

Factorisation d'un spectre d'ordre quatre et application en identification aveugle

Cécile HUET et Joël LE ROUX

I3S, Université de Nice Sophia Antipolis - CNRS
250 rue Albert Einstein Sophia Antipolis 06560 Valbonne FRANCE
Tel: 04.92.94.26.82; fax: 04.92.94.28.96
huet@alto.unice.fr - leroux@alto.unice.fr

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous énonçons une condition nécessaire et suffisante de factorisabilité d'un spectre d'ordre quatre. Ensuite, nous décrivons deux algorithmes de factorisation d'un spectre d'ordre quatre. Le premier utilise un nombre minimum de données du trispectre pour reconstruire la phase du système tandis que le second utilise toutes les données du trispectre et fournit une solution optimale au sens des moindres carrés. Cette solution est en première approximation équivalente à celle donnée par la méthode de maximisation du kurtosis [3, 1, 7]. Finalement, on utilise à nouveau la relation sur laquelle est basée la condition nécessaire et suffisante afin d'améliorer la qualité de l'estimation des phases du trispectre.

ABSTRACT

In this article, we establish a necessary and sufficient condition for a trispectrum to be factorizable. Next we present two factorization algorithms, the first one uses a minimum number of data while the second one uses all the trispectrum phases and gives the optimal LS solution. This last method is optimal, however, it needs a unwrapping of the measured trispectrum phase, which can imply important errors on the reconstructed phase. It can be shown [3] that this solution is in first approximation equivalent to the solution given by the well known kurtosis maximization criterion [1, 7]. Finally, we propose a method to improve the trispectrum phase estimation using a factorizability condition. Simulation results are given and the algorithm shows good behaviour even with few data.

1 Introduction

2 Définitions

Le spectre d'ordre quatre d'un signal complexe $x(t)$ est donnée par :

$$T_4^X(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \begin{aligned} & E \{ X(\omega_1)X(\omega_2)X^*(-\omega_3)X^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \} \\ & - E \{ X(\omega_1)X^*(\omega_1) \} E \{ X(\omega_2)X^*(\omega_2) \} \delta(\omega_2 + \omega_3) \\ & - E \{ X(\omega_2)X^*(\omega_2) \} E \{ X(\omega_1)X^*(\omega_1) \} \delta(\omega_1 + \omega_3) \\ & - E \{ X^*(\omega_3)X^*(-\omega_3) \} E \{ X(\omega_1)X(-\omega_1) \} \delta(\omega_1 + \omega_2). \end{aligned} \quad (1)$$

où $X(\omega)$ est la transformée de Fourier du signal $x(t)$.

Dans le contexte de l'identification d'un système linéaire (cf.

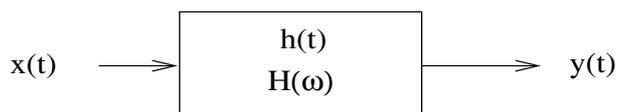


FIG. 1 — Identification de système.

Fig.(1)) dont l'entrée est une séquence IID non gaussienne, la relation entre la phase du trispectre mesurée à la sortie du système, $\psi_4^Y(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, et la phase de la fonction de transfert de ce système, $\varphi^H(\omega)$ est donnée par :

$$\psi_4^Y(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \varphi^H(\omega_1) + \varphi^H(\omega_2) \quad (2)$$

$$-\varphi^H(-\omega_3) - \varphi^H(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + k\pi,$$

où $k = 0$ ou 1 suivant le signe du kurtosis du signal d'entrée $x(t)$. C'est sur cette relation que sont basées les méthodes de reconstruction de la phase de la fonction de transfert de ce système, $\varphi^H(\omega)$.

3 Condition nécessaire et suffisante de factorisabilité d'un spectre d'ordre quatre

Si un trispectre est factorisable de telle façon que sa phase puisse s'écrire sous la forme (2), ce trispectre peut être vu comme celui de la sortie d'un filtre linéaire dont l'entrée est une séquence IID.

La condition nécessaire et suffisante de factorisabilité du trispectre présentée ici est basée sur la relation de Marron écrite à l'ordre quatre. La relation de Marron [6], qui avait été introduite dans le but de dérouler la phase du bispectre, traduit une relation entre quatre points du bispectre. Ci-dessous, nous donnons la formule originale de Marron pour l'ordre trois, ensuite, nous étendons cette relation à l'ordre quatre et en déduisons la condition nécessaire et suffisante de factorisabilité d'un trispectre. Notons que le même raisonnement permet de donner une condition nécessaire et suffisante de factorisabilité de tout spectre d'ordre pair supérieur à deux [4].

3.1 Relation de Marron à l'ordre trois

Cette relation, qui est utilisée à l'ordre trois pour dérouler la phase du bispectre, $\psi_3(\omega_1, \omega_2)$, s'écrit [6] :

$$\psi_3(\omega_1, \omega_2) = \psi_3(\omega_1, x) + \psi_3(x, \omega_2 - x) - \psi_3(\omega_1 + x, \omega_2 - x) \quad \forall x \quad (3)$$

3.2 Relation de Marron à l'ordre quatre

La relation correspondante à l'ordre quatre est déduite à partir de la définition du trispectre (1). La relation de Marron devient donc à l'ordre quatre :

$$\psi_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \psi_4(\omega_1, x, y) - \psi_4(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, x, y) + \psi_4(\omega_1 + x + y, \omega_2, \omega_3) \quad \forall x, y \quad (4)$$

3.3 Condition nécessaire et suffisante de factorisabilité du trispectre

La condition nécessaire et suffisante de factorisabilité du trispectre est la suivante :

- si pour une valeur du couple (x, y) on peut écrire :

$$\frac{T_4^Y(\omega_1, \omega_2, \omega_3)T_4^Y(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, x, y)}{R^Y(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} = \frac{T_4^Y(\omega_1, x, y)T_4^Y(\omega_1 + x + y, \omega_2, \omega_3)}{R^Y(\omega_1 + x + y)} \quad (5)$$

$\forall \omega_1, \omega_2, \omega_3$, où $R^Y(\omega) = E\{Y(\omega)Y^*(\omega)\}$.

- et si ce trispectre $T_4^Y(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ vérifie les symétries suivantes $\forall \omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\text{et } \begin{cases} T_4^Y(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = T_4^{Y^*}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, -\omega_3, -\omega_2) \\ T_4^Y(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = T_4^Y(\omega_2, \omega_1, \omega_3) \end{cases}$$

- alors ce trispectre est factorisable sous la forme :

$$T_4^Y(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = F(\omega_1)F(\omega_2)F^*(-\omega_3)F^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \quad (6)$$

et donc sa phase satisfait la relation (2).

4 Factorisation du Trispectre

Dans cette section, nous décrivons différentes méthodes de reconstruction de la phase de la fonction de transfert, $\varphi^H(\omega)$, basées sur la relation (2).

4.1 Multirésolution à l'ordre quatre

Cet algorithme de reconstruction du spectre d'ordre 4 est l'extension de l'algorithme de la multirésolution existant à l'ordre 3 [2]; pour reconstruire la phase d'une réponse impulsionnelle de longueur N , elle utilise uniquement N points du trispectre. Notons que cette méthode de reconstruction ne requiert pas une étape préalable de déroulement de phase, on peut montrer en effet que si on utilise la valeur modulo 2π de

$\psi_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ dans cet algorithme, on introduit uniquement un décalage du signal reconstruit dans le domaine temporel.

$$\hat{\varphi}^H(0) = \hat{\varphi}^H(1) = \hat{\varphi}^H(2) = 0$$

(à la fréquence d'échantillonnage et ses multiples)

Pour $n = 1, \dots, \log_2 N$

$$\hat{\varphi}^H\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} \psi_4\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ + \hat{\varphi}^H\left(\frac{-1}{2^{n-1}}\right) + \hat{\varphi}^H\left(\frac{1}{2^{n-2}}\right) \end{array} \right] \quad (7)$$

Pour $k = 0, \dots, 2^{n-1} - 2$

$$\left| \begin{array}{l} \hat{\varphi}^H\left(\frac{2k+3}{2^n}\right) = -\psi_4\left(\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \hat{\varphi}^H\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) \\ + \hat{\varphi}^H\left(\frac{1}{2^n}\right) - \hat{\varphi}^H\left(\frac{-1}{2^{n-1}}\right) \end{array} \right. \quad (8)$$

où $\hat{\varphi}^H(\omega)$ est la phase reconstruite et $\psi_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est l'estimée de la phase du trispectre (cf. (2)).

4.2 Projection à l'ordre quatre

La solution optimale de l'équation (2) est la valeur de la phase $\varphi^H(\omega)$ qui minimise la différence entre la phase du trispectre mesurée et la phase du trispectre correspondant au modèle recherché [5] :

$$\sum_{\omega_1=0}^{N-1} \sum_{\omega_2=0}^{N-1} \sum_{\omega_3=0}^{N-1} \|\psi_4^Y(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - \hat{\psi}_4^H(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\|^2. \quad (9)$$

Cette solution optimale est donnée par :

$$\varphi^H(\omega) = \frac{1}{N^2} \sum_{\omega_1=0}^{N-1} \sum_{\omega_2=0}^{N-1} \psi_4^Y(\omega, \omega_1, \omega_2). \quad (10)$$

Cependant le calcul de cette solution nécessite une étape préalable de déroulement de phase. En effet, la phase du trispectre, étant calculée en tant qu'argument du trispectre mesuré, varie dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$. Cependant, cette phase définie en tant que somme de quatre phases (2), prend ses valeurs dans l'intervalle $[-4\pi; 4\pi]$. Or dans la solution optimale (10), la division par $2N^2$ impose ce déroulement de phase. Dans la suite, nous décrivons différentes méthodes pour effectuer ce déroulement.

D'autre part, on peut montrer (cf.[4]) que cette solution optimale est en première approximation équivalente à la solution obtenue par la méthode de maximisation du kurtosis proposée par D. Donoho et ensuite par O. Shalvi et E. Weinstein [1] [7] [8]. Donc la solution analytique (10) est équivalente à la solution obtenue par maximisation du kurtosis, mais les éventuels problèmes de maxima locaux sont ici remplacés par un problème de déroulement de phase, que l'on peut résoudre si la qualité d'estimation du trispectre est suffisante.

4.3 Méthodes de déroulement de phase

Ces méthodes sont présentées en détail dans [3], nous en rappelons ici le principe.

- Multirésolution + Projection

La multirésolution fournit une première approximation de la phase $\varphi^H(\omega)$, qui est ensuite utilisée pour dérouler la phase du trispectre $\psi_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ en utilisant (2).

- Combinaison Multirésolution - Projection
On combine ici la multirésolution et la projection : à une itération n donnée de l’algorithme de multirésolution, on obtient une première approximation de la phase $\varphi^H(\frac{2k+1}{2^n})$, qui est ensuite corrigée en utilisant la méthode de la projection, écrite à cette résolution n , avant de passer à la résolution suivante.
- Marron à l’ordre quatre
On fixe tout d’abord un déroulement de phase arbitraire pour $N-1$ points du trispectre, et ensuite de proche en proche, en utilisant la relation de Marron à l’ordre quatre (4), on déroule les phases du trispectre.

5 Utilisation de la condition nécessaire et suffisante de factorisabilité pour améliorer la qualité du trispectre.

L’algorithme de projection est optimal à condition que le déroulement de phase soit correctement effectué, ce qui implique une qualité d’estimation du trispectre relativement bonne (erreur d’estimation inférieure à $\pi/4$). Dans ce paragraphe, nous présentons une méthode permettant d’améliorer la qualité de l’estimation du trispectre en imposant la condition de factorisabilité. En effet, la phase du trispectre optimale (celle correspondant à une reconstruction optimale de la phase de la fonction de transfert) est la phase du trispectre vérifiant la condition de factorisabilité et qui minimise la distance par rapport à la phase du trispectre mesuré. Cette phase optimale est donc celle qui

- vérifie la condition de factorisabilité [4] :

$$\begin{aligned} \psi_{\text{FACTO}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \psi_{\text{FACTO}}(\omega_1, x, y) \\ &+ \psi_{\text{FACTO}}(\omega_1 + x + y, \omega_2, \omega_3) \\ &- \psi_{\text{FACTO}}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, x, y) \end{aligned} \quad (11)$$

$\forall \omega_1, \omega_2, \omega_3$ pour un couple (x, y) ,

- et qui minimise :

$$\sum_{\omega_1=0}^{N-1} \sum_{\omega_2=0}^{N-1} \sum_{\omega_3=0}^{N-1} [\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - \psi_{\text{FACTO}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)]^2. \quad (12)$$

Il est important de noter que ces deux conditions (eq. 11 et eq. 12) ne doivent être vérifiées que pour les valeurs “modulo 2π ” des phases $\psi_{\text{FACTO}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et $\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

La méthode décrite ci-dessous a pour but d’améliorer la qualité du trispectre estimé en imposant la contrainte de factorisabilité. Bien que la convergence vers la solution optimale ne soit pas assurée, les résultats de simulation sont très convaincants. A partir du trispectre mesuré, on réestime chaque phase du trispectre $\psi_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ en exploitant la condition nécessaire et suffisante de factorisabilité (4) ainsi que la redondance contenue dans le trispectre comme suit :

$$\begin{aligned} \psi_{\text{new}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \\ \arg \left(\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[\begin{array}{c} e^{j\psi_{\text{old}}(\omega_1, x, y)} e^{j\psi_{\text{old}}(\omega_1 + x + y, \omega_2, \omega_3)} \\ e^{-j\psi_{\text{old}}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, x, y)} \end{array} \right] \right) \end{aligned} \quad (13)$$

De plus, on impose à $\psi_{\text{new}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ de satisfaire les symétries du trispectre. La phase du trispectre ainsi ré-estimée se rapproche de la condition de factorisabilité. Lors des simulations, nous avons observé qu’un trispectre de bonne qualité était obtenu après environ 5 itérations.

6 Résultats de Simulations

Le canal utilisé pour les simulations correspond à un filtre MA d’ordre 5. A l’entrée de ce canal, on applique un signal IID de type QAM-4. Ce système est décrit par l’équation suivante :

$$\begin{aligned} y[k] &= x[k] + 0.1 x[k-1] - 1.87 x[k-2] \\ &+ 3.02 x[k-3] - 1.435 x[k-4] + 0.49 x[k-5] \end{aligned}$$

Le trispectre est estimé à partir de 450 échantillons de la séquence de sortie $y[k]$, en utilisant la méthode directe. La figure 2 représente la réponse impulsionnelle obtenue en utilisant la méthode optimale de reconstruction de phase et la méthode de déroulement de phase combinant l’algorithme de multirésolution et celui de projection. La mauvaise qualité de ce résultat est due aux erreurs de déroulement de phase. En effet, la qualité de l’estimation du trispectre obtenue à partir d’un si petit nombre d’échantillons est assez mauvaise. Par contre la figure 3 illustre l’efficacité de la méthode utilisant la condition nécessaire et suffisante de factorisabilité pour améliorer la qualité du trispectre. En effet, le résultat de la figure 3 est obtenu en utilisant dans un premier temps la méthode décrite au paragraphe 5 de façon à obtenir un trispectre le plus proche possible d’un trispectre factorisable. Cette nouvelle approximation du trispectre est ensuite utilisée pour reconstruire la phase de la fonction de transfert en appliquant la même méthode que celle utilisée à la figure 3. L’efficacité de cette méthode est également illustrée à la figure 4 qui montre les moyenne et écart type de résultats obtenus dans les mêmes conditions qu’à la figure 3 à partir de 50 simulations différentes.

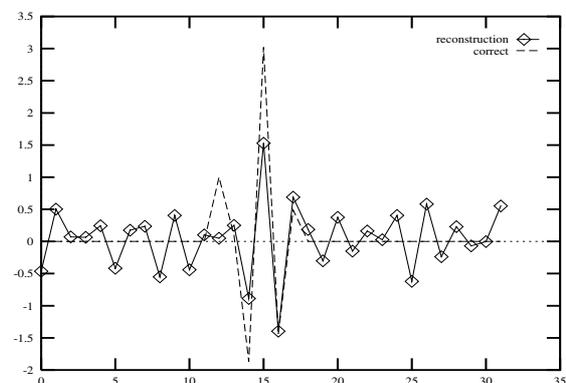


FIG. 2 — Réponse impulsionnelle obtenue en utilisant la méthode “combinaison : multirésolution-projection” à partir de 450 échantillons.

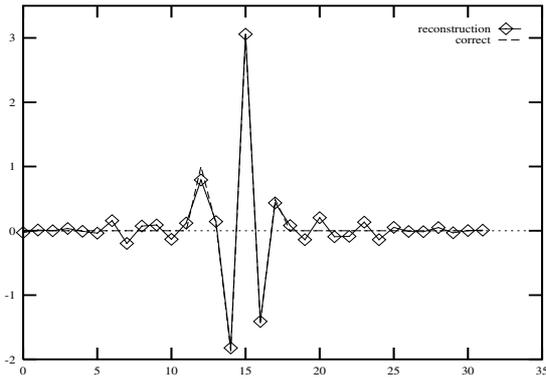


FIG. 3 — Réponse impulsionnelle obtenue en utilisant la méthode d'amélioration de l'estimation du trispectre et ensuite la méthode "combinaison : multirésolution-projection" à partir de 450 échantillons.

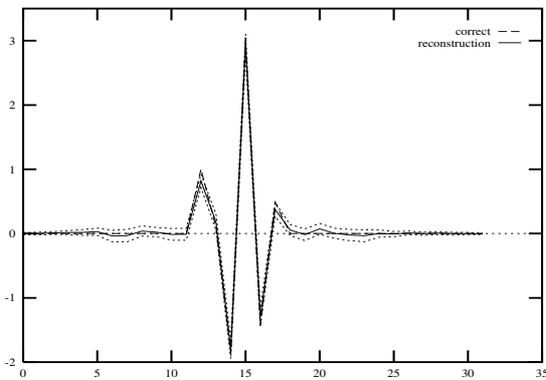


FIG. 4 — Moyenne et écart-type des résultats obtenus en utilisant la même méthode que pour la figure 3 à partir de 50 simulations différentes.

7 Conclusions

Dans cet article, nous avons tout d'abord présenté une condition nécessaire et suffisante de factorisabilité d'un trispectre. Cette condition permet de vérifier si un trispectre donné correspond à celui de la sortie d'un filtre LTI excité par un bruit blanc. Nous avons ensuite présenté deux méthodes de reconstruction de la phase d'une fonction de transfert à partir de la phase du trispectre et mis en évidence le problème de déroulement de phase. Finalement, une méthode permettant l'amélioration de l'estimation d'un trispectre est proposée. Cette méthode tente de trouver le trispectre factorisable minimisant la distance par rapport au trispectre mesuré. Les résultats de simulation obtenus jusqu'à présent sont encourageants : le nombre de trispectres accumulés peut être réduit de façon importante tout en conservant une reconstruction de qualité acceptable.

Références

[1] **D. Donoho(1981)** : "On Minimum Entropy Deconvolution," *Applied Time Series Analysis II*, D.F.Fiendley ed. Academic Press, New York, pages 565–608, 1981.

- [2] **J. Le Roux, D. Rossille and C.Huet(1995)** : "A multiresolution extension of Lohman Weigelt and Wirtzner recursion for computing a Fourier transform phase from the third order spectrum phase," *IEEE ATHOS Workshop on HOS*, pages 315–319, Begur, Spain, June 1995.
- [3] **C. Huet and J. Le Roux (1997)** : "Some properties and algorithms for fourth order spectral analysis of complex signals," *Proceedings of ICASSP 1997*, Vol 5, pp 3641–3644, Muenchen, Germany, April, 1997.
- [4] **J. Le Roux and C. Huet (1997)** : "Factorizability of complex signals higher (even) order spectra : a necessary and sufficient condition," *IEEE ATHOS Workshop on HOS*, Banff, Canada, July 1997.
- [5] **J. Le Roux and P. Sole (1994)** : "Least-squared error reconstruction of a sampled signal Fourier transform from its n-th order polyspectrum," *Signal Processing*, Vol 35, pages 75–81.
- [6] **J.C. Marron , P.P. Sanchez and R.C. Sullivan (1990)** : "Unwrapping algorithm for least-squares phase recovery from the modulo 2π bispectrum phase," *J.Opt.Soc.Am. A/Vol.7*, pages 14–20, January 1990.
- [7] **O. Shalvi and E. Weinstein (1990)** : "New criteria for blind deconvolution of nonminimum phase systems (channels)," *IEEE Trans. On Information theory* , Vol 36(2), pages 312–321, March 1990.
- [8] **J. Tugnait (1992)** : "Comments on "New criteria for blind deconvolution of nonminimum phase systems (channels)"", *IEEE Trans. On Information theory* , Vol 38(1), pages 210–213, January 1992.