

Traitement d'antennes robuste

Hervé Lebret⁽¹⁾

⁽¹⁾ENSTA 32 bd Victor
75739 PARIS CEDEX 15
email: lebret@ensta.fr

RÉSUMÉ

Cet article considère des problèmes de réseaux d'antennes dont les données dépendent de paramètres incertains mais bornés. On appelle robuste une solution qui minimise l'objectif (pire-cas) tout en satisfaisant les contraintes pour toutes les valeurs possibles des paramètres. Nous montrons qu'une famille de problèmes d'optimisation robuste peut-être exprimée sous forme de problèmes d'optimisation convexe, en particulier de programmation semi-définie. Nous illustrons nos résultats par des exemples de minimisation de niveaux de lobes secondaires.

ABSTRACT

We consider antenna array problems, with data depending on some unknown-but-bounded perturbation parameters. We call robust the solutions which minimize the (worst-case) objective while satisfying the constraints for every possible values of parameters within the given bounds. We show that a variety of these robust antenna array processing problems can be expressed as convex optimization problems, namely second-order cone or semidefinite programs. We illustrate our results with sidelobe minimization problems.

1 Exposé du problème

La synthèse des diagramme de réseau d'antennes est un problème bien connu. De nouvelles techniques liées à l'optimisation convexe ont été introduites récemment [8]. Ce nouvel article a pour objectif de présenter un prolongement de ces techniques aux problèmes de robustesse.

Par robustesse, nous entendons ici le fait de synthétiser des diagrammes pour lesquels certaines données sont inconnues, mais bornées. Une solution est dite robuste si les spécifications données sous forme de contraintes sont satisfaites pour toute les valeurs des perturbations possibles et si elle minimise la valeur "pire-cas" de l'objectif. Les résultats ont pour base deux travaux récents sur l'optimisation convexe [3, 10].

La notion de robustesse en antennes n'est pas non plus nouvelle; on citera par exemple les travaux de Cantoni *et al.* [1]. Les auteurs essaient de développer des algorithmes adaptatifs alors que nous pensons au contraire que les progrès de capacités de calcul des ordinateurs permettent l'emploi d'algorithmes itératifs efficaces (*e.g.*, les méthodes de points intérieurs).

2 Exemples de problèmes

2.1 Problèmes de moindres carrés

Un exemple classique de synthèse revient à trouver les poids (amplitudes, phases) donnant le mieux possible un diagramme désiré $D(\theta)$:

$$\min_w \sum_{i=1}^L |G(\theta_i) - D(\theta_i)|^2 \quad (1)$$

où $G(\theta)$ est une fonction linéaire, complexe des poids w . Par exemple, pour un réseau linéaire à la fréquence f_0 ,

$$f_0 = c/\lambda,$$

on a

$$G(\theta) = \sum_{i=1}^n w_i e^{j \frac{2\pi}{\lambda} x_i \cos \theta}$$

où x_i donne la position de chaque élément. Un tel problème peut être résolu par moindres carrés (voir [2]). On verra dans la section suivante l'effet de perturbations sur une telle solution et la manière de rendre l'approche robuste.

L'approche utilisée dans [3] revient à calculer l'effet d'une perturbation $\|\Delta\| < \rho$ sur la matrice $[A \ b]$ du problème $\min \|Ax - b\|$ en donnant la solution x qui minimise le résidu pire-cas :

$$r_{\text{pire}}(x) = \max_{\|\Delta\| \leq \rho} \|(A + \Delta A)x - (b + \Delta b)\|, \quad (2)$$

avec $\Delta = [\Delta A \ \Delta b]$.

On montre que ce problème est équivalent à

$$\text{minimiser } \lambda \text{ sujet à } \|Ax - b\| \leq \lambda - \tau, \quad \left\| \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \leq \tau. \quad (3)$$

qui se résout par optimisation convexe [9].

2.2 Problèmes d'optimisation de lobes secondaires

Si on cherche à minimiser le niveau des lobes secondaires d'une antenne réseau, une erreur sur les paramètres tels que la fréquence de fonctionnement peut conduire à de fortes erreurs. On peut montrer (voir [5]) que le problème initial

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{sujet à} \quad & |G(\theta_i)| < t, \quad i = 1, \dots, L \end{aligned} \quad (4)$$

avec une fréquence nominale f_0 peut être transformé en

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{ sujet à } \quad & |G(\theta_i)| + \Gamma |w| < t \quad i = 1, \dots, L \end{aligned} \quad (5)$$

avec

$$\Gamma_{ij} = 2 \sin \min(\pi |\Delta f| x \cos \theta / c, \pi / 2)$$

et $|f - f_0| < \Delta f$. Enfin $|w|$ représente ici le vecteur de composantes $|w_i|$. Ce problème est un problème d'optimisation convexe dont on verra un exemple dans la suite. D'une manière générale, une incertitude sur les coefficients du diagramme G induisent l'introduction de la matrice de robustesse Γ . Lorsque l'incertitude est quelconque, tous les coefficients Γ_{ij} sont égaux et les contraintes du problème (5) deviennent

$$|Cw - d| + \rho \|w\|_1 < t \quad (6)$$

où $\|w\|_1 = \sum_i |w_i|$. On les qualifie alors de non-structurées.

2.3 Optimisation robuste

L'optimisation robuste consiste de manière plus générale à trouver la solution optimale d'un problème pour lequel les données peuvent être incertaines. En particulier on considère ici un problème de programmation semi-définie [11],

$$\text{minimiser } c^T x \text{ sujet à } F(x) \geq 0 \quad (7)$$

où $F(x)$ est une inégalité de matrices linéaire

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \geq 0 \quad (8)$$

avec $x \in \mathbb{R}^m$ et $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $i = 0, \dots, m$.

On modélise alors l'incertitude par :

$$F_i(\Delta_i) = F_i + \Delta_i + \Delta_i^T, \quad i = 0, \dots, m,$$

avec $\Delta = [\Delta_0 \dots \Delta_m]$. Pour un niveau donné de perturbation $\rho \geq 0$, on cherche une solution robuste à notre problème, c'est à dire un vecteur x qui résout le problème min-max :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & c^T x \\ \text{ sujet à} \quad & F(x, \Delta) \geq 0 \text{ pour tout } \Delta, \|\Delta\| \leq \rho. \end{aligned} \quad (9)$$

Dans [10], nous avons montré le résultat suivant :

Théorème 2.1 — Une solution x au problème (9) peut-être donnée par programmation semi-définie :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{ avec } \quad & \begin{bmatrix} F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i - \tau I & \begin{bmatrix} 1 & x^T \end{bmatrix} \otimes \rho I \\ \begin{bmatrix} 1 & x^T \end{bmatrix}^T \otimes \rho I & \tau I \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

où \otimes représente le produit de Kronecker [4, p.646].

3 Exemples numériques

3.1 Moindres carrés

La figure 1 compare des diagrammes issus de techniques de moindres carrés (figure de gauche) et de moindres carrés

robustes (figure de droite). Le réseau comporte 20 éléments séparés d'une demi-longueur d'onde et la perturbation maximale a pour norme $\rho = 10$. Les courbes en trait plein donnent le diagramme optimal et les courbes en pointillés correspondent aux pires perturbations. On voit en particulier que les dégradations du lobe principal sont moindres par approche robuste. De manière plus précise, on peut comparer les résidus des moindres carrés, puisque ce sont eux qui sont minimisés : le résidu par moindres carrés est optimal et vaut 0.49 alors que par moindres carrés robustes, il vaut 1.35. Par contre la comparaison des résidus pire-cas donne respectivement 2.56 et 2.25. Les moindres carrés robustes sont bien optimaux dans le sens robuste du terme.

3.2 Minimisation des lobes secondaires

La figure 2 correspond à une incertitude non structurée sur les termes du diagramme $G(\theta_i)$. Le réseau a ici 30 éléments avec un lobe principal large de 15° . Cette incertitude induit des termes Γ_{ij} identiques correspondant aux contraintes du type de l'équation (6). La courbe en trait plein donne le niveau minimal des lobes secondaires sans perturbation (-43dB) et les autres courbes correspondent à la dégradation maximale correspondant à différents niveaux d'incertitude maximale ρ . On voit ainsi le niveau des lobes secondaires se dégrader pour trois valeurs de ρ , à savoir 0.05, 0.1 et 0.5. On en déduit une grande sensibilité des diagrammes à des perturbations quelconques.

D'une manière générale, il est toujours intéressant de pouvoir "structurer" les perturbations. Un exemple de perturbation est une incertitude sur la fréquence, comme présenté par le problème (5), par opposition à une incertitude générale (dite non-structurée). On pourra se référer pour ces notions à [3]. La figure 3 donne pour le même réseau que précédemment, la dégradation maximale du niveau des lobes secondaires pour différentes incertitudes de sur la valeur de la fréquence, $\Delta f / f_0$ de 0.1% à 5%. La courbe en pointillés donne le niveau minimal des lobes secondaires sans perturbation (-43dB) et les autres courbes correspondent à la dégradation maximale correspondant à l'incertitude en fréquence. L'intérêt de ces incertitudes structurées est d'améliorer la mesure des dégradations.

4 Conclusion

Ce court article avait pour ambition de présenter de nouvelles techniques d'évaluation de solutions de problèmes de traitement d'antennes robustes dans la lignée de récents travaux d'application de l'optimisation convexe aux sciences de l'ingénieur. Il n'a pas l'ambition de l'exhaustivité, aussi proposons nous au lecteur les références suivantes : pour l'optimisation convexe, [11, 9], pour les problèmes de robustesse [3, 10] et pour les applications au traitement d'antennes [6, 7, 8].

Références

- [1] A. Cantoni, X. G. Lin, and K. L. Teo. A new approach to the optimization of robust antenna array processors. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 41(4) :403–411, April 1993.
- [2] B. D. Carlson and D. Willner. Antenna pattern synthesis using weighted least squares. *IEE Proc.*, 135, Part H(1) :11–16, February 1992.
- [3] L. El Ghaoui and H. Lebre. Robust solutions to least squares problems with uncertain data. In SIAM, editor, *Recent Advances in Total Least Squares techniques and in Errors-in-Variables Modeling*, pages 161–170. SIAM, 1997.
- [4] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1980.
- [5] H. Lebre. *Synthèse de diagrammes de réseaux d’antennes par optimisation convexe*. PhD thesis, Université de Rennes I, November 1994.
- [6] H. Lebre. Synthèse de diagrammes de réseaux d’antennes par optimisation convexe. In *Quinzième Colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*, volume 1, pages 241–244, 1995.
- [7] H. Lebre. Optimal beamforming via interior point methods. *The Journal of VLSI Signal Processing*, 14(14) :29–41, November 1996.
- [8] H. Lebre and S. P. Boyd. Antenna array pattern synthesis via convex optimization. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45(3) :526–532, March 1997.
- [9] M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, and H. Lebre. Second-order cone programming. 1997. Submitted to *Linear Algebra and Applications*, special issue on linear algebra in control, signals and image processing.
- [10] F. Oustry, L. El Ghaoui, and H. Lebre. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. Submitted to *SIAM J. Opt.*, 1996.
- [11] L. Vandenberghe and S. Boyd. Semidefinite programming. *SIAM Review*, 38(1) :49–95, March 1996.

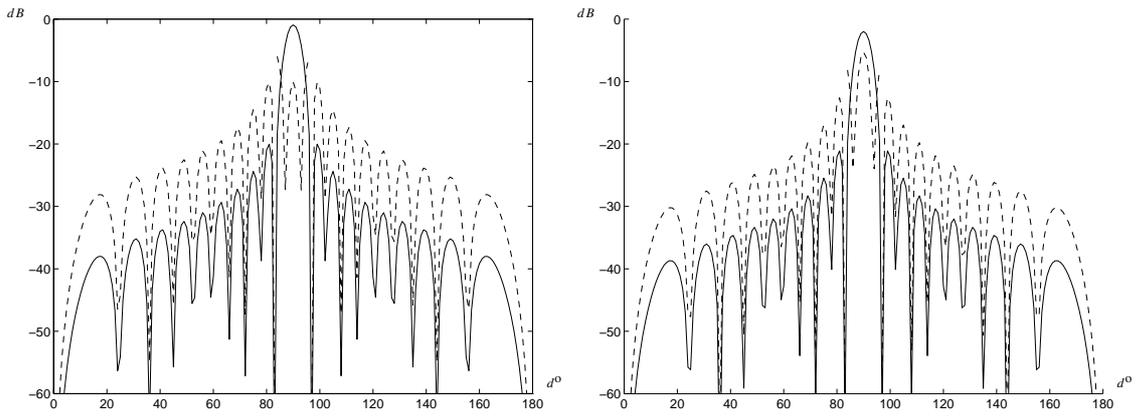


FIG. 1 — Diagrammes optimaux et perturbés par moindres carrés et moindres carrés robustes.

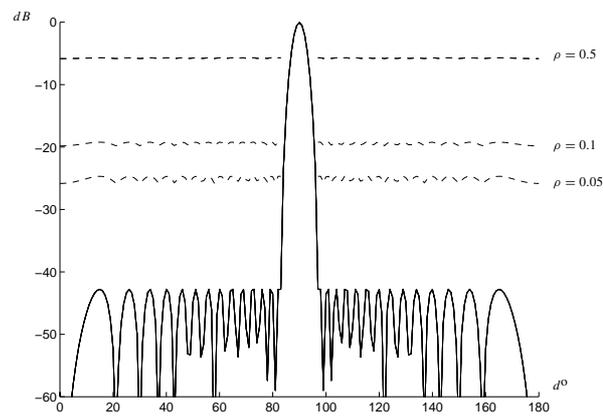


FIG. 2 — Minimisation des lobes secondaires pour une incertitude non structurée (générale).

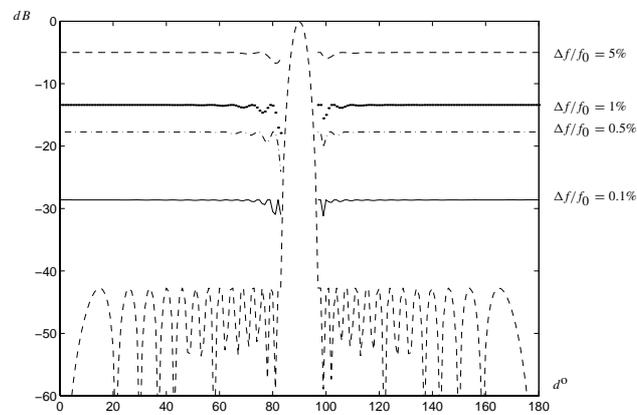


FIG. 3 — Minimisation de lobes secondaires robustes en fréquence.