

Approche paramétrique pour le traitement des signaux ultrasonores - Application à la caractérisation des défauts -

Marian Faur*, Luc Paradis* et Jacques Oksman**

*CEA/CEREM, CE de Saclay, Bat. 611
91191 Gif sur Yvette

**École Supérieure d'Electricité, Service des Mesures
91192 Gif sur Yvette

RÉSUMÉ

La caractérisation des défauts est un objectif majeur en contrôle non destructif. Lors d'un contrôle ultrasonore on n'a pas accès aux défauts, mais seulement à leur représentation à travers les phénomènes physiques mis en jeu et se matérialisant sous la forme d'un signal ultrasonore. L'interprétation de ce signal est souvent difficile et nécessite une certaine expérience de la part de l'opérateur humain. Nous montrons dans cet article l'intérêt d'une approche paramétrique quant à l'extraction, à partir des signaux ultrasonores, de l'information utile concernant le défaut. Il s'agit d'une méthode dont le but est la mise en évidence d'éléments permettant la caractérisation des défauts et qui conduit à une amélioration de la résolution.

1 Introduction

L'examen par ultrasons des soudures est une méthode éprouvée de contrôle, en particulier dans l'industrie nucléaire. Cette méthode présente l'avantage d'une grande sensibilité en détection mais, dans certains cas, les échos reçus ne permettent une caractérisation directe des défauts. En effet, l'interaction d'un faisceau ultrasonore avec un défaut peut donner lieu à différents phénomènes physiques tels que : réflexion spéculaire, diffraction, conversion de mode d'onde. De plus, un défaut situé à proximité du fond de la pièce conduit à des réflexions multiples, baptisées "effets de coin", s'ajoutant aux échos précédents. Dans ces conditions, il est souvent difficile d'interpréter les données ultrasonores contenant la signature d'un défaut.

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode pour l'extraction de l'information utile contenue dans les signaux ultrasonores de type Ascan. Cette méthode est fondée sur l'utilisation d'un modèle paramétrique associé au mécanisme de formation de ce type de signaux. L'identification du modèle est censée conduire à la mise en évidence d'éléments permettant la caractérisation des défauts et aussi à une amélioration de la résolution. Ainsi, pour une position donnée, le signal Ascan observé est considéré comme la somme des échos résultant de l'interaction faisceau ultrasonore/défaut. On considère aussi que chaque écho est généré par un réflecteur virtuel (un réflecteur réel peut

ABSTRACT

One of the classical task of ultrasonic Non Destructive Evaluation is the characterization of defects. The quantitative interpretation of the observed data containing some useful information concerning the defect is often difficult and demands a certain expert knowledge. This paper deals with the processing of information-bearing ultrasonic signals in order to extract from them the maximum available information on the defect. We present a parameter estimation approach as a very useful tool in the domain of ultrasonic NDE. This approach allows to reveal elements from the observed ultrasonic signal that may be used for an eventual defect characterization and also to improve the resolution.

générer plusieurs échos). Par l'intermédiaire des descripteurs qui lui sont associés, un tel réflecteur doit pouvoir générer les différents types d'échos qui peuvent apparaître en présence d'un défaut. On choisit donc de représenter un défaut à l'aide d'une séquence peu dense de générateurs d'échos que l'on appellera Séquence des Réflecteurs Virtuels (SRV). Le signal observé, résultat de l'interaction du champ ultrasonore avec le défaut, est alors décrit comme la convolution de l'ondelette ultrasonore incidente et de la SRV représentative du défaut. L'ondelette ultrasonore incidente étant supposée connue, notre but est la restauration, à partir du signal Ascan observé, de la SRV.

2 Modèle paramétrique

En se basant sur des considérations physiques on modélise le signal analytique correspondant au signal Ascan observé par une somme bruitée d'échos

$$\tilde{y}_n = \sum_{m=1}^M a_m \exp(j\varphi_m) \tilde{s}(t_n - \tau_m) + \tilde{b}_n, \quad n = 1, \dots, N \quad (1)$$

ces échos étant des répliques pondérées, décalées et déphasées de l'ondelette analytique incidente $\tilde{s}(t)$; \tilde{b}_n correspond à un faible bruit supposé blanc complexe de moyenne nulle et dont les parties réelle et imaginaire sont non corrélées et de variance $\sigma_b^2/2$.

L'équation (1) peut s'écrire sous forme matricielle

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{a}_\varphi + \tilde{\mathbf{b}} \quad (2)$$

où $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N]^T$ est le vecteur signal analytique associé au Ascan observé et $\tilde{\mathbf{b}} = [\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_N]^T$ est le vecteur bruit; $\mathbf{a}_\varphi = [a_1 \exp(j\varphi_1), \dots, a_M \exp(j\varphi_M)]^T$ est le vecteur des amplitudes complexes et $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_M]^T$ est le vecteur des instants d'arrivée des échos constituant le signal Ascan. $\tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\tau})$ est une matrice complexe de dimensions $N \times M$

$$\tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} \tilde{s}(t_1 - \tau_1) & \dots & \tilde{s}(t_1 - \tau_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{s}(t_N - \tau_1) & \dots & \tilde{s}(t_N - \tau_M) \end{bmatrix}.$$

Le signal analytique associé au Ascan observé peut être considéré comme la sortie bruitée d'un filtre linéaire ayant pour entrée l'ondelette analytique incidente

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \tilde{s}(t) * \text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^M a_m \exp(j\varphi_m) \tilde{\delta}(t - \tau_m) \right\} + \tilde{b}(t) \\ &= \tilde{s}(t) * \text{SRV}(t, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}_\varphi) + \tilde{b}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

La réponse impulsionnelle du filtre, représentée ici par la fonction paramétrique $\text{SRV}(t, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}_\varphi)$, est représentative du défaut. Sa restauration nécessite l'identification du modèle (2). Cela implique la détermination du nombre M d'échos constituant le signal observé (choix optimal au sens d'un certain critère de l'ordre du modèle) et l'estimation des vecteurs de paramètres $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{a}_φ .

3 Identification du modèle

En pratique, on distingue deux cas conduisant à deux approches d'identification différentes : celui des grands défauts (devant la longueur d'onde du signal ultrasonore incident) et celui des petits défauts et/ou situés à proximité du fond de la pièce contrôlée. Les signaux ultrasonores correspondant à des grands défauts sont constitués d'échos séparés temporellement. Dans ce cas, l'on peut déterminer facilement le nombre d'échos (le nombre de maximums de l'enveloppe du signal supérieurs à un certain seuil, par exemple).

Le modèle intervenant dans (2) a une structure Partiellement Linéaire par rapport aux Paramètres (PLP) [1]. On peut montrer que l'estimation $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{MV}}$ de $\boldsymbol{\tau}$ au sens du *Maximum de Vraisemblance* (MV) pour un modèle PLP correspond aux positions des M maximums en ordre décroissant du critère

$$R(\boldsymbol{\tau}) = \text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{y}}^+ \tilde{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\tau}) \left[\tilde{\mathbf{s}}^+(\boldsymbol{\tau}) \tilde{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\tau}) \right]^{-1} \tilde{\mathbf{s}}^+(\boldsymbol{\tau}) \tilde{\mathbf{y}} \right\} \quad (4)$$

où $\tilde{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\tau}) = [\tilde{s}(t_1 - \tau), \dots, \tilde{s}(t_N - \tau)]^T$ et $\tau = 1, \dots, NT_e$ (T_e est la période d'échantillonnage); "+" signifie complexe conjugué. Dans une deuxième étape, avec $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{MV}}$ ainsi obtenu, on peut estimer au sens des *Moindres Carrés* (MC) le vecteur \mathbf{a}_φ [1] :

$$\hat{\mathbf{a}}_{\varphi, \text{MC}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{MV}}) = \left[\tilde{\mathbf{S}}^+(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{MV}}) \tilde{\mathbf{S}}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{MV}}) \right]^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^+(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{MV}}) \tilde{\mathbf{y}} \quad (5).$$

Les petits défauts se traduisent par des signatures dont les échos interfèrent. L'interférence des échos complique le problème d'identification car il faut estimer à la fois M qui donne le nombre de degrés de liberté du modèle et les vecteurs $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{a}_φ .

3.1 Cadrage du problème

L'analyse des bornes de Cramér-Rao [2] montre que la précision d'estimation des paramètres des M éléments constituant un modèle PLP, pour un rapport signal à bruit donné, est une fonction du degré de séparation des paramètres non-linéaires intervenant dans le modèle et aussi du nombre d'éléments qui interfèrent. On fait l'hypothèse que le modèle paramétrique que nous utilisons est un modèle à interaction locale de type LISMO (Local Interaction Signal Model). Un tel modèle, dont les caractéristiques sont définies en détail dans [2], suppose que les échos constituant le signal observé n'interfèrent qu'avec un ou deux échos voisins dans le domaine temporel. Cette hypothèse est respectée par les signaux Ascan réels. Pour les défauts que l'on veut caractériser, ces signaux se caractérisent aussi par une faible interférence entre deux échos voisins ($\tau_{m+1} - \tau_m \geq \Delta/2$, où Δ est l'extension temporelle de l'ondelette incidente), car les traducteurs utilisés sont relativement large bande. On peut donc envisager d'obtenir une précision d'estimation satisfaisante des paramètres des échos constituant le signal analysé et donc des réflecteurs de la SRV.

3.2 Estimation de $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{a}_φ pour un M donné

Les vecteurs $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{a}_φ sont des grandeurs intrinsèquement différentes. Pour un M connu et des échos qui n'interfèrent pas un critère de type vraisemblance est bien adapté au problème de leur estimation. En revanche, s'il y a interférence entre les échos, le critère (4) ne permet plus d'obtenir directement une bonne estimation du vecteur $\boldsymbol{\tau}$. Pour résoudre ce problème on peut exploiter un algorithme similaire à celui utilisant (4) et (5) mais quelque peu modifié. Le principe d'un tel algorithme est présenté par exemple dans [3] et plus en détail, autour d'une autre application, dans [4]. L'algorithme consiste en deux étapes : une étape d'initialisation et une autre d'optimisation. Lors de l'initialisation on estime les paramètres des échos les plus "forts" et on s'en sert pour créer un signal résiduel. Ce signal est obtenu en faisant la soustraction du signal synthétique, contenant les échos dont les paramètres ont été déjà estimés, du signal initial. Ainsi, les échos plus "faibles" ne seront plus "cachés" par les échos plus "forts" et on pourra estimer aussi leurs paramètres. De cette façon on arrive à une solution proche de la solution recherchée. La partie optimisation de l'algorithme permettra à la suite d'obtenir cette solution.

3.3 Choix de l'ordre du modèle

Si le nombre de réflecteurs M n'est pas connu il est nécessaire de définir un critère susceptible d'assurer le compromis entre la complexité du modèle et sa fidélité envers les données observées. Autrement dit, le problème à résoudre peut s'énoncer de la manière suivante : "Sachant

que le signal Ascan est généré par un nombre réduit de réflecteurs (généralement, inférieur à 10), quel est le nombre de réflecteurs et quelles sont leurs positions et amplitudes complexes ?" Pour résoudre ce problème nous allons nous placer dans un contexte bayésien. On veut ainsi prendre en compte non seulement l'information contenue dans les données mais aussi notre connaissance *a priori* concernant les paramètres, pour choisir entre plusieurs hypothèses quant à l'ordre du modèle (voir approches similaires dans [5] et [6]). Estimer M au sens de la *log-vraisemblance a posteriori* revient à chercher

$$\hat{M} = \arg \max_M \{ \ln \Pr(\mathcal{H}|\tilde{\mathbf{y}}) \} \quad (6)$$

où l'hypothèse \mathcal{H} signifie qu'il y a M réflecteurs virtuels dans la tâche focale du traducteur. En conformité avec la règle de Bayes et en faisant l'hypothèse d'une loi uniforme pour $\Pr(\mathcal{H})$ on peut écrire

$$\Pr(\mathcal{H}|\tilde{\mathbf{y}}) = \frac{\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H})\Pr(\mathcal{H})}{\Pr(\tilde{\mathbf{y}})} \propto \Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}) \quad (7)$$

où $\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H})$ est la *vraisemblance marginale* ou la *fonction d'évidence*. Maximiser $\Pr(\mathcal{H}|\tilde{\mathbf{y}})$ revient donc à maximiser $\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H})$, c'est à dire choisir un modèle optimal au sens de la *fonction d'évidence*. Sous l'hypothèse d'un bruit blanc gaussien la *vraisemblance* des observations s'écrit :

$$\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}_\phi) \propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_b^2} (\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{a}_\phi)^+ (\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{a}_\phi) \right] \quad (8)$$

On choisit comme densité de probabilité *a priori* pour le vecteur $\boldsymbol{\tau}$ des positions temporelles des échos [3] la loi

$$\Pr(\boldsymbol{\tau}|\mathcal{H}) = \begin{cases} \frac{M!}{T^M} & \text{pour } 0 < \tau_1 < \dots < \tau_M < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9).$$

En pratique, on peut borner les amplitudes complexes ce qui nous permet de choisir une densité *a priori* uniforme pour le vecteur \mathbf{a}_ϕ des amplitudes complexes

$$\Pr(\mathbf{a}_\phi|\mathcal{H}) = \frac{1}{(2\pi A^{\max})^M} \quad (10).$$

En appliquant la règle de Bayes pour écrire la densité *a posteriori* $\Pr(\boldsymbol{\tau}|\mathcal{H}, \tilde{\mathbf{y}})$ que l'on intègre ensuite par rapport à $\boldsymbol{\tau}$ on obtient :

$$\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}) = \int_{\boldsymbol{\tau}} \Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}) \Pr(\boldsymbol{\tau}|\mathcal{H}) d\boldsymbol{\tau} \quad (11)$$

où l'on peut remplacer la densité $\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau})$

$$\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\mathbf{a}_\phi} \Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}_\phi) \Pr(\mathbf{a}_\phi|\mathcal{H}) d\mathbf{a}_\phi \quad (12)$$

obtenue en intégrant par rapport à \mathbf{a}_ϕ la densité *a posteriori* $\Pr(\mathbf{a}_\phi|\mathcal{H}, \tilde{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\tau})$, pour passer ainsi à :

$$\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}) = \Pr(\boldsymbol{\tau}|\mathcal{H}) \Pr(\mathbf{a}_\phi|\mathcal{H}) \int_{\boldsymbol{\tau}} \int_{\mathbf{a}_\phi} \Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}_\phi) d\mathbf{a}_\phi d\boldsymbol{\tau} \quad (13)$$

vu les densités *a priori* définies précédemment. Par développement de $\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}_\phi)$ autour de \mathbf{a}_ϕ^{\max}

$$\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}) \propto \Pr(\boldsymbol{\tau}|\mathcal{H}) \Pr(\mathbf{a}_\phi|\mathcal{H}) \int_{\boldsymbol{\tau}} \Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}_\phi^{\max}) \frac{(2\pi)^M}{\det \mathbf{H}_{\mathbf{a}_\phi}(\boldsymbol{\tau})} d\boldsymbol{\tau}$$

et ensuite de $\frac{\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}_\phi^{\max})}{\det \mathbf{H}_{\mathbf{a}_\phi}(\boldsymbol{\tau})}$ autour de $\boldsymbol{\tau}^{\max}$ on arrive à

l'expression suivante :

$$\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}) \propto \Pr(\boldsymbol{\tau}|\mathcal{H}) \Pr(\mathbf{a}_\phi|\mathcal{H}) \frac{\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}^{\max}, \mathbf{a}_\phi^{\max}) (2\pi)^{3M/2}}{\det \mathbf{H}_{\mathbf{a}_\phi}(\boldsymbol{\tau}^{\max}) \sqrt{\det \mathbf{H}_\tau}} \quad (14)$$

avec les hessiens $\mathbf{H}_{\mathbf{a}_\phi}(\boldsymbol{\tau}) = -\nabla_{\mathbf{a}_\phi} \nabla_{\mathbf{a}_\phi} \left[\ln \Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}_\phi) \right]$

et $\mathbf{H}_\tau = -\nabla_\tau \nabla_\tau \left[\ln \Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}_\phi^{\max}) - \ln \det \mathbf{H}_{\mathbf{a}_\phi}(\boldsymbol{\tau}) \right]$. Les déterminants des deux hessiens apparaissent à des puissances différentes car \mathbf{a}_ϕ est un vecteur complexe et $\boldsymbol{\tau}$ un vecteur réel. De (9), (10) et (14) résulte :

$$\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}) \propto \frac{M!}{T^M (2\pi A^{\max})^M} \frac{\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}^{\max}, \mathbf{a}_\phi^{\max}) (2\pi)^{3M/2}}{\det \mathbf{H}_{\mathbf{a}_\phi}(\boldsymbol{\tau}^{\max}) \sqrt{\det \mathbf{H}_\tau}} \quad (15)$$

Maximiser $\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H})$ par rapport à M nécessite, entre autre, l'identification du modèle, à savoir la détermination de $\boldsymbol{\tau}^{\max}$ et \mathbf{a}_ϕ^{\max} qui maximisent $\Pr(\tilde{\mathbf{y}}|\mathcal{H}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}_\phi)$. Il faut aussi déterminer $\mathbf{H}_{\mathbf{a}_\phi}(\boldsymbol{\tau})$ et \mathbf{H}_τ . Etant donné (8), l'expression analytique de $\mathbf{H}_{\mathbf{a}_\phi}(\boldsymbol{\tau})$ est immédiate :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{a}_\phi}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{\sigma_b^2} \tilde{\mathbf{S}}^+(\boldsymbol{\tau}) \tilde{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\tau}) \quad (16)$$

Pour \mathbf{H}_τ nous allons nous contenter d'une approximation.   cette fin, on peut utiliser un algorithme d'optimisation de type quasi-Newton qui est susceptible de fournir une approximation du hessien au point optimum. L'algorithme sera initialisé avec la solution obtenue par l'algorithme de détection-estimation dont le principe à été énoncé ci-dessus.

On obtiendra ainsi $\boldsymbol{\tau}^{\max}$ et une approximation de \mathbf{H}_τ à ce point. On calculera ensuite \mathbf{a}_ϕ^{\max} et $\mathbf{H}_{\mathbf{a}_\phi}(\boldsymbol{\tau}^{\max})$ conformément à (5) et (16) respectivement.

4 Résultats

On présente les résultats obtenus pour deux signaux ultrasonores : un signal expérimental et un signal synthétique bruit . Les deux signaux sont représentatifs de l'interaction entre un faisceau ultrasonore avec deux défauts plans. Dans le premier cas les échos constituant le signal Ascan n'interfèrent que très peu car il s'agit d'un grand défaut. Cela permet d'utiliser l'algorithme de détection-estimation simplifié basé sur (4) et (5). Après la restauration de la SRV,

le phénomène d'inversion de polarité (déphasage relatif $\approx 180^\circ$) entre les deux échos caractéristiques de la diffraction du faisceau ultrasonore sur les deux bords du défaut est facilement observable au niveau de la SRV correspondante (figure 1). Les phases relatives des échos sont obtenues à partir du vecteur des amplitudes complexes.

Dans le deuxième cas, on s'intéresse à la caractérisation d'un petit défaut situé à proximité du fond de la pièce. L'interférence des échos rend difficile l'interprétation du signal Ascan. En appliquant l'approche paramétrique présentée ci-dessus on arrive à détecter la présence de trois réflecteurs virtuels (figure 2) et ensuite d'accéder à la SRV correspondante (figure 3). Grâce à l'amélioration de la résolution on arrive à observer au niveau de la SRV des phénomènes caractéristiques d'un défaut plan, à savoir l'inversion de polarité correspondant aux échos de diffraction aux bords de la fissure et la présence d'un écho de coin ayant la même phase que l'ondelette incidente. On peut observer aussi la relation de dérivation qui existe entre l'écho de coin et les échos de diffraction (déphasage relatif de 90° et -90°).

5 Conclusion

L'approche paramétrique présentée est robuste par rapport au bruit et conduit à une représentation permettant une lecture facile des signaux ultrasonores en vue de la caractérisation des défauts. En effet, la restauration de la SRV est susceptible de conduire à une amélioration de la résolution et permet l'identification d'échos utiles (échos de diffraction, par exemple). La SRV et les phases relatives des échos facilitent l'observation de phénomènes discriminatoires comme l'inversion de polarité entre les échos de diffraction de haut et de bas de fissure. On peut aussi observer si un écho, supposé de tête de fissure, est approximativement la dérivée d'un écho de réflexion (l'écho de coin, par exemple) comme indiqué par la physique.

6 Références

- [1] Walter E. et Pronzato L. "Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales", 1994.
- [2] Yau S. F. and Bresler Y., "Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Signals by Dynamic Programming", IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 41, No. 2, pp. 804-819, February 1993.
- [3] Kwakernaak H. "Estimation of Pulse Heights and Arrival Times", Automatica, vol. 16, pp. 367-377, 1980.
- [4] Umesh S. and Tufts D. "Estimation of Parameters of Exponentially Damped Sinusoids Using Fast Maximum Likelihood Estimation with Application to NMR Spectroscopy Data", IEEE Trans. Sig. Proc., vol. 44, No. 9, pp. 2245-2259, September 1996.
- [5] Fitzgerald W. J. and Niranjan M. "Speech Processing Using Bayesian Inference", Maximum Entropy and Bayesian Methods, (ed. A. Mohammad Djafari and G. Demoments), Kluwer, Dordrecht, pp. 215-223, 1993.
- [6] D. S. Sivia, C. J. Carlile, "Molecular Spectroscopy and Bayesian Spectral Analysis-How many lines are there", Journal Chem. Phys., 96 (1), p. 170-178, 1992.

Figure 1.

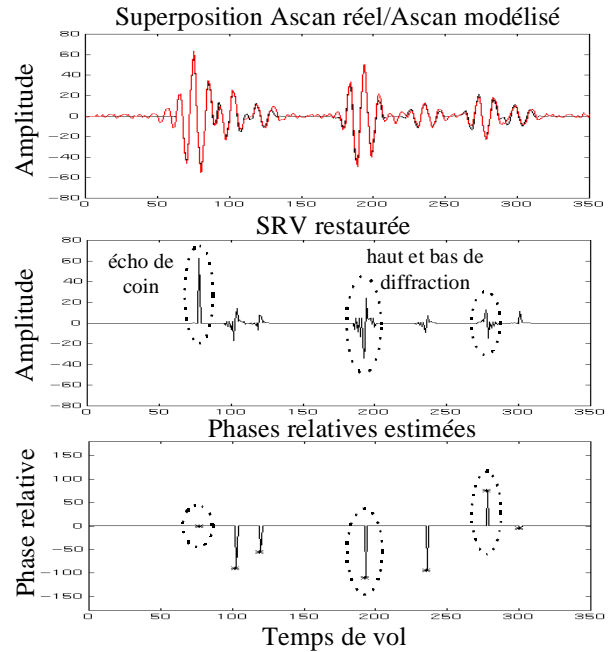


Figure 2.

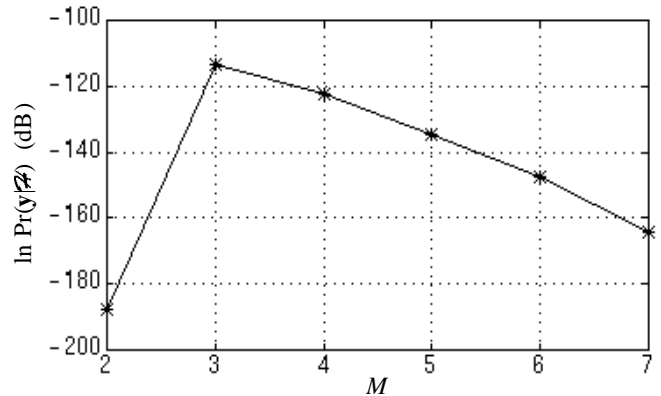


Figure 3.

