

Séparation Autodidacte de Mélanges Convolutifs

A. Touzni, I. Fijalkow

ETIS / ENSEA-UCP, 95014 Cergy-Pontoise Cdx, France

e-mail: touzni, fijalkow@ensea.fr

RÉSUMÉ

Dans cette contribution nous nous intéressons à la séparation et l'égalisation de mélanges convolutifs. Nous proposons un schéma adaptatif qui permet d'extraire des sources des mélanges (séparation) et les sources en question sont égalisées simultanément. Notre approche est fondée sur l'optimisation d'une fonction de coût de type Module Constant (MC). En l'absence de bruit additif, nous montrons qu'au moins une source est extraite et égalisée de manière parfaite. Afin de garantir l'extraction des autres sources, deux solutions sont envisagées.

ABSTRACT

Blind equalization and simultaneous separation of convolutive mixtures is a challenging problem. We choose to use the Constant Modulus (CM) criterion since it allows, under multichannel identifiability, to retrieve and equalize one source perfectly. Moreover, CM is quite robust to these conditions and to channel additive noise. In this paper, we propose two approaches to combine CM with a decorrelation procedure in order to retrieve the other sources. In a noise free context, we show how its minima achieve restoration of the separated sources.

1 Introduction

Le problème de l'égalisation aveugle de signaux observés sur un réseau de capteurs se trouve compliqué par le fait que c'est le plus souvent le mélange des contributions de plusieurs signaux qui est observé. La plupart des méthodes d'égalisation existantes égalisent la source de plus grande puissance, mais voient la contribution des autres sources comme une perturbation ce qui diminue d'autant la qualité de l'égalisation. On pourrait également séparer les contributions des différentes sources pour les égaliser ensuite, mais la moindre erreur sur la séparation perturberait encore l'égalisation. Dans [3], la fonction de transfert matricielle du mélange est estimée par une méthode de type sous-espace, une procédure de Wiener doit être appliquée dans un second temps pour estimer les sources. Nous nous intéressons à l'approche directe afin d'égaliser et de séparer les signaux simultanément de manière autodidacte. Notre approche est fondée sur l'utilisation du critère **Module Constant** (MC) qui est l'approche de référence en égalisation aveugle [5], et qui a également été proposée comme critère de séparation de sources. Notre motivation pour l'utilisation du critère MC provient de nos récents travaux sur l'égalisation spatio-temporelle. En effet, il a été montré que le critère CMA était robuste au manque d'identifiabilité du canal et que les performances asymptotiques étaient très proches de ceux de Wiener ([1],[5]).

Dans la suite nous donnons les performances de ce critère sous certaines conditions de diversité spatio-temporelle du canal et montrons qu'il permet d'extraire (et d'égaliser parfaitement) un certain nombre de sources. Pour les démonstrations nous renvoyons le lecteur à [8]. Nous devons souligner qu'un certain nombre de démarches similaires ont été introduites très récemment ([6], par exemple). Cependant à notre connaissance, les résultats donnés jusqu'ici restent très partiels.

2 Modélisation MIMO

Le système considéré est un mélange convolutif multi-entrées / multi-sorties. L'observation sur le k ième capteur se traduit par l'expression suivante :

$$y_k(t) = \sum_p^P \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_p^{(k)}(t - nT) s_p(n) + b_k(t) \quad (1)$$

On suppose que chaque capteur reçoit la contribution de P sources $s_p(n)$, qui se trouvent filtrées par la réponse impulsionnelle du canal $h_p^{(k)}(t)$ à support borné, supposée résulter des effets de propagations du milieu convolués avec les filtres d'émissions des différentes sources.

Après échantillonnage de l'observation à la fréquence $1/T$, le signal L -vectoriel à temps discret $y(n) = (y_1(n), \dots, y_L(n))^T$ s'écrit :

$$y(n) = \sum_{p=1, P} [h_p(z)] s_p(z) + b(n) = [H(z)] s(n) + b(n)$$

On suppose que $L > P$ (**A-1**). $H(z) = (h_1(z), \dots, h_p(z))$ désigne une fonction de transfert matricielle inconnue, de dimension $L \times P$, dont on supposera que la k ième colonne est une fonction polynômiale de degré Q_k de la forme $h_k(z) = (h_k^{(1)}(z), \dots, h_k^{(L)}(z))^T = \sum_{l=0}^{Q_k} h_k(l) z^{-l}$ (**A-2**). Par ailleurs, on admettra que $\text{Rang } \mathbf{H}(z) = P$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (**A-3**), et que $H(z)$ est une matrice à colonne réduite (i.e., $\text{Rang } [\mathbf{h}_1(Q_1), \dots, \mathbf{h}_1(Q_P)] = P$) (**A-4**). Le signal P -dimensionnel $s(n) = (s_1(n), \dots, s_p(n))^T$ est constitué de sources indépendantes $s_p(n)$, formant des séquences d'échantillons centrés i.i.d. de variance $\sigma_k^2 = E[s_k^2]$ (**A-5**). $b(n) = (b_1(n), \dots, b_L(n))^T$ de dimension L est la contribution additive du bruit supposé blanc, gaussien et indépendant des sources (**A-6**).

3 Extraction d'une source

Dans cette section, nous montrons comment il est possible, dans un contexte non bruité, de restituer exactement une source arbitraire $s_k(n)$ à partir du critère MC.

3.1 Identifiabilité

L'extraction d'une source revient à chercher un filtre linéaire $g^*(z) = \sum_{l=0}^N g(l) z^{-l}$ de dimension $L \times 1$ tel que, en l'absence de bruit,

$$[g^*(z)] y(n) = g^{*\top} \mathfrak{y}_N(n) = s_k(n - \nu)$$

où ν représente un retard arbitraire. De sorte que $\mathfrak{y}_N(n)$ représente ici un vecteur de régression de dimension NL formé de la concaténation des observations $y(n)$ aux instants $n, n-1, \dots, n-N+1$ et g^* désigne la réponse impulsionnelle du filtre $g^*(z)$.

Notons que l'observation $\mathfrak{y}_N(n)$ s'écrit,

$$\mathfrak{y}_N(n) = \sum_{k=1, P} \mathcal{T}(\mathbf{h}_k) S_{k,N}(n)$$

Les matrices $\mathcal{T}(\mathbf{h}_k)$ de dimension $NL \times Q_k$ forment des matrices de convolution bloc-Toeplitz reliant chacune des sources à l'ensemble des capteurs comme dans le cas spatio-temporel ([4]). Chaque vecteur $S_{k,N}(n)$ est un vecteur de dimension $N + Q_k$ qui regroupe les symboles de la source k aux instants $n, n-1, \dots, n-Q_k+1$. On peut dès lors construire la matrice de dimension $NL \times (N + \sum_k Q_k)$ $\mathcal{T}(\mathbf{H}) = (\mathcal{T}(\mathbf{h}_1), \dots, \mathcal{T}(\mathbf{h}_P))$ qui représente la matrice de convolution globale du système P -sources/ L -sorties. L'extraction d'une source revient à résoudre le système :

$$f^\top = g^{*\top} \mathcal{T}(\mathbf{H}) = (f_{|1|}^\top, \dots, f_{|P|}^\top) = (0..0|0..0|..010..|0..0) = \delta_{\nu_k}^\top$$

avec $f_{|k|}^\top = g^{*\top} \mathcal{T}(\mathbf{h}_k)$.

f désigne la réponse impulsionnelle globale (i.e., canal+filtre) du système et $f_{|k|}$ celle qui relie la source p à l'ensemble des capteurs. Pour que $f = \delta_{\nu_k}$, le vecteur g^* doit appartenir au noyau de toutes les matrices $\mathcal{T}(\mathbf{h}_j)$ pour $j \neq k$ et correspondre en même temps à un égaliseur pour la matrice de convolution $\mathcal{T}(\mathbf{h}_k)$, c'est à dire $g^{*\top} \mathcal{T}(\mathbf{h}_k) = \delta_{|\nu_k|}$.

En fait il existe une infinité de solutions au problème. En effet, sous les hypothèses **A-3,4**, $\mathcal{T}(\mathbf{H})$ est une matrice de rang-colonne plein à condition que $N \geq \sum_{k=1}^P Q_k$ (**A-7**) ([3]). En conséquence toutes les réponses impulsionnelles globales $f^\top = g^{*\top} \mathcal{T}(\mathbf{H})$ sont accessibles en particulier celles correspondant à des vecteurs canoniques $\delta_{\nu_k}^\top$.

3.2 Contraste MC

Le contraste MC est défini par [2],

$$\Phi_{MC}^r : g \mapsto -E[(v(n)^2 - r)^2]$$

avec $v(n) = g^\top \mathfrak{y}_N(n)$ et r est une constante arbitraire. Dorénavant, nous considérons que toutes les sources sont sous-gaussiennes, i.e., $\rho_k = E[s_k^4]/E[s_k^2]^2 < 3$ (**A-8**).

L'analyse des extrema et leur stabilité est déduite des propositions 1,2. Le détail des démonstrations des propositions suivantes est donné dans [8] sous l'hypothèse où $\mathcal{T}(\mathbf{H})$ est de rang colonne plein.

Proposition 3.1 — Les extrema du contraste MC sont solutions de l'équation :

$$\nabla_g \Phi_{MC}(g) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}(\mathbf{H}) \mathcal{P}_s \Delta_s(f) f = 0$$

où $\Delta_s(f) = (3\|f\|_s^2 - r)I + \mathcal{K}_s \text{diag}(ff^\top)$ est une matrice diagonale. Nous notons $\text{diag}(A)$ la matrice diagonale qui correspond à l'extraction de la diagonale de A . Par ailleurs, $\|f\|_s^2 = \sum_{i=1}^P \sigma_i^2 \|f_{|i|}\|^2$. Finalement, \mathcal{P}_s et \mathcal{K}_s désignent les matrices bloc-diagonales de dimension $(N + \sum_k Q_k) \times (N + \sum_k Q_k)$ où les $i^{\text{èmes}}$ bloc de chaque matrice s'écrivent respectivement $\mathcal{K}_i = (\rho_i - 1) I_{N+Q_i}$ et $\mathcal{P}_i = \sigma_i^2 I_{N+Q_i}$.

Proposition 3.2 — Les points stationnaires stables du critère MC vérifient :

$$\mathcal{T}(\mathbf{H}) \Psi_s(f) \mathcal{T}(\mathbf{H})^\top \geq 0 \quad (2)$$

où $\Psi_s(f)$ est la matrice symétrique définie par :

$$\Psi_s(f) = \mathcal{P}_s [(3\|f\|_s^2 - r)I + 3\mathcal{K}_s \text{diag}(ff^\top)] + 6\mathcal{P}_s f f^\top \mathcal{P}_s$$

Les extrema $\Phi_{CM}^r(g)$ peuvent être classés en :

- Minima local : $f = 0$ ($\Psi_s(f) \leq 0$),
- Maxima globaux : $f_k^* = \pm (r/r_k)^{1/2} \delta_{\nu_k}$ ($\Psi_s(f) > 0$),
- Points selles : pour f point stationnaire $\neq (0, f_k^*)$.

où l'on notera $r_k = E[s_k^4]/E[s_k^2]^2$ la constante de dispersion associée à la source $s_k(n)$.

Ainsi sous les conditions d'identifiabilités du système énoncées plus haut, le critère MC permet d'extraire une source quelconque sans erreur (dans un contexte non bruité). En effet, dans ce cas, il n'y a pas de maxima locaux. D'autre part, les maxima globaux sont fonction d'un facteur d'échelle qui dépend du rapport des constantes de dispersion. Dans l'hypothèse où l'on connaît la distribution des sources $s_p(n)$, il faudrait chercher le facteur r le plus adapté à l'ensemble des distributions des sources ; on peut par exemple prendre $r = \frac{1}{P} \sum_k r_k$.

Notons, enfin, que ce type de critère ne résoud pas directement le problème initial qui était la restitution de toutes les sources. La mise en parallèle de plusieurs MC pourrait conduire à estimer plusieurs fois la même source. Dans la suite nous proposons deux approches différentes pour estimer toutes les sources.

4 Contraste Global

4.1 Critère

Nous cherchons P filtres g_1^*, \dots, g_P^* qui correspondent chacun à l'extraction d'une source unique. Pour cela, nous proposons d'introduire le contraste suivant :

$$\mathcal{L}_P : g_1, \dots, g_P \mapsto -\sum_{k=1}^P \Phi_{CM}^r(g_k) - \beta \sum_m \sum_{j \neq k} \varphi_m(g_k, g_j)$$

où $\varphi_m(g_k, g_j) = E[v_k(n)v_j(n-m)]^2$.

L'objectif de la contrainte $\varphi_m(g_k, g_j)$ est de décorréler les sorties $v_k = g_k^\top \mathfrak{y}_N(n)$, pour $k = 1, \dots, P$, de façon

à interdire la sélection d'une même source même avec des retards éventuellement différents.

En pratique cela revient à surestimer le plus grand degré des réponses impulsionnelles $f_k(z) = g_k(z)^\top h_k(z)$. Dans ce cas le retard m est compris dans l'intervalle : $0 < |m| < N + \max(Q_k) = 2M$. Notons, enfin, que β est un facteur positif dont il convient de discuter le rôle et les effets (voir [8]).

Nous envisageons dans les sections suivantes l'étude des extrema qui correspondent à des maxima globaux et nous proposons une implantation adaptative de la maximisation du contraste.

4.2 Extrema

La justification du critère précédent est fournie par le résultat fondamentale suivant :

Lemme 4.1 — *Sous les hypothèses A-1,8, les vecteurs (g_1, \dots, g_P) associés aux réponses impulsionnelles globales (f_1^*, \dots, f_P^*) , telles que $f_k^* = \pm(r/r_k)^{1/2} \delta_{|v_k|}$, sont des maxima stables de $\mathcal{L}_P(g_1, \dots, g_P)$ si et seulement si les vecteurs $(\delta_{|v_k|})_{k=1..P}$ correspondent chacun à l'extraction d'une source.*

Aurement dit, il n'existe pas de solutions qui correspondent à une famille de maxima globaux sélectionnant plus de une fois la même source.

Preuve : Compte tenu des hypothèses A-3,4, Les extrema de $\mathcal{L}_P(\cdot)$ ($\forall k = 1..P$) sont issues du système d'équations,

$$\mathcal{P}_s \Delta_s(f_k) f_k + \beta \sum_m \sum_{j \neq k} \left(f_k^\top J_*^{(m)} f_j \right) J_*^{(m)} f_j = 0$$

où $J_*^{(m)}$ désigne à une matrice bloc-diagonale, où chaque bloc correspond à une matrice de décalage J^m de rang m de sorte que $(J^m)_{k,p} = 1$ if $k = p - m$ et 0 ailleurs. Si $\Delta_s(f_k^*) f_k^* = 0$ pour tout $k = 1..P$, il n'est pas de même pour la contrainte de décorrelation qui ne s'annule que si les vecteurs $(f_k^*)_{k=1..P}$ ne sélectionnent pas deux fois la même source. La stabilité des solutions découle directement de celle du critère MC. \square

4.3 Algorithme

L'optimisation adaptative du critère $\mathcal{L}_P(g_1, \dots, g_P)$ est effectuée par un gradient stochastique sur l'ensemble des composantes g_k selon le schéma de principe suivant :

$$g_k \leftarrow g_k + \mu \nabla_{g_k} \mathcal{L}_P(g_1, \dots, g_P)$$

L'estimation de chaque filtre g_k est ainsi traitée indépendamment des autres que l'on suppose fixés à cette étape. On notera que :

$$\nabla_{g_k} \varphi_m(g_k, g_j) = (g_k^\top \mathcal{R}_Y^{(m)}(n) g_j) \mathcal{R}_Y^{(m)}(n) g_j$$

avec $\mathcal{R}_Y^{(m)}(n) = E [\mathcal{Y}_N(n) \mathcal{Y}_N(n-m)^\top]$. Pour chaque retard m , l'estimation stochastique de $\hat{\mathcal{R}}_Y^{(m)}(n)$ s'effectue de manière itérative par la procédure standard :

$$\hat{\mathcal{R}}_Y^{(m)}(n+1) = \alpha \hat{\mathcal{R}}_Y^{(m)}(n) + (1-\alpha) \mathcal{Y}_N(n) \mathcal{Y}_N(n-m)^\top$$

où α est un facteur positif proche de 1.

Finalement, l'équation de mise à jour pour l'estimation stochastique de chaque vecteur g_k s'écrit :

$$g_k(n+1) = g_k(n) - 4\mu (v_k(n)^2 - r) v_k(n) \mathcal{Y}_N(n) - 2\mu\beta \sum_{m=-M}^M \sum_{j \neq k} (g_k^\top(n) \hat{\mathcal{R}}_Y^{(m)}(n) g_j(n)) \hat{\mathcal{R}}_Y^{(m)}(n) g_j(n)$$

où les vecteurs $(g_j)_{j \neq k}$ proviennent des autres équations de mise à jour.

4.4 Simulations

Par manque de place nous ne pouvons pas multiplier les simulations. L'algorithme est simulé pour le canal #1. Chacune des deux sources émet un signal binaire (+1, -1). Chaque filtre $g_k(z)$ ($k = 1, 2$) est une fonction de degré $N = 6$. Les autres paramètres utilisés sont définis par $\mu = 0.1$, $1 - \alpha = 0.01$ et $\beta = 2$.

MIMO Canal #1		
$h_1(z)$	$h_{11}(z)$	$0.9844 + 0.3365z^{-1} + 0.1002z^{-2}$
	$h_{21}(z)$	$0.5232 + 0.0396z^{-1} + 0.0121z^{-2}$
	$h_{31}(z)$	$0.9651 + 0.1543z^{-1} + 0.5371z^{-2}$
$h_2(z)$	$h_{12}(z)$	$0.6303 + 0.1575z^{-1} + 0.3791z^{-2}$
	$h_{22}(z)$	$0.2100 + 0.2855z^{-1} + 0.6461z^{-2}$
	$h_{32}(z)$	$0.2547 + 0.2695z^{-1} + 0.7178z^{-2}$

Dans la Figure 1, nous visualisons l'évolution de l'interférence inter-symbole (IES-1,2) de chacune des sources en fonction du nombre d'itérations. L'IES- k définie par $(\sum_{p,i} |f_{k,p}(i)|^2 - \max_{p,i} |f_{k,p}(i)|^2) / \max_{p,i} |f_{k,p}(i)|^2$ prend en compte les perturbations résiduelles induites par les autres sources. A la convergence, nous donnons les réponses impulsionnelles globales du système $F = [f_1^\top, f_2^\top]$ par rapport à chaque source. On peut ainsi vérifier que l'on a bien sélectionné deux sources différentes avec des retards arbitraires (ici $v_1 = 2$ et $v_2 = 3$) (Figure 2).

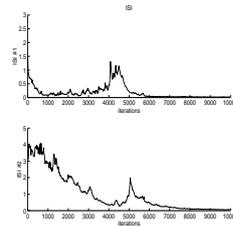


Fig 1 : IES 1 & 2

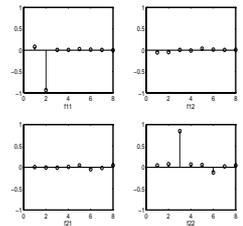


Fig 2 : F

5 Soustraction

Nous présentons dans la suite une approche qui permet d'extraire les sources en les soustrayant les unes après les autres de l'observation.

5.1 Principe

La méthode est itérative, elle consiste à estimer une source arbitraire $s(n)$ parmi P sources puis à supprimer sa contribution dans le mélange $y(n)$. On dispose ainsi d'une nouvelle

observation $y_1(n)$ qui résulte d'un mélange convolutif engendré les $P-1$ sources restantes, sur lequel on peut réitérer le processus d'estimation. L'estimation de l'ensemble des sources s'effectue ainsi en un nombre fini d'étapes. L'extraction d'une source est fournie par le critère MC. La suppression de sa contribution dans le mélange initial revient à estimer un filtre de décorrélation $e^*(z)$ de dimension $L \times 1$ qui maximise le critère quadratique $Q(e) = -E[|y(n) - [e(z)]v(n)|^2]$. Il s'agit d'une simple problématique de Wiener. Notons que contrairement à l'approche de déflation utilisée dans [7], dans le contexte plus simple de séparation de sources, l'estimation de chaque source ne se fait pas sous contrainte. Nous devons signaler que cette approche a aussi été proposée de façon indépendante dans [6], où seul l'algorithme en moyenne est proposé.

Nous proposons une implantation adaptative de l'algorithme, qui combine un CMA pour l'optimisation du critère MC et un LMS pour l'optimisation du critère $Q(\cdot)$. Il convient alors d'estimer exactement $s_k(n)$ si l'on veut supprimer sa contribution dans le mélange. On est donc amené à prendre une décision $\tilde{v}(n) = \mathcal{D}(v(n)) = s_k(n - \nu_k)$ sur la source de façon à ne pas accumuler les erreurs d'estimation.

5.2 Convergence

Si dans son principe cette approche est très simple, il convient néanmoins d'être assez prudent dans sa mise en œuvre.

On prendra ainsi soin de surestimer le degré du filtre $e(z)$ vis à vis du canal que l'on cherche à 'compenser' de manière à s'assurer que l'optimisation du critère $Q(\cdot)$ sur l'erreur résiduelle $\mathbf{y}(n - 2M)^{(k)} - [e(z)]s_k(n - \nu_k)$ puisse fournir une estimation de la colonne $h_k(z)$ (à un retard près). Notons également qu'afin de compenser le retard arbitraire ν_k , il est nécessaire d'introduire un décalage dans l'observation résiduelle $y(n)^{(k)}$.

On peut, dès lors, résumer les principaux résultats de convergence dans la proposition suivante :

Proposition 5.1 — Sous **A-1,8**, et l'hypothèse : degré de $e_k(z) \geq \max_{j=1,\dots,P}(Q_j)$ les seuls points de convergences possibles (g_k^*) vérifient à la k ième étape :

$$g_k^{*\top} \mathcal{T}(\mathbf{H}/h_1 \dots h_{k-1}) = \pm (r/r_k)^{1/2} \delta_{\nu_k}^\top$$

où $\mathcal{T}(\mathbf{H}/h_1 \dots h_{k-1})$ désigne la matrice de convolution du système privée des matrices de Sylvester $\mathcal{T}(h_j)$ associés au filtre $z^{\nu_j} h_j(z)$ et $\delta_{\nu_k} = (0..0|\delta_{|\nu_k|}|0..0)^\top$.

Preuve : Voir [8] pour les détails de la démonstration. \square

5.3 Simulations

Nous fournissons une illustration de l'algorithme avec le canal # 1 et deux sources binaires $s_{1,2}(n) = \pm 1$. Notons qu'il s'agit ici d'une version complètement adaptative pour laquelle on n'attend pas la convergence d'un filtre $g_{1,2}(z)$ pour prendre en compte une estimation de la décorrélation et envisager l'extraction de la deuxième restante.

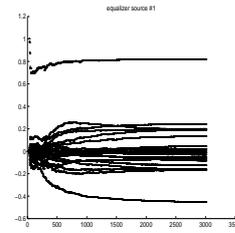


Fig 3 : g_1

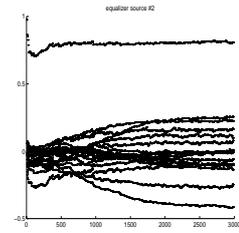


Fig 4 : g_2

Dans les Figures 3,4 nous traçons l'évolution des vecteurs $g_{1,2}$ en fonctions du nombres d'itérations après une initialisation qui correspond à un vecteur canonique. Ils correspondent à une estimation de chacune des sources (Figures 5,6). On notera que le filtre g_2 qui sélectionne la deuxième source ne commence à converger ($t=1500$) qu'à partir du moment où l'on obtient une estimation satisfaisante de $s_1(n)$.

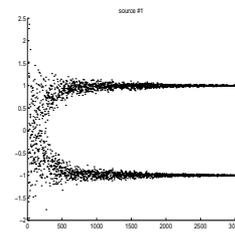


Fig 5 : $s_1(n)$

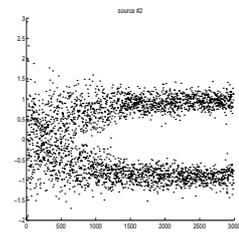


Fig 6 : $s_2(n)$

Références

- [1] I. Fijalkow, A. Touzni, J.R. Treichler, *Fractionally-Spaced Equalization using CMA : Robustness to Channel Noise and lack of Disparity*, IEEE Tr. on SP special issue on Signal Processing for Advanced Communications, January 1997.
- [2] D. Godard, *Self-recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communication systems*, IEEE Tr. on Com., vol. 28, pp. 1867-1875, 1980.
- [3] A.Gorokhov, Ph. Loubaton, *Second order blind identification of convolutive mixtures with temporally correlated sources : a subspace approach*, in Proc. EUSIPCO 1996.
- [4] E. Moulines, et al., *Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters*, IEEE Trans. on SP, 1994.
- [5] J. Treichler et al., *The current shape of FSE-CMA behavior theory*, in Proc. SPAWC-97, 1997.
- [6] J.K. Tugnait, *Blind spatio-temporal equalization and impulse response estimation for MIMO channels using a Godard cost function*, IEEE Tr. on SP special issue on Signal Processing for Advanced Communications, pp 268-271, January 1997.
- [7] N. Delfosse, L. Loubaton *Adaptive separation of independent sources : a deflation approach*, in Proc. ICASSP, vol 4, pp 41-44, 1994.
- [8] A. Touzni, I. Fijalkow, J.R. Treichler "Blind adaptive separation of MIMO FIR mixtures based on Constant Modulus contrast", 1997 (en préparation).