent leur contribution est annulée lorsque nous effectuons la synthèse du signal. Ainsi nous obtenons le signal restauré qui possède un niveau de bruit inférieur à celui contenu dans le signal original.

5 Conclusion

La bibliothèque des bases d'ondelettes discrètes Σ -dyadiques constitue une extension de celles organisées en arbre binaire. La famille des ondelettes de Malvar Σ -dyadiques s'avère mieux adaptée à l'évolution temporelle du signal, alors que la famille des paquets d'ondelettes Σ -dyadiques se révèle plus adaptée à l'évolution du contenu fréquentiel du signal. Pour la suite, nous envisageons d'utiliser la nouvelle famille de banc de filtres dans le cadre de la restauration d'archives sonores. La dimension théorique normalisée servira comme critère de décision pour la séparation de bandes fréquentielles en bandes correspondantes au signal et d'autres relatives au bruit. D'autre part le traitement est effectué par blocs d'échantillons et permet une réactualisation du banc de filtres ce qui est plus en accord le caractère non stationnaire des signaux rencontrés dans ce type d'applications.

6 Références

- [1] M. Vetterli and J. Kovacevic, *Wavelets and Subband Coding*, Prentice-Hall 1995.
- [2] R. Coifmann and V. Wickerhauser, *Entropy-Based Algorithms for Best-Basis Selection*, IEEE transactions on info. theory, vol 38, n°2, pp 713-718, Mars 1992.
- [3] C. k Chui, *An Introduction to Wavelets*, volume 1, pp215-240, edited by Academic Press 1992.
- [4] P. Auscher, G. Weiss and V. Wickerhauser, *Local Sine and Cosine Bases of Coifmann and Meyer and the Construction of Smooth Wavelets*, A tutorial in theory and applications Ed, by C.k Chui, pp 237-256 Academic Press 1992.
- [5] H. S. Malvar, *Lapped Transform for Efficient Transform/Subband Coding*, IEEE transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing, vol 38, n° 6, pp 969-978, Juin 1990.
- [6] Y. Meyer, *Les ondelettes: Algorithme et applications*, Editions Armand Colin, Paris 1992.
- [7] J.C Valière, *La Restauration des Enregistrements Anciens par Traitements Numériques. Contribution à l'Etude de quelques Techniques Récentes*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Septembre 1991.
- [8] L Simon, *Réduction du Bruit par la réalisation d'un Banc de filtres Mixte dans le Cadre de la restauration des Enregistrements anciens*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Janvier 1994.
- [9] J. Berger, R. Coifman et M. Goldberg, *Removing noise from Music using local Trigonometric Bases and Wavelet Packets*, J. Audio Eng. Soc., vol 42, No 10, Octobre 1994.