

# Décomposition en sous bandes pour la compression d'images sans perte par extension de la Transformation par Arrondi

Ho-Youl Jung et Rémy Prost

CREATIS, Unité de recherche CNRS (UMR 5515) affiliée à l'INSERM, INSA 502,  
69621, VILLEURBANNE, FRANCE  
E-mail: jung@creatis.insa-lyon.fr / remy.prost@creatis.insa-lyon.fr

## Résumé

Dans cet article, nous proposons une nouvelle approche utilisant la transformation par arrondi (rounding transform : RT) pour la compression sans perte par décomposition en sous-bandes. Dans ce but, nous définissons une extension de la RT, nommée ORT (overlapping RT). Celle-ci est définie dans le domaine de la transformée en Z, et est utilisée pour développer un système de codage en sous-bandes sans perte. L'idée principale de cette approche est de décomposer la matrice polyphase du banc de filtres d'analyse en plusieurs matrices de l'ORT. La méthode proposée est plus générale que les propositions antérieures car elle offre de multiples possibilités de mise en œuvre. Cinq bancs de filtres sont considérés à titre d'exemples et leurs performances sont comparées en terme d'entropie totale dans la compression d'images variées.

## Abstract

In this paper, a new approach is proposed, the rounding transform (RT) based lossless subband coding. For the such purpose, an extended version of RT, namely overlapping RT (ORT), is defined in Z-transform domain and used to develop a lossless subband coding system. The main idea is that the polyphase matrix of the analysis filter bank is decomposed into several ORT matrices of size  $2 \times 2$ . The proposed scheme can be considered as more general scheme than previous works because it allows various implementations. Five filter banks are taken as examples and their performances are compared in terms of total lossless first order entropy for compression of various images.

## I. Introduction

Plusieurs méthodes ont été proposées récemment pour réaliser la compression sans perte par décomposition en sous-bandes. Les transformations S+P (Sequential + Prediction transform) [1] et RTS (Reversible Two Six transform) [2] conduisent aux mêmes résultats que ceux d'un banc de filtres de Le Gall [3] modifié par combinaison de la transformation S (S transform) et de la prédiction. La méthode dite 'lifting' a été utilisée [4] pour la compression sans perte par décomposition en sous-bandes. Cette approche remplace la transformée en ondelettes par plusieurs étapes de lifting qui peuvent être interprétées par une cascade de prédictions réversibles. On peut remarquer ici que toutes les méthodes décrites précédemment utilisent la même opération d'arrondi (arrondi à l'entier inférieur) pour l'analyse et la synthèse.

Dans cet article, nous proposons l'utilisation de la transformation par arrondi (rounding transform :RT) pour la compression sans perte par décomposition en sous-bandes. La RT, introduite pour la première fois dans [5], est une transformation réversible qui emploie une paire d'opération d'arrondi, respectivement les opérations d'arrondi à l'entier inférieur et à l'entier supérieur dans la transformation directe et la transformation inverse. Elle s'est révélée efficace pour la compression sans perte des images dans une structure de pyramide à base de la moyenne pondérée (weighted average based lossless pyramid structured coding) [6]. Dans l'article présenté ici, nous définissons une extension de la RT dans le domaine de la transformée en Z, et nous l'utilisons pour

développer un système de codage en sous-bandes sans perte. Alors que la RT originale est représentée par un filtrage par blocs sans recouvrement, l'extension proposée est un filtrage usuel avec recouvrement (filtre à réponse impulsionnelle de durée finie (FIR)). Nous appelons cette nouvelle transformation 'overlapping-RT' (ORT). L'idée principale de la méthode proposée est de décomposer la matrice polyphase du banc de filtres d'analyse en plusieurs matrices ORT de taille  $2 \times 2$ .

Nous définissons l'ORT dans la section II, et nous introduisons trois types de matrices qui garantissent la réversibilité de l'ORT. Dans la section III, l'ORT est appliquée à la compression sans perte par décomposition en sous-bandes. Enfin, cet article se termine par des simulations, qui montrent l'intérêt de l'ORT, et par une conclusion.

## II. La transformation dite 'Overlapping Rounding Transform (ORT)'

Les opérations d'arrondi à l'entier inférieur et à l'entier supérieur de la série numérique spatiale  $\{\gamma(n)\} = [\gamma(0) \ \gamma(1) \ \dots \ \gamma(N-1)]$ , sont notées, dans le domaine de la transformée en Z, respectivement, par  $\lfloor \gamma(z) \rfloor_z$  et  $\lceil \gamma(z) \rceil_z$ . Elles peuvent s'écrire:

$$\lfloor \gamma(z) \rfloor_z = \lfloor \gamma(0) \rfloor + \dots + \lfloor \gamma(N-1) \rfloor z^{-(N-1)}$$

$$\lceil \gamma(z) \rceil_z = \lceil \gamma(0) \rceil + \dots + \lceil \gamma(N-1) \rceil z^{-(N-1)} \quad (1)$$

Les opérations d'arrondi dans le domaine-Z ont les propriétés évidentes suivantes :

$$\begin{aligned} \lfloor -\gamma(z) \rfloor_z &= -\lceil \gamma(z) \rceil_z, \lceil -\gamma(z) \rceil_z = -\lfloor \gamma(z) \rfloor_z \\ \lfloor X(z) + \gamma(z) \rfloor_z &= X(z) + \lfloor \gamma(z) \rfloor_z \\ \lceil X(z) + \gamma(z) \rceil_z &= X(z) + \lceil \gamma(z) \rceil_z \\ \lfloor X(z) - \gamma(z) \rfloor_z &= X(z) - \lceil \gamma(z) \rceil_z \\ \lceil X(z) - \gamma(z) \rceil_z &= X(z) - \lfloor \gamma(z) \rfloor_z \end{aligned} \quad (2)$$

où,  $\{x(n)\} \in \mathbf{Z}$  et  $\{\gamma(n)\} \in \mathbf{R}$ .

Par exemple, un système de filtres FIR suivi par l'opération d'arrondi à l'entier inférieur (Fig. 1) s'écrit sous la forme de la convolution dans le domaine spatial.

$$y(n) = \left\lfloor \sum_{l=0}^{L-1} x(l)\alpha(n-l) \right\rfloor \quad (3)$$

Elle peut être écrite dans le domaine Z par

$$Y(z) = \lfloor X(z)\alpha(z) \rfloor_z \quad (4)$$

En utilisant cette représentation, l'ORT et son inverse sont définies dans le domaine Z par

$$Y(z) = \lfloor W(z)X(z) \rfloor_z \quad (5)$$

$$X(z) = \lceil W(z)^{-1}Y(z) \rceil_z \quad (6)$$

où,  $W(z)$  est la matrice  $2 \times 2$  de l'ORT dont les éléments sont des fonctions transfert en Z à coefficients réels.

$X(z) = (X_1(z) \ X_2(z))^t$  est le vecteur d'entrée  $2 \times 1$  dont les composantes sont des séquences d'entiers ( $\{x_1(n)\}$ ,  $\{x_2(n)\} \in \mathbf{Z}$ ) et  $Y(z) = (Y_1(z) \ Y_2(z))^t$  est le vecteur de sortie.

Du fait de l'opération d'arrondi, l'ORT conduit toujours à des résultats entier, et sa réversibilité ne peut pas toujours être assurée. Il faut trouver la matrice particulière qui garantit la réversibilité. La réversibilité est obtenue par les trois types de matrices suivantes :

$$\begin{aligned} &Type-A) \\ &\begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha(z) + \beta(z) = z^{-q} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &Type-B) \\ &\begin{pmatrix} 1 & \alpha(z) \\ 1 & \beta(z) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \begin{aligned} \alpha(z) - \beta(z) &= z^{-q} \\ \alpha(z) - \beta(z) &= -z^{-q} \end{aligned} \end{aligned} \quad (8)$$

Type-C)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(z) & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

où,  $\{\alpha(n)\}$  et  $\{\beta(n)\}$  sont des filtres FIR à coefficients réels (c'est à dire non nécessairement entiers)  $\{\alpha(n)\}, \{\beta(n)\} \in \mathbf{R}$ .

Dans l'implémentation réelle,  $\{\alpha(n)\}$  et  $\{\beta(n)\}$  doivent être représentables en machine pour éviter les erreurs d'arrondi introduits par le nombre de bits limité de la machine. En utilisant les propriétés des opérations d'arrondi (Eq. (2)), la réversibilité de ces matrices peut être facilement prouvée. On notera que la réversibilité est aussi conservée lorsque deux lignes ou deux colonnes sont échangées.

### III. Décomposition en sous-bandes à base de l'ORT

Le schéma de décomposition et reconstruction à deux bandes est présenté sur la Fig. 2. Où,  $H_L(z)$  et  $H_H(z)$  sont, respectivement, des filtres passe-bas et passe-haut d'analyse.  $G_L(z)$  and  $G_H(z)$  sont ceux de synthèse. Pour simplifier la notation, nous supposons que les filtres sont à réponse impulsionnelle finie (FIR) et que leur longueur  $L$  est paire. La décomposition et la reconstruction peuvent être représentées sous la forme de filtres polyphase [7, 8]. La forme polyphase est donnée par la Fig. 3, en introduisant la matrice polyphase du banc de filtres d'analyse  $H_p(z)$  et celle du banc de filtres de synthèse  $G_p(z)$ . Les matrices polyphases peuvent être obtenues par la séparation de chaque filtre en deux parties : coefficients à puissance de  $z$  paire et impaire. Par exemple,  $H_p(z)$ ,

$$H_p(z) = \begin{pmatrix} H_{L\_even}(z) & H_{L\_odd}(z) \\ H_{H\_even}(z) & H_{H\_odd}(z) \end{pmatrix} \quad (10)$$

où,

$$\begin{aligned} H_{L\_even}(z) &= h_L(0) + h_L(2)z^{-1} + \dots + h_L(L-2)z^{-(L/2-1)} \\ H_{L\_odd}(z) &= h_L(1) + h_L(3)z^{-1} + \dots + h_L(L-1)z^{-(L/2-1)} \\ H_{H\_even}(z) &= h_H(0) + h_H(2)z^{-1} + \dots + h_H(L-2)z^{-(L/2-1)} \\ H_{H\_odd}(z) &= h_H(1) + h_H(3)z^{-1} + \dots + h_H(L-1)z^{-(L/2-1)} \end{aligned}$$

Pour une séquence d'entrée de longueur paire  $N$ ,  $X(z)$ , est décomposée sous la forme :

$$\begin{aligned} X_{even}(z) &= x(0) + x(2)z^{-1} + \dots + x(N-2)z^{-(N/2-1)} \\ X_{odd}(z) &= x(1) + x(3)z^{-1} + \dots + x(N-1)z^{-(N/2-1)} \end{aligned}$$

Si la condition  $G_p(z) = H_p^{-1}(z)$  est satisfaite et en l'absence d'erreur de quantification la reconstruction est parfaite. Pourtant, la quantification, c'est à dire l'opération d'arrondi, est inévitable pour le codage entropique, ainsi l'erreur de quantification empêche la reconstruction exacte.

Pour résoudre ce problème, nous proposons l'utilisation de l'ORT. Supposons que la matrice polyphase du banc de filtres d'analyse  $\mathbf{H}_p(z)$  soit décomposable en  $K$  matrices ORT  $\mathbf{W}(z)^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, K-1$ ),

$$\mathbf{H}_p(z) = \mathbf{W}(z)^{(K-1)} \dots \mathbf{W}(z)^{(1)} \mathbf{W}(z)^{(0)} \quad (11)$$

où, le nombre de matrices décomposées  $K$  dépend de la taille des filtres analyse et du type de matrice ORT.

On peut alors écrire les opérations de filtrage de l'analyse et de la synthèse sous la forme :

$$\begin{pmatrix} Y_L(z) \\ Y_H(z) \end{pmatrix} = \left[ \mathbf{W}(z)^{(K-1)} \left[ \dots \left[ \mathbf{W}(z)^{(1)} \left[ \mathbf{W}(z)^{(0)} \begin{pmatrix} X_{\text{even}}(z) \\ X_{\text{odd}}(z) \end{pmatrix} \right] \right] \right] \right] \Big|_z \Big|_z \Big|_z \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} X_{\text{even}}(z) \\ X_{\text{odd}}(z) \end{pmatrix} = \left[ \mathbf{W}(z)^{(0)-1} \left[ \mathbf{W}(z)^{(1)-1} \left[ \dots \left[ \mathbf{W}(z)^{(K-1)-1} \begin{pmatrix} Y_L(z) \\ Y_H(z) \end{pmatrix} \right] \right] \right] \right] \Big|_z \Big|_z \Big|_z \quad (13)$$

où,  $\mathbf{W}(z)^{(k)-1}$  est la matrice inverse de  $\mathbf{W}(z)^{(k)}$ . Notons que l'ordre des transformations inverses doit être l'inverse de celui des transformations directes. D'après les propriétés de la transformation par arrondi (RT), (13) permet toujours de recouvrer les données originales sans perte.

Malheureusement, tous les filtres d'analyse ne peuvent pas être représentés par multiplication de matrices ORT comme dans (11). On peut surmonter partiellement cette difficulté à l'aide d'une matrice de facteur d'échelle

$$\mathbf{H}'_p(z) = \mathbf{D} \mathbf{H}_p(z) \quad (14)$$

où,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_L & 0 \\ 0 & d_H \end{pmatrix}, \quad d_L \neq 0, d_H \neq 0$$

L'équation (12) est le cas où  $d_L = d_H = 1$  ( $\mathbf{D}$  est la matrice identité).

Considérons, par exemple, le banc de filtres d'analyse 4-4 (filtre passe-bas de longueur 4 et filtre passe-haut de longueur 4) de Le Gall [3].

$$\begin{aligned} H_L(z) &= -1/4 + 3/4 z^{-1} + 3/4 z^{-2} - 1/4 z^{-3} \\ H_H(z) &= 1/4 - 3/4 z^{-1} + 3/4 z^{-2} - 1/4 z^{-3} \end{aligned} \quad (15)$$

Sa matrice polyphase est donnée par

$$\mathbf{H}_p(z) = \begin{pmatrix} -1/4 + 3/4 z^{-1} & 3/4 - 1/4 z^{-1} \\ 1/4 + 3/4 z^{-1} & -3/4 - 1/4 z^{-1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Elle peut être décomposée sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 z^{-1} & 1/2 z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 + 1/2 z^{-1} & 1 \\ -1/2 + 1/2 z^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 + 1/2 z^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

La dernière décomposition est semblable à celle de la méthode lifting si l'on ne tient pas compte de l'opération d'arrondi. Ainsi l'utilisation de l'ORT en décomposition sous-bandes est plus générale que celle de la méthode lifting.

## V. Résultats de simulation

Dans la mise en œuvre de la méthode proposée nous avons choisi, à titre d'exemples, cinq bancs de filtres. L'un est celui qui est à la base de la transformation RT et les quatre autres sont des filtres de Le Gall [3] (Tableau 1). Ces bancs de filtres permettent la compression sans perte par l'ORT. Afin d'évaluer leur efficacité, ils sont appliqués à six images dont quatre sont des images médicales. Elles sont de taille  $512 \times 512$  pixels et elles sont codées sur 8 bits par pixel. Une pyramide de cinq niveaux est construite par itération de filtrages passe-bas.

Les performances des bancs de filtres utilisés sont comparées, pour la compression sans perte, par l'entropie totale du premier ordre résultant du codage entropique simultané de toutes les bandes (Tableau 2). Ce tableau montre que les bancs de filtres 2-6 et 5-3 conduisent à une entropie plus stable, pour des images variées, et plus faible que les autres bancs de filtres.

## IV. Conclusion

La décomposition de la matrice polyphase du banc de filtres d'analyse en transformations par arrondi étendues permet la compression sans perte par décomposition en sous bandes. Nous démontrons que cette proposition est plus générale que les propositions antérieures. De plus, le schéma de décomposition proposé offre de multiples possibilités de mise en œuvre. Cinq bancs de filtres sont comparés en terme d'entropie totale.

## Références

- [1] A. Said and W. A. Pearlman, "An Multiresolution Representation for Lossless and Lossy Compression," *IEEE Trans. On Image Processing*, Vol. 5, No. 9, pp.1303-1310, September 1996.

[2] A. Zandi, J. Allen, E. Schwartz, and M. Boliek, "CREW : Compression with Reversible Embedded Wavelets," *IEEE Data Compression Conference*, Snowbird, Utah USA, pp. 212-221, March 1995.

[3] D. Le Gall and A. Tabatabai, "Sub-band coding of digital images using symmetric short kernel filters and arithmetic coding techniques," *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Processing*, pp. 761-764, Avril 1988.

[4] A. R. Calderbank, Ingrid Dauberchies, Wim Sweldens, and Boon-Lock Yeo, "Wavelet Transforms That Map Integers to Integers," Preprint 1996.  
<http://cm.bell-labs.com/who/papers/integer.ps.gz>

[5] H. Y. Jung, T. Y. Choi, and R. Prost, "Rounding Transform for Lossless Image Coding," *IEEE ICIP-96*, Lausanne Switzerland, Vol. 1, pp. 65-68, September 1996.

[6] H. Y. Jung, T. Y. Choi, and R. Prost, "Rounding Transform and Its Application For Pyramid Structured Coding," *IEEE Trans. on Image Processing*, in press.

[7] M. Vetterli, "Multirate Filter Banks for Subband Coding" *Subband Image Coding* edited by J. W. Woods, Kluwer Academic Publishers, M.A. USA., pp. 43-100, 1991.

[8] A. N. Akansu and R. A. Haddad, *Multiresolution Signal Decomposition Transforms Subbands Wavelets*, Academic Press, Inc. CA. USA., 1992.

Images	Org.	2, 2	4, 4	2, 6	6, 2	5, 3
Sy000	7.846	6.050	5.733	5.737	5.948	<u>5.665</u>
Lena	7.594	5.111	5.001	4.829	5.065	<u>4.779</u>
Mamo.	7.577	3.735	3.566	3.375	3.708	<u>3.364</u>
Angio.	6.857	4.158	4.176	3.934	4.148	<u>3.870</u>
X-ray	6.667	2.794	2.774	<u>2.513</u>	2.925	2.552
M.R.I.	5.125	3.425	2.938	<u>2.837</u>	3.448	2.881

Tableau 2. Entropie totale d' images comprimés sans perte. Toutes les pyramides sont construites à cinq niveaux.

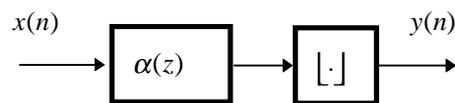


Fig. 1 Système du filtrage FIR suivi par l'opération d'arrondi.

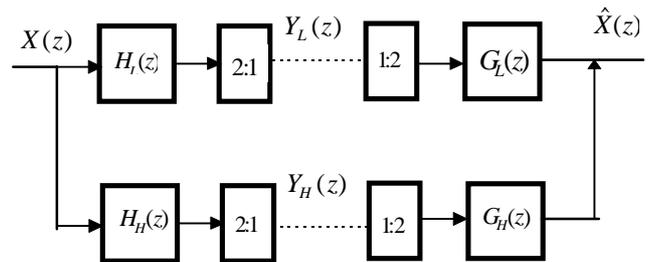


Fig. 2 Schéma usuel de décomposition/reconstruction à deux bandes.

Bancs de filtres	Coefficients des filtres
2-taps,	$H_L(z) = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} z^{-1}$
2-taps	$H_H(z) = 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} z^{-1}$
4-taps,	$H_L(z) = -1/4 + 3/4 z^{-1} + 3/4 z^{-2} - 1/4 z^{-3}$
4-taps	$H_H(z) = 1/4 - 3/4 z^{-1} + 3/4 z^{-2} - 1/4 z^{-3}$
2-taps,	$H_L(z) = 1/2 + 1/2 z^{-1}$
6-taps	$H_H(z) = 1/8 + 1/8 z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} - 1/8 z^{-4} - 1/8 z^{-5}$
6-taps,	$H_L(z) = 1/8 - 1/8 z^{-1} + 1/2 z^{-2} + 1/2 z^{-3} - 1/8 z^{-4} + 1/8 z^{-5}$
2-taps	$H_H(z) = 1 - z^{-1}$
5-taps,	$H_L(z) = -1/8 + 2/8 z^{-1} + 6/8 z^{-2} + 2/8 z^{-3} - 1/8 z^{-4}$
3-taps	$H_H(z) = -1/2 + z^{-1} - 1/2 z^{-2}$

Tableau 1. Cinq bancs de filtres d'analyse pour l'ORT.

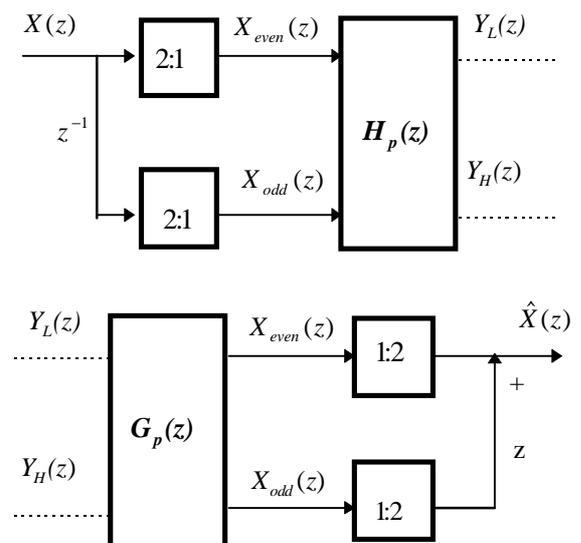


Fig. 3 Schéma de décomposition/reconstruction à deux bandes sous la forme polyphase.