

Propriétés des processus H-ARMA

David Declercq et Patrick Duvaut

ENSEA-ETIS 6, avenue du PONCEAU 95014 CERGY-PONTOISE

Mail : declercq@ensea.fr

RÉSUMÉ

Nous introduisons une nouvelle classe de modèles non gaussiens appelés H-ARMA qui sont obtenus par filtrage non linéaire d'une entrée gaussienne colorée. La structure non linéaire constituée de polynômes d'Hermite permet non seulement de couvrir une large plage de comportements non gaussiens, mais surtout d'obtenir des résultats analytiques sur les comportements probabilistes et statistiques des modèles H-ARMA. Ces résultats théoriques sont une bonne base pour l'étude complète de ces modèles et en particulier leur identification.

ABSTRACT

We introduce a new class of nongaussian models called H-ARMA which are obtained by a nonlinear filtering of a correlated gaussian input. The nonlinearity is of Hermite polynomial type and allows, on one hand, to cover a lot of nongaussian behaviours and, on the other hand, to obtain explicit forms for the cumulants, high-order correlations and the nonasymptotic variance of their estimators. This work is a good start for further developments of these models, and especially their identification.

1 Introduction

Nous présentons ici une nouvelle classe de modèles de processus non gaussiens obtenus par filtrage polynômial de type Hermite. Celle-ci est un cas particulier d'une approche comportant trois grandes classes de modèles : (i) le filtrage linéaire de processus non gaussiens (FL-NG), (ii) le filtrage non linéaire de processus gaussiens (FNL-G) et (iii) le filtrage non linéaire de processus non gaussiens (FNL-NG). Le FL-NG a été très largement étudié [1][2], mais présente une restriction majeure. En effet, le filtre linéaire doit avoir une réponse impulsionnelle suffisamment courte pour ne pas "gaussianiser" le processus de sortie, cet effet s'expliquant aisément par le théorème limite central. La procédure la plus générale du FNL-NG [3] reste très difficile à traiter analytiquement, et nous nous sommes focalisé sur le FNL-G. Le processus gaussien d'entrée est un bruit blanc stationnaire que l'on passe dans un filtre ARMA pour introduire de la coloration. Le choix du filtre non linéaire semble extrêmement important et décisif dans l'optique d'une bonne modélisation. Une non linéarité polynômiale permet d'une part la détermination de résultats analytiques utilisables et d'autre part de couvrir un large éventail de comportements non-linéaires. Nous avons étudié dans un premier temps le cas simple d'une quadrature [4], et les résultats obtenus nous ont permis de choisir une extension polynômiale pertinente : le filtrage non linéaire que nous proposons est un polynôme d'Hermite de degré quelconque que nous appellerons "filtrage d'Hermite" et le modèle de processus non gaussien qui en découle sera appelé H-ARMA.

Nous ne présentons dans cet article que le problème direct de l'analyse des propriétés de ces processus, phase préliminaire nécessaire avant d'aborder l'étape de modélisation proprement dite. La section 2 décrit rapidement la classe des modèles H-ARMA. Nous donnons dans la section 3 quelques propriétés concernant la distribution statistique des processus

H-ARMA et la section 4 contient leurs propriétés corrélatoires. Enfin, la question de l'estimation des grandeurs corrélatoires des processus H-ARMA est discutée dans la section 5. En particulier, nous donnons l'expression de la variance d'estimation *non asymptotique* de la corrélation et de la bicorrélation pour un filtrage d'Hermite donné.

2 Construction du modèle

Le principe de génération des processus H-ARMA est décrit sur la figure 1. Dans une première étape de caractérisa-

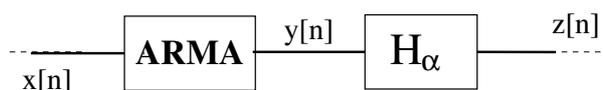


FIG. 1 — Génération des signaux H-ARMA

tion, nous nous contenterons d'étudier des non linéarités ne comportant qu'un seul polynôme. Bien sûr, en vue d'une modélisation, la partie filtrage non linéaire sera une combinaison linéaire de polynômes d'Hermite, celle-ci dictant le comportement statistique du modèle (distribution), l'aspect corrélatoire étant assuré par la partie ARMA. Le principal avantage de ce type de modèles est que les propriétés intrinsèques du processus H-ARMA (polycorrélations, variances d'estimations ...) s'expriment analytiquement en fonction de la séquence d'autocorrélation du signal gaussien $y[n]$ comme on le verra dans la section 4.

Remarque

Afin de conserver des expressions facilement utilisables sur le plan analytique lorsque l'on calcule des espérances de produits de polynômes d'Hermite, le processus aléatoire $y[n]$ doit

être normalisé. S'il est clair que le filtrage linéaire va conserver la nullité de la moyenne, on doit nécessairement adapter le gain du filtre ARMA, et ce afin de s'assurer la variance unité en sortie pour $y[n]$. Ce gain est facilement calculable à partir des coefficients AR et MA du filtre considéré. ■

3 Propriétés statistiques

On ne s'attache dans ce paragraphe qu'à la partie filtrage non linéaire sans se soucier de la coloration des processus (on travaille en statique). Soit $x[n]$ un bruit blanc gaussien, on s'intéresse donc au comportement de $H_\alpha(x[n])$ en termes de distribution.

Si les densités de probabilité de sortie peuvent être théoriquement calculées puisque l'on connaît la forme de la transformation non linéaire appliquée à la variable gaussienne $x[n]$, il est évident que dès que le degré du polynôme croît, ce calcul devient très vite fastidieux. En particulier, on aurait besoin des valeurs théoriques des racines de l'équation $H_\alpha(x) = a$, valeurs difficilement (sinon impossibles analytiquement) à obtenir. On peut en première approximation donner les cumulants statiques jusqu'à l'ordre 4 des processus H -ARMA, ceux-ci étant obtenus en utilisant les propriétés remarquables des polynômes d'Hermite de variables aléatoires gaussiennes [5][6] :

$$\kappa_1 = E[H_\alpha(x)] = 0 \quad (1)$$

$$\kappa_2 = E[H_\alpha^2(x)] = \alpha! \quad (2)$$

$$\kappa_3 = E[H_\alpha^3(x)] = \begin{cases} \left(\frac{\alpha!}{(\frac{\alpha}{2})!}\right)^3 & \text{si } \alpha \text{ pair} \\ 0 & \text{si } \alpha \text{ impair} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \kappa_4 &= E[H_\alpha^4(x)] - 3(E[H_\alpha^2(x)])^2 \\ &= (\alpha!)^2 \left(\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k}^2 \binom{2k}{k} - 3 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

On peut remarquer par exemple que les processus H -ARMA sont toujours sur-gaussiens (à décroissance lente). Ces cumulants, ainsi que ceux d'ordre plus élevés, peuvent par exemple conduire à une approximation de la densité des processus H -ARMA par un développement d'Edgeworth. L'étude des aspects probabilistes qui seront utiles pour l'identification de nos modèles est très importante et est en cours.

4 Propriétés corrélatoires

4.1 Corrélation

Connaissant $\Gamma[n]$ la séquence corrélatoire du processus ARMA gaussien $y[n]$, on peut donner l'expression de la fonction de corrélation $\gamma_2[n]$ d'un processus H -ARMA. Le développement bilinéaire en séries de polynômes d'Hermite connu sous le nom de *formule de Mehler* conduit au résultat suivant : x et y étant deux variables gaussiennes de coefficient de corrélation ρ

$$E[H_m(x)H_n(y)] = n! \rho^n \delta(m-n) \quad (5)$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\gamma_2[n] = E[H_\alpha(x(t))H_\alpha(x(t+n))] = \alpha! (\Gamma[n])^\alpha \quad (6)$$

A titre d'exemple, on donne sur la figure 2 les formes théoriques de la corrélation d'un processus H_2 -ARMA et deux types de filtrage AR :

$$\begin{cases} H_2\text{-AR}_1 \rightarrow a = 0.9 \\ H_2\text{-AR}_2 \rightarrow r = 0.9 \quad v = \pm 0.075 \end{cases}$$

a étant le pôle du filtre AR_1 et (r, v) sont le module et la phase réduite des deux pôles complexes conjugués du filtre AR_2 .

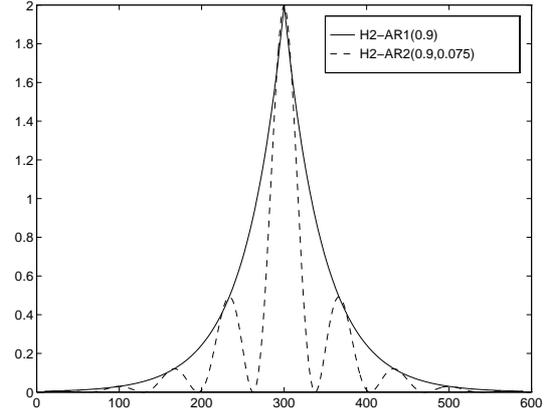


FIG. 2 — Corrélations d'un H_2 -AR₁ et d'un H_2 -AR₂

4.2 Bicorrélation

On peut trouver des extensions de la formule (5) qui donnent des développements multilinéaires en séries d'Hermite. Une formule générale bien adaptée aux statistiques et au traitement du signal est connue sous le nom de *formule de Kibble-Slepian* [7][8] et permet d'écrire l'espérance mathématique d'un produit de polynômes d'Hermite de variables gaussiennes corrélées entre elles en fonction des intercorrélations. Nous ne présentons pas cette formule en raison du manque de place, néanmoins celle-ci conduit au résultat suivant concernant la bicorrélation d'un processus H -ARMA :

$$\begin{aligned} \gamma_3[n] &= E[H_\alpha(x(t))H_\alpha(x(t+m))H_\alpha(x(t+n))] \\ &= \frac{(\alpha!)^3}{(\frac{\alpha}{2})^3} (\Gamma[m]\Gamma[n]\Gamma[m-n])^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (7)$$

quel que soit α pair, la bicorrélation étant nulle pour α impair. La figure 3 représente la bicorrélation théorique d'un H_4 -AR₁ de pôle $a=0.9$

4.3 Tricorrélation

La formule de Kibble-Slepian évoquée ci-dessus permet également de donner l'expression de la tricorrélation d'un processus H -ARMA ; néanmoins, les expressions obtenues deviennent difficiles à exposer en raison du nombre de termes qu'elles comportent. Par exemple, l'expression de la tricorrélation d'un H_3 -ARMA comporte 13 termes qui s'écrivent comme produits de la fonction de corrélation $\Gamma[n]$ aux temps

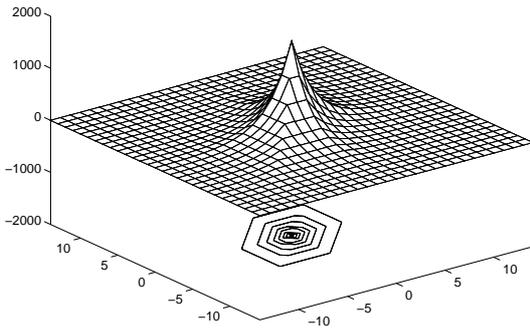


FIG. 3 — Bicorrélation théorique d'un H_4-AR_1 : $a=0.9$

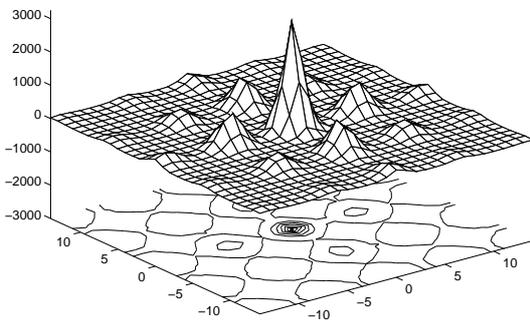


FIG. 4 — Tricorrélation théorique d'un H_3-AR_2 dans le plan $p = m + n$: ($r = 0.95$, $v = 0.075$)

$\{m, n, p, n - m, p - m, p - n\}$. On peut toutefois tracer sur la figure 4 la tricorrélation d'un H_3-AR_2 dans le plan principal tricorrélateur $p = m + n$ (cf. [4]) pour deux pôles complexes conjugués de module et de phase réduite (0.95, 0.075).

5 Estimation des polycorrélations

La mise en place d'estimateurs non paramétriques des polycorrélations nécessite d'étudier leurs performances en termes de biais et de variance normalisés

$$\mathcal{B}_i = \frac{E[\hat{\gamma}_i]}{\gamma_i} - 1 \quad (8)$$

$$\mathcal{V}_i = \frac{E[\hat{\gamma}_i^2] - E[\hat{\gamma}_i]^2}{\gamma_i^2} \quad (9)$$

avec $i \in \{2, 3, 4, \dots\}$ désigne l'ordre de la corrélation considérée.

Si l'on utilise des estimateurs empiriques non biaisés, le biais normalisé devient donc théoriquement nul et l'on s'intéresse alors uniquement à la variance des estimateurs. Des formes asymptotiques des variances d'estimation des polycorrélations ont déjà été proposées [9][10], mais la forme spécifique de notre modèle nous permet de calculer la variance *exacte* (non asymptotique) d'estimation. A titre d'exemple, nous nous plaçons dans le cas particulier d'un filtrage d'Hermite d'ordre

4 et nous donnerons que les expressions des variances à l'origine pour la corrélation et la bicorrélation.

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_2[0] = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} H_4^2(y[t]) \\ \hat{\gamma}_3[0, 0] = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} H_4^3(y[t]) \end{cases}$$

Nous choisisons de plus de considérer le processus $y[n]$ normalisé, ce qui n'est en rien réducteur. Dans ces conditions, on obtient en utilisant les formules de Mehler et de Kibble-Slepian les expressions théoriques de la variance d'estimation normalisée de la corrélation (10) et de la bicorrélation (11). Un rapide coup d'oeil à ces résultats permet de préciser que pour conserver la même précision d'estimation, il faut considérer à peu près 30 fois plus de points pour la bicorrélation que pour la corrélation (pour les processus H_4-ARMA). Afin de vérifier l'exactitude des variances théoriques obtenues, nous avons effectué une étude du type Monte-Carlo. Ceci avait déjà été effectué pour un polynôme d'Hermite de degré 2 [4]. Nous avons donc considéré 2048 réalisations de processus H_4-AR pour diverses tailles N d'échantillon, et estimé empiriquement les espérances des expressions (8) et (9), les valeurs théoriques à l'origine valant $\gamma_2[0] = 24$ et $\gamma_3[0] = 1728$. Nous avons également introduit une *borne inférieure théorique* de la variance d'estimation, celle-ci correspondant au cas où le processus $y[n]$ est blanc. Cela nous donne pour la corrélation et la bicorrélation

$$B_2^{inf}[0] = \frac{638}{N} \quad B_3^{inf}[0, 0] = \frac{20669}{N}$$

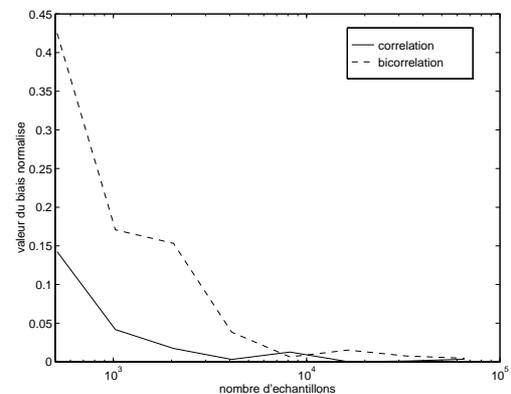


FIG. 5 — Biais d'estimation de la corrélation et de la bicorrélation d'un $H_4-AR1(0.8)$

La figure 5 donne le biais d'estimation de la corrélation (en trait plein) et de la bicorrélation (en pointillés) d'un processus $H_4-AR1(0.8)$. Les figures 6 et 7 tracent respectivement pour la corrélation et la bicorrélation d'un processus $H_4-AR1(0.8)$ les courbes suivantes : la borne inférieure de la variance d'estimation (en gras), sa vraie valeur (en trait plein) ainsi que deux réalisations de la méthode de Monte-Carlo décrite ci-dessus (on a pris chaque fois 2048 réalisations des processus). En ce qui concerne la bicorrélation des processus H_4-ARMA , on remarque qu'en deçà de 3000 points, le biais et la variance d'estimation empirique ne sont pas estimés avec précision

$$\mathcal{V}_2[0] = \frac{638}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) (140\Gamma^8[i] + 640\Gamma^6[i] + 432\Gamma^4[i] + 64\Gamma^2[i]) \quad (10)$$

$$\mathcal{V}_3[0] = \frac{20669}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \left(\frac{1925}{6}\Gamma^{12}[i] + 5600\Gamma^{10}[i] + 16940\Gamma^8[i] + 14440\Gamma^6[i] + \frac{15123}{4}\Gamma^4[i] + 256\Gamma^2[i] \right) \quad (11)$$

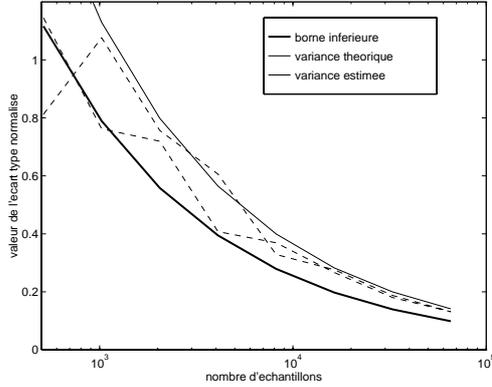


FIG. 6 — Variances d'estimation de la corrélation d'un H_4 -AR1(0.8)

(on rappelle que pour un processus H_4 -AR1, ces courbes dépendent jusqu'à une puissance 24 de l'entrée). Néanmoins, lorsque la taille des échantillons dépasse $N = 3000$, on retrouve le comportement théorique prévu ; en particulier, la borne inférieure $B_3^{inf}[0]$ est respectée.

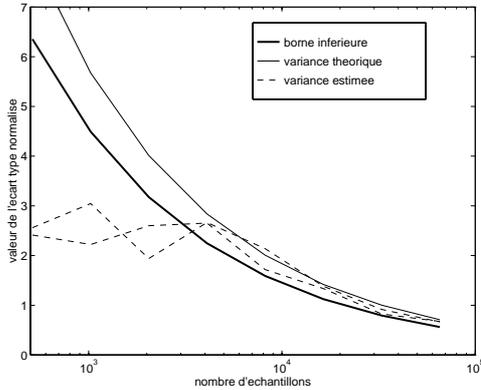


FIG. 7 — Variances d'estimation de la bicorrélation d'un H_4 -AR1(0.5)

6 Conclusion

Nous avons introduit une nouvelle classe de modèles de processus non gaussiens obtenus par filtrage non linéaire d'une entrée gaussienne colorée : les processus H -ARMA. Le filtre non linéaire étant un (ou plusieurs) polynômes d'Hermite, en utilisant les propriétés de ces derniers et en particulier les formules de Mehler et de Kibble-Slepian, nous pouvons déduire les propriétés du processus H -ARMA en fonction

de la corrélation de l'entrée. Nous avons donc donné les expressions des polycorrélations théoriques d'un processus H -ARMA ainsi que les variances *exactes* d'estimation de la corrélation et de la bicorrélation. Ces résultats théoriques vont nous permettre de mettre en place des algorithmes de modélisation H -ARMA.

Références

- [1] J.M. Mendel. A unified approach to multichannel arma modelling. In *ICASSP-89*, Glasgow, 1989.
- [2] D. Guegan. *Séries chronologiques non linéaires à temps discret*. Stat. Math. Prob., Paris, 94.
- [3] M. Benidir P. Bondon and B. Pincinbono. Polyspectrum modeling using linear or quadratic filters. *IEEE Trans. S.P.*, (41)(2) :692–702, 1993.
- [4] P. Duvaut and D. Declercq. Real and complex gamma processes. *J. Frank. Inst.*, (333-B)(3) :413–424, 1996.
- [5] P. Appell and J. Kampé de Fériet. *Fonctions hypergéométrique et hypersphériques, Polynomes d'Hermite*. Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [6] A. Erdelyi and Al. *Higher transcendental Functions, Vol. II*. Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [7] W. F. Kibble. An extension of a theorem of Mehler's on Hermite polynomials. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, (41) :12–15, 1945.
- [8] D. Slepian. On the symmetrized Kronecker power of a matrix and extentions of Mehler's formula for Hermite polynomials. *SIAM J. Math. Anal.*, (3) :606–616, 1972.
- [9] C.L. Nikias and A.P. Petropoulou. *Higher-order Spectra Analysis : A nonlinear signal processing framework*. Prentice Hall, New York, 94.
- [10] Rosenblatt and al. *Cumulant spectral estimates : bias and variances*. Coll. Math. Soc. Jan. Bol. : limit theorems in Prob. and Stat. Vol.57, Holland, 89.