

# Analyse bispectrale du champ de vorticité d'un écoulement turbulent

C. Baudet, O. Michel, et J.M.Friedt

Laboratoire de Physique, URA 1325-CNRS  
Ecole Normale Supérieure de LYON,  
46 allée d'Italie,  
69364 LYON Cedex 07, France

## Résumé

Cette étude présente une mise en évidence expérimentale des couplages quadratiques et de la cascade d'énergie dans un écoulement de jet turbulent, à l'aide de l'analyse bispectrale de signaux de diffusion acoustique. La nature de ces derniers, liés à la répartition spatiale du champ de vorticité, ainsi que le calcul de la bicohérence exprimée dans l'espace de Fourier à quatre dimensions (x,y,z,t), sur des signaux analytiques, constituent l'originalité de cette étude. Cette approche permet de mettre en évidence *expérimentalement* le transfert d'énergie entre différents vecteurs d'onde d'un écoulement turbulent.

## Abstract

Quadratic coupling between the Fourier modes of the vorticity field in a turbulent hydrodynamic jet flow is analysed and demonstrated by using bispectral analysis of ultrasonic backscattered signals. The computation of the bicoherence function is performed in both the spatial and time domain, from a set of analytic signals records, and the space-time phase coupling condition is expressed and illustrated on experimental data. Energy transfers between different scales of a turbulent jet flow is thus experimentally evidenced.

## 1 Introduction

Dans un écoulement turbulent, l'énergie mécanique est injectée aux grandes échelles (  chelle intégrale  $L$ ) par les processus d'instabilités qui s'y développent. Cette énergie est ensuite transférée vers les échelles inférieures par couplage non-linéaire, jusqu'aux échelles dites de dissipation, pour lesquelles la diffusion visqueuse devient prépondérante (conversion de l'énergie mécanique en chaleur). Le rapport entre les effets convectifs (non-linéaires) et diffusifs (viscosité) est décrit par le nombre de Reynolds  $Re = \frac{vL}{\nu}$ , où  $v$  est la vitesse à l'échelle intégrale  $L$ , et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. L'évolution de l'écoulement turbulent est régie à tout instant par l'équation de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v}$$

Dans la limite des grands nombres de Reynolds ( $Re > 10^5$ ), les propriétés statistiques de l'écoulement sont décrites de façon universelle par la théorie de Kolmogorov [4]. En particulier, on peut mettre en évidence une gamme de vecteurs d'ondes (zone inertielle) sur laquelle l'écoulement peut être décrit par des lois d'échelles (notamment, la densité spectrale de puissance s'exprime selon une loi en  $k^{-\frac{5}{3}}$ ). Un paramètre fondamental dans cette description de l'écoulement est alors le taux de transfert d'énergie  $\varepsilon$  entre les échelles. L'ensemble des mécanismes connus, de transfert d'énergie entre les échelles fait appel à la dynamique du champ de vorticité  $\vec{\Omega} = r \vec{\omega} t \vec{v}$ , via des

phénomènes d'étirement et/ou de repliement des lignes de vorticité, sous l'action des gradients de vitesse locaux.

L'origine non-linéaire quadratique (terme en  $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ ) du transfert d'énergie  $\varepsilon$  doit naturellement se traduire par l'existence de valeurs importantes de bicohérence entre échelles. Dans le paragraphe 2, les équations de diffusion acoustique du son par le champ de vorticité sont rappelées. La mise en oeuvre expérimentale sur un jet turbulent, ainsi que les principales caractéristiques des signaux de diffusion enregistrés, sont discutées dans la section 3. Enfin, les conditions de résonance en temps et espace, ainsi que les résultats d'analyse bispectrale font l'objet de la dernière section.

## 2 Diffusion acoustique par la vorticité

On montre [2] que le rapport de la pression acoustique diffusée  $P_{diff}$  par le champ de vorticité  $\vec{\Omega}(\vec{x}, t)$ , à la pression acoustique incidente  $P_{inc}$ , est directement proportionnel à la transformée de Fourier spatio-temporelle du champ de vorticité  $\vec{\Omega}(\vec{q}_{diff}, \nu)$ :

$$\frac{P_{diff}(\nu)}{P_{inc}} = \pi^2 i \frac{-\cos(\theta_d)}{1 - \cos(\theta_d)} \frac{\nu e^{i\nu D/c}}{c^2 D} (\vec{n} \wedge \vec{r}) \vec{\Omega}(\vec{q}_{diff}, \nu - \nu_o) \quad (1)$$

où

$$\vec{q}_{diff} = \frac{2\pi}{c} (\nu \vec{r} - \nu_o \vec{n})$$

$\vec{r}, \vec{n}$  sont respectivement les vecteurs unitaires (cf figure 1) selon les directions de propagation des ondes diffusées (fréquence  $\nu \simeq \nu_0$ ) et incidentes (fréquence  $\nu_0$ ).

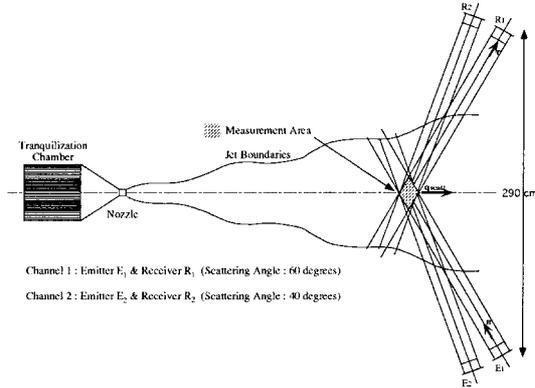


Figure 1: schéma de principe expérimental

Dans le cas où le nombre de Mach de l'écoulement est faible, on peut établir que  $\nu \simeq \nu_0$  d'où l'approximation

$$q_{diff} \simeq \frac{4\pi\nu_0}{c} \sin\left(\frac{\theta_s}{2}\right)$$

Il est important de noter ici que la mesure de pression acoustique diffusée par le champ de vorticité s'exprime en fonction de la valeur de la transformée de Fourier spatiale de ce dernier à un vecteur d'onde (défini vectoriellement); par ailleurs la direction de  $\vec{q}_{diff}$  ne dépend que des positions relatives des transducteurs; son module est fonction de l'angle de diffusion et de la fréquence de l'onde sonore incidente (et peut par conséquent être varié continuellement).

### 3 Acquisition des signaux de diffusion

Les signaux acoustiques incidents et diffusés sont émis et détectés respectivement, à l'aide de transducteurs électro-acoustiques large bande de type Sell de grandes dimensions (15x15cm) devant la longueur d'onde acoustique (analyse en ondes planes). Le changement de fréquence introduit par l'écoulement (effet Doppler, cf (1)) conduit à un faible élargissement spectral de l'onde détectée, autour de la fréquence  $\nu_0 \simeq 40kHz$  de l'onde incidente. Les images en phase et quadrature du signal de diffusion h  t  rodyn   (    $\nu_0$ , donc ramené autour de la fréquence nulle) nous donnent accès à un signal analytique basse fréquence, échantillonné puis enregistré. La phase de ce signal analytique est l'image de la phase relative de l'onde diffusée par rapport à celle de l'onde incidente.

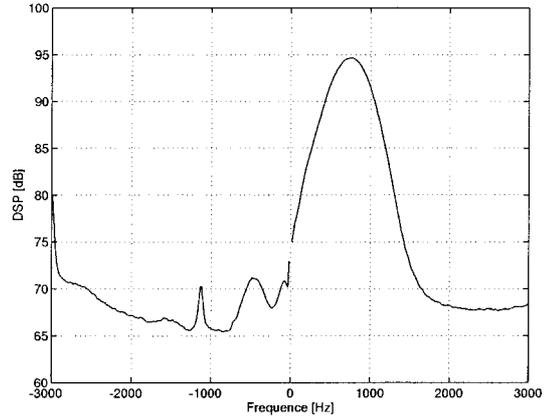


Figure 2: Spectre du signal analytique basse fréquence, associé au signal de pression acoustique de diffusion

L'asymétrie du spectre du signal de diffusion résulte de l'existence de la vitesse d'advection du champ de vorticité par l'écoulement moyen, dans l'axe du jet, et conduit à un décalage de fréquence par effet Doppler:

$$\delta\nu = \frac{1}{2\pi} \vec{q}_s \cdot \langle \vec{v} \rangle$$

L'utilisation de multiples couples de transducteurs définissant le même volume d'observation, permet l'analyse synchrone de la distribution spatiale du champ de vorticité à plusieurs vecteurs d'onde. Cette possibilité est à la base de l'analyse bispectrale, présentée au paragraphe suivant.

### 4 Bispectre et Bicohérence

L'étude de la bicohérence d'une série temporelle est largement documentée [3, 5, 1, 7]. Il importe de souligner à nouveau que l'on ne dispose pas ici d'une série temporelle unique large-bande, mais de trois séries analytiques à spectre étroit, associées à trois vecteurs d'onde spatiaux (définis en direction et module, cf paragraphe 2). La nature analytique de ces signaux, et leur existence sur trois canaux différents, conduit à perdre toutes les symétries (ordre 6) habituellement rencontrées dans l'analyse bispectrale d'une série temporelle [5]. L'analyse bispectrale d'une série temporelle a pour objet de tester la contribution des raies spectrales aux pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  à l'énergie mesurée à la pulsation  $\omega_1 + \omega_2$ . Dans le cas présenté d'analyse de champs spatio-temporels, cela s'exprime par la double condition de résonance

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\vec{q}_3 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$$

Afin de rendre l'étude indépendante de l'énergie présente à une échelle particulière, et de ne garder que la mise en évidence de l'existence de couplage quadratique, on s'intéresse plus spécifiquement à la bicohérence des signaux de diffusion, comprise entre 0 et 1:

$$C_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}(\omega_1, \omega_2) = \frac{|E(X_{\vec{q}_1}(\omega_1)X_{\vec{q}_2}(\omega_2)X_{\vec{q}_3}^*(\omega_3))|}{(E(|X_{\vec{q}_1}(\omega_1)X_{\vec{q}_2}(\omega_2)|^2)E(|X_{\vec{q}_3}(\omega_3)|^2))^{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

où  $X_{\vec{q}_i}(\omega_i) = \tilde{\Omega}(\vec{q}_i, \nu_i - \nu_{0i})$ , est défini par les paramètres de mesure sur chaque voie  $i$ ,  $E$  représente l'espérance mathématique, et  $*$  la conjugaison complexe. (2) est directement estimée par

$$\hat{C}_{\vec{q}_1, \vec{q}_2}^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{|\sum X_{\vec{q}_1, k}(\omega_1) X_{\vec{q}_2, k}(\omega_2) X_{\vec{q}_3, k}^*(\omega_3)|^2}{\sum |X_{\vec{q}_1, k}(\omega_1) X_{\vec{q}_2, k}(\omega_2)|^2 \sum |X_{\vec{q}_3, k}(\omega_3)|^2} \quad (3)$$

où les sommations sont effectuées pour ( $k = 1, \dots, K$ ),  $k$  étant l'indice du segment temporel sur lequel la quantité  $X_{\vec{q}_i, k}(\omega_i)$  est estimée.

Dans le cadre des expériences présentées, deux canaux d'acquisition sont utilisés (cf figure (1)), et accordés pour réaliser la condition de résonance spatiale :

$$\vec{q}_1 = \vec{q}_2 = \vec{q}_0, \vec{q}_3 = 2\vec{q}_0$$

S'il est *a priori* possible d'utiliser un seul canal pour plusieurs fréquences d'analyse, l'utilisation de canaux différents permet de s'affranchir des non-linéarités de fonctionnement des couples émetteurs-récepteurs. En effet la condition d'accord précédente s'écrit :

$$2\nu_1 \sin\left(\frac{\theta_{1,s}}{2}\right) = \nu_3 \sin\left(\frac{\theta_{3,s}}{2}\right)$$

Les signaux complexes hétérodynés sont échantillonnés à 8192 Hz. La bicohérence est estimée à partir du calcul du bispectre complexe évalué sur des segments de 256 points, pour une fenêtre de Hanning. 128 segments sont utilisés pour chaque expérience. La moyenne des bicohérences obtenues sur 16 expériences indépendantes est présentée en figure (3).

Les faibles valeurs obtenues traduisent deux caractères importants de ces expériences : les transferts d'énergie entre échelles d'un écoulement turbulent sont très intermittents, comme le sont les structures de vorticités à l'origine de ces transferts (ref. [8]). D'autre part, la localisation spatiale très limitée de ces structures, ainsi que les effets de diffraction induits par la taille finie des transducteurs, conduisent à des fluctuations importantes de la phase et de la position des pics du bispectre, et donc de la bicohérence. Les figures (4-a,b) illustrent ce dernier point. Quoique faibles, les valeurs obtenues sont significatives, car largement supérieures aux valeurs de bicohérence observées sur des signaux dérivés des premiers, ayant même densité spectrale de puissance mais de nature aléatoire ('randomisation' de la phase des transformées de Fourier). Ceci est illustré sur la figure (5). La figure (6) détaille la bicohérence précédente; seules les valeurs supérieures au biais estimé de la bicohérence sont représentées. Le biais est obtenu à partir de la moyenne de bicohérence calculée pour les signaux aléatoires précédents (voir [1]).

## 5 Conclusion

Pour caractériser les transferts d'énergie entre échelles d'un écoulement turbulent, l'analyse bispectrale de signaux de diffusion acoustique apparaît très intéressante.

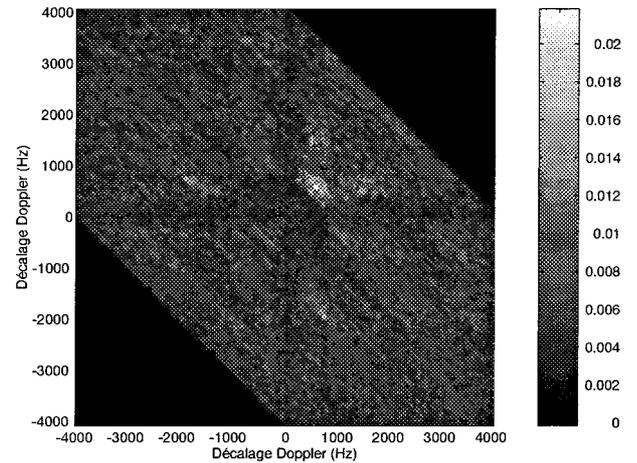


Figure 3: Bicohérence du champ de vorticités spatio-temporel, pour  $\vec{q}_1 = \vec{q}_2 = \vec{q}_0, \vec{q}_3 = 2\vec{q}_0$ . Les axes sont gradués en Hz.

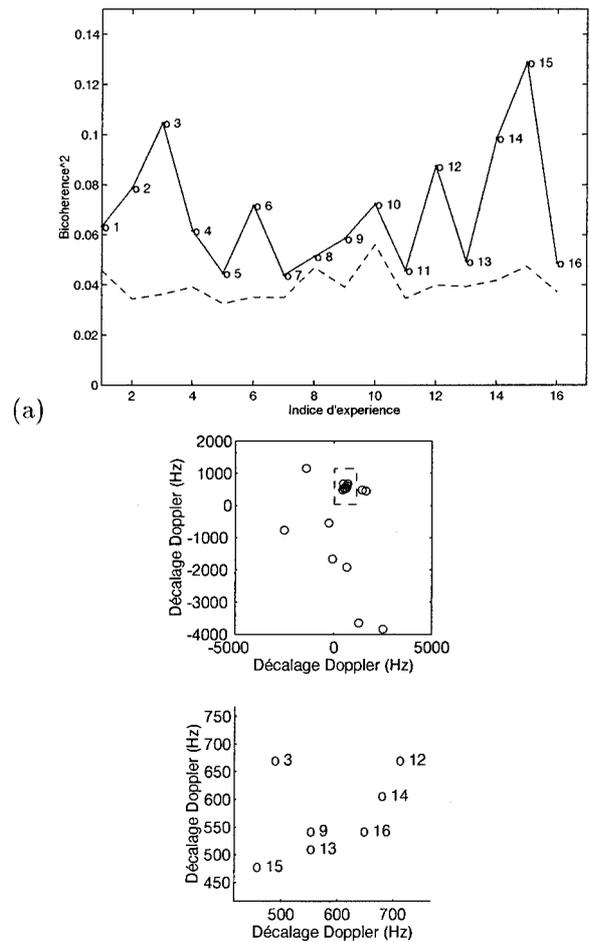


Figure 4: (a) Fluctuation des valeurs maximales de bicohérence, pour 16 expériences indépendantes, sur une même session. (b) Fluctuation de la position du maximum dans le plan bi-fréquence. La dernière figure montre le détail de répartition pour les points s'agréant autour du max. de la moyenne.

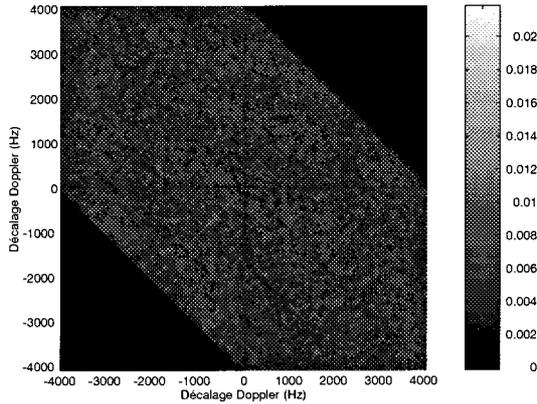


Figure 5: Bicoherence calculée pour les séries aléatoires ayant mêmes caractéristiques spectrales que les signaux originaux.

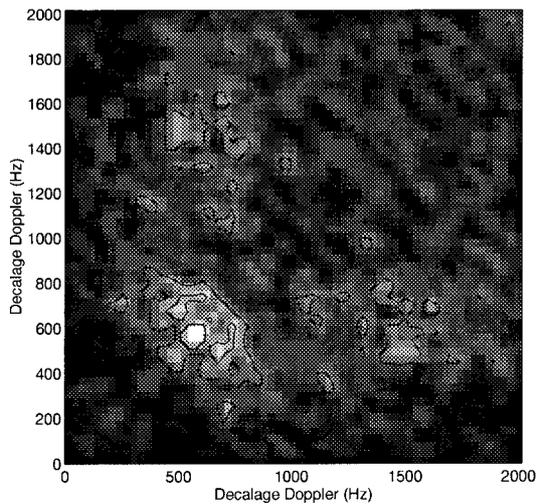


Figure 6: Détail de la figure (3; seules les valeurs supérieures au biais estimé de la bicoherence sont représentées.

Cependant, les fluctuations de phase du bispectre dans le cas de signaux analytiques associés à des canaux multiples d'une part, et les effets de diffraction couplés à la localisation spatio-temporelles des structures à l'origine de ces échanges d'autre part, réduisent la validité de l'hypothèse de stationnarité des signaux. Si cette analyse peut être performante, la définition des temps d'observation pour l'estimation de la bicoherence est critique. Cependant, la validité de l'approche présentée est assurée, et permettra d'estimer la statistique des transferts d'énergie par couplage quadratique pour tout triplet d'échelles spatiales.

## Références

- [1] D.Grésillon, M.S.Mohamed-Benkadda : " Direct mode-mode coupling observation in the fluctuations of nonstationary transparent fluid", *Phys. Fluids* 31 (7), pp.1904-1909, July 1988.
- [2] F. Lund, C.Rojas : "Ultrasound as a Probe of Turbulence", *Physica D* 37, 1989.
- [3] Y.C.Kim, E.J.Powers : "Digital Bispectral Analysis and Its Applications to Nonlinear Wave Interactions", *IEEE trans. on Plasma Sciences*, PS-7, No.2, pp.120-131, June 1979.
- [4] A.N. Kolmogorov : "The local structures of turbulence in incompressible viscous fluids at large Reynolds numbers", *Dokl. Nauk. SSSR* 30, pp.301-305, 1941.
- [5] C.L.Nikias, M.R.Raghuveer : "Bispectrum Estimation, a Digital Signal Processing Framework", *Proc. of IEEE*, vol.75, No.7, pp.869-891, 1987.
- [6] G.Seibert, S.Elgar : "Statistics of bicoherence and biphas", in *proc. of SP workshop on HOS*, Vail-Colorado, USA, pp.223-228, June 1989.
- [7] C.W. Van Atta : "Inertial range bispectra in turbulence", *Phys. Fluids* 22 (8), pp.1440-1442, August 1979.
- [8] C.Baudet, O.Michel, W.J.Williams : "Acoustic scattering and time-frequency analysis for probing turbulent flows", soumis à *J.A.S.A.*, 1997.