METHODES D'IDENTIFICATION PARAMETRIQUE POUR DES SIGNAUX NON-STATIONNAIRES PERTURBES PAR UN BRUIT BLANC

M. BARLAUD (1), G. ALENGRIN (1), J. MENEZ (1)
(2) Y. GRENIER, D. ABOUTAJDINE (3)

(1) L.A.S.S.Y. 41 bd Napoléon III, 06041 Nice Cédex
(2) E.N.S.T. - SYC 46 rue Barrault 75634 Paris Cédex 13
(3) L.E.E.S.A. BP 1014, Rabat, MAROC
et GRECO SARTA Systèmes adaptatifs

RESUME

L'objet de cette étude est de présenter des méthodes d'identification basées sur une modélisation A.R. non-stationnaire. Les coefficients du modèle dépendent du temps, et l'on fait l'hypothèse qu'ils s'expriment comme combinaisons linéaires, avec des poids inconnus mais invariants, de fonctions du temps données a priori. Les observations du signal étant bruitées, deux méthodes d'estimation adaptées à ce cas, seront présentées. La première peut être vue comme une extension de la méthode de Pisarenko. La seconde est une procédure itérative de suppression du biais.

ABSTRACT

This paper describes identification methods based upon nonstationary AR modelling. The coefficients of the model are time-dependent, and one makes the hypothesis that they are expressed as linear combinations, with unknown but time-invariant weights, of known functions of time. The samples of the signal are noisy, and we present two estimation methods adapted to this situation. The first one may be seen as an extension of Pisarenko method, and the second one is an iterative procedure for removal of bias.

1 - MODELISATION

On considère une classe de signaux non-stationnaires représentés par l'équation :

$$x_t + \sum_{i=1}^{p} a_i(t-i)\, x_{t-i} = 0 \qquad (1)$$

et observés par une séquence bruitée :

$$y_t = x_t + e_t \qquad (2)$$

où e_t est un bruit blanc stationnaire, indépendant de x_t, de moyenne nulle et de variance σ^2.

On suppose que les paramètres du modèle varient lentement de telle façon qu'ils puissent être approchés par une combinaison linéaire de fonctions du temps appelées fonctions de base [1],[2],[3]:

$$a_i(t) = \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\, f_j(t) \qquad (3)$$

où $f_j(t)$, $j = 0 \ldots\ldots m$ sont les éléments de la base. Les fonctions usuelles sont :

- les fonctions sinusoïdales
- les polynômes de Legendre
- Les fonctions sphéroïdales aplaties [4] ...

Une telle description d'un modèle non-stationnaire est bien adaptée à de nombreux signaux, en particulier des signaux biologiques (parole [2],[7], sonars animaux [10], EEG, ECG ...).

Nous nous intéressons ici au problème posé par le bruit additif e_t sur les observations. Il est clair que l'emploi d'estimateurs autorégressifs [1-3] sur de tels signaux conduit comme dans le cas stationnaire à une estimation biaisée [5]. Nous présentons en section 2 une méthode globale pour l'estimation des paramètres a_{ij} qui incorpore l'information sur le bruit (blancheur) d'une manière analogue à la méthode de Pisarenko [11]. En section 3, nous décrivons une méthode récursive permettant de supprimer le biais d'un estimateur par moindres carrés. En section 4, nous décrivons une alternative à cette méthode.

Mais auparavant, nous définissons les vecteurs Y_t X_t et E_t qui sont au coeur des estimateurs que nous proposons. Ces vecteurs sont les produits des signaux scalaires par les fonctions de base :

$$X_t = [x_t f_o(t) \ldots x_t f_m(t)]^T$$

$$Y_t = [y_t f_o(t) \ldots y_t f_m(t)]^T$$

$$E_t = [e_t f_o(t) \ldots e_t f_m(t)]^T$$

A partir de (1) et (2), il résulte que le signal observé est décrit par un modèle ARMA spécial :

$$y_t + \sum_{i=1}^{p} a_i(t-i)\, y_{t-i} = e_t + \sum_{i=1}^{p} a_i(t-i)\, e_{t-i}$$

où les paramètres de la partie MA sont les mêmes que ceux de la partie AR.

En considérant respectivement les projections des paramètres variants dans le temps, des observations et de la séquence de bruit sur les fonctions de base nous pouvons réécrire ce modèle sous la forme :

$$y_t + \left[Y_{t-1}^T \dots Y_{t-p}^T\right]\theta = e_t + \left[E_{t-1}^T \dots E_{t-p}^T\right]\theta$$

avec $\theta = \left[a_{10} \dots a_{1m}\ a_{20} \dots a_{pm}\right]^T$

On observe ainsi le gain apporté par l'hypothèse (3) : le modèle est devenu une régression stationnaire sur un signal vectoriel.

2 - ESTIMATION DES PARAMETRES, APPROCHE GLOBALE [1],[7]

Etant donnés les échantillons $y_1 \dots y_N$, il s'agit d'estimer les coefficients a_{ij} du modèle défini par (1-3). On réécrira l'équation (1) sous forme vectorielle :

$$x_t + [X_{t-1}^T \ \dots \ X_{t-p}^T]\ \theta = 0$$

Puis en se servant du fait que x_t et e_t sont indépendants, on en déduira :

$$E\begin{bmatrix} y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{bmatrix} [y_t Y_{t-1}^T \dots Y_{t-p}^T] \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} e_t \\ E_{t-1} \\ \vdots \\ E_{t-p} \end{bmatrix} [e_t E_{t-1}^T \dots E_{t-p}^T] \begin{bmatrix} 1 \\ \theta \end{bmatrix}$$

Cette équation en terme d'espérance mathématique nous conduira à un estimateur en remplaçant l'espérance par une somme temporelle qui sera :

$$\sum_{t=p+1}^{N} \begin{bmatrix} y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p} \end{bmatrix} [y_t \ Y_{t-1}^T \dots Y_{t-p}^T] \begin{bmatrix} 1 \\ \hat\theta \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat\theta \end{bmatrix}$$

Dans cette approche le vecteur $\hat\theta$ estimé est solution de l'équation précédente, c'est donc un vecteur propre généralisé de la matrice de covariance mélangeant y_t et Y_{t-i}. Soit R_{yY} cette matrice, et soit $F_N^{1/2}$ le facteur gauche de la décomposition de Cholesky de $F_N = F_N^{1/2}\ F_N^{T/2}$, l'estimateur précédent s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F^{-1/2} \end{bmatrix} RyY \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F_N^{-T/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde\theta \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde\theta \end{bmatrix} \qquad (4)$$

avec $\tilde\theta = F_N^{T/2}\ \theta$

On est ainsi ramené à un problème de vecteurs propres ordinaires. Le remplacement de $F_N^{1/2}$ par $F_N^{1/2}\ U$ où U est une matrice unitaire quelconque conduit au même vecteur $\hat\theta$, et peut permettre, par un choix judicieux de U d'améliorer la résolution numérique des équations.

La matrice F_N est dans le cas général une matrice diagonale par blocs de dimension (m+1,m+1). Ces blocs sont exprimés comme :

$$F_N = \begin{bmatrix} F_N^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_N^{(p)} \end{bmatrix} \text{ et } F_N^{(i)} = \sum_{t=p+1}^{N} \begin{bmatrix} f_o(t-i) \\ \vdots \\ f_n(t-i) \end{bmatrix} [f_o(t-i) \dots f_m(t-i)]$$

Dans le cas particulier où la base est orthogonale sur l'intervalle [1,N], on peut considérer que $F_N^{(i)} = I\ \forall i$ et dans ce cas $\theta = \tilde\theta$ (exemple : les $f_i(t)$ sont les polynômes de Legendre discrets sur [1,N]). L'équation (4) admet 1+p(m+1) solutions différentes, mais une seule garantit la positivité de la matrice de covariance des x_t et X_{t-i}, c'est celle obtenue pour la plus petite valeur propre de (4), valeur qui s'identifie à la variance σ^2 du bruit, le vecteur propre associé devenant le vecteur $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ \theta \end{smallmatrix}\right]$ après normalisation de la première composante. Ce résultat est une copie dans le cadre non-stationnaire étudié ici, de la solution proposée par Pisarenko [11] pour l'estimation d'une somme de sinusoïdes bruitées.

3 - APPROCHE BASEE SUR L'ESTIMATION DES RESIDUELS

Soit θ le vecteur de paramètres correspondant au signal x_t. L'estimateur $\hat\alpha_N$ obtenu en utilisant la méthode des moindres carrés sur les valeurs observées du signal est biaisé. La limite de $\hat\alpha_N$ quand N tend vers l'infini est alors :

$$\lim_{N\to\infty} \hat\alpha_N = \theta - P_N\ \sigma^2\ F_N\ \theta \qquad (5)$$

avec

$$F_N = \sum_{t=1+p}^{N} \begin{bmatrix} F_t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_t \end{bmatrix}$$

et

$$F_t = \begin{bmatrix} f_o(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix} [f_o(t) \ \dots \ f_m(t)]$$

P_N est l'inverse de la matrice de covariance des Y_t. On peut observer que si σ^2 est connu, il devient aisé de déterminer θ à partir de $\hat\alpha_N$. Il est donc naturel de tenter d'estimer la variance σ^2 du bruit de mesure. Soit $\beta_t(N)$ le résiduel à l'instant t défini par :

$$\beta_t(N) = y_t + \left[Y_{t-1}^T \ \dots \ Y_{t-p}^T\right] \hat\alpha_N \qquad (6)$$

Nous utilisons la somme des carrés des résiduels pour obtenir une estimation de la variance du bruit :

$$R_N = \sum_{t=p+1}^{N} \beta_t^2(N) \qquad (7)$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité on obtient :

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{R_N}{N+\hat{\theta}_{N-1}^T F_N \hat{\alpha}_N} \quad (8)$$

Malheureusement l'estimation de σ^2 qui permettrait de corriger le biais de $\hat{\alpha}_N$ dépend elle-même de cette estimation biaisée, aussi une simple correction est-elle insuffisante.

Une première approche consiste à résoudre le système d'équations (5) et (8) de façon récursive dans le temps. Nous rappellerons ici les équations proposées dans [5].

$$\hat{\alpha}_N = \hat{\alpha}_{N-1} + K_N[y_N + Y_{N-1}^T \hat{\alpha}_{N-1}]$$

$$K_N = P_{N-1} Y_{N-1} / Q_N \quad (6)$$

$$Q_N = 1 + Y_{N-1}^T P_{N-1} Y_{N-1}$$

$$P_N = P_{N-1} - P_{N-1} Y_{N-1} Y_{N-1}^T P_{N-1}$$

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\alpha}_{N+1} + P_{N+1} \hat{\sigma}_{N+1}^2 F_{N+1} \hat{\theta}_N$$

$$\hat{\sigma}_{N+1}^2 = \frac{R_{N+1}}{(N+1) + \hat{\theta}_N^T F_{N+1} \hat{\alpha}_{N+1}}$$

$$F_{N+1} = R_N + \beta_{N+1}^2(N) Q_N^{-1}$$

Cette procédure assure la convergence de $\hat{\theta}_N$ vers θ. La méthode que nous proposons en section 4 est une procédure plus rapide assurant le même résultat.

4 - ESTIMATION SIMULTANEE DE LA VARIANCE DU BRUIT ET DES PARAMETRES, METHODE ITERATIVE

Le système d'équation (5) et (8) peut être résolu de manière itérative [8][9]. La solution consiste à calculer d'abord les paramètres biaisés α_N, puis les résiduels et la somme des carrés des résiduels R_N sur l'intervalle $[1,N]$. Le système (5) est un système linéaire d'ordre $p\times(m+1)$

$$(I-P_N F_N \sigma^2)\, \theta = \hat{\alpha}_N \quad (7)$$

On propose alors la solution suivante. Prendre comme conditions initiales $\theta(i=0) = \hat{\alpha}_N$

i) Calculer la puissance du bruit.

$$\hat{\sigma}_{(i)}^2 = \frac{R_N}{N + \theta_{(i)}^T F_N \hat{\alpha}_N}$$

ii) Résoudre le système (7) connaissant σ^2 par une méthode de "splitting" évitant ainsi une inversion de matrice :

$$\theta(k+1) = \hat{\alpha}_N + P_N F_N \sigma_i^2 \theta(k)$$

avec $\theta(k=0) = \theta(i-1)$

Répéter cette procédure jusqu'à ce que θ et σ^2 convergent.

Cette procédure a été mise en oeuvre sur un des signaux tests définis par le GRECO SARTA ; une sinusoïde modulée linéairement, dont la fréquence croît de 0.2 F_e à 0.4 F_e sur N=512 points de mesure. La figure 1 montre la convergence de l'estimation de σ^2 pour un rapport signal à bruit SNR = -3dB.

5 - CONCLUSION

Nous avons présenté trois algorithmes pour l'estimation de modèles autorégressifs de signaux déterministes bruités. La première méthode est une méthode globale, mais fournit une solution non-linéaire sous forme d'un problème aux vecteurs propres. Les deux autres méthodes sont linéarisées et donc itératives, la seconde est récursive sur le temps, la troisième est globale sur la durée du signal, et résout itérativement le problème non linéaire en alternant deux solutions linéaires. Les simulations de ces algorithmes seront présentées lors de la conférence.

REFERENCES

[1] Y. GRENIER - "Time-dependent ARMA model of non-stationary signals" IEEE Trans. ASSP Vol 31 n° 4 pp 899-911 Aug. 1983.

[2] M. HALL, A.V. HOPPENHEIM, A. WILLSKY - "Time varying parametric modeling of speech" IEEE CDC New Orléans 1977 pp 1085-1091.

[3] D. ABOUTAJDINE, M. NAJIM - "Time varying linear prediction - New results" Morocco workshop on signal processing - Marrakech (Maroc) Sept. 1984.

[4] D. SLEPIAN - "Prolate spheroïdal wave functions, Fourier analysis and uncertainty - V : the discrete case" B.S.T.J. Vol. 57 n° 5 May - June 1978.

[5] G. ALENGRIN, M. BARLAUD, J. MENEZ - "Unbiased estimation of non-stationary signals in noise" IEEE ASSP - Octobre 1986.

[6] M. MORF, B. DICKINSON, T. KAILATH, A. VIEIRA - "Efficient solution of covariance equations for linear prediction" IEEE Trans. ASSP Vol 25 n° 5 pp 429-433, 1977.

[7] Y. GRENIER - "Modélisation de signaux non-stationnaires" Thèse d'Etat, Université de Paris-Sud, Octobre 1984.

[8] M. BARLAUD, G. ALENGRIN, J. MENEZ - "Recursive parameters estimation of non stationary AR signals disturbed by white noise. EUPSICO Septembre 1986 LA HAYE.

[9] M. BARLAUD, G. ALENGRIN, J. MENEZ - "Estimation de la fréquence de signaux sinusoïdaux non stationnaires dans du bruit coloré - GRETSI Nice 1987.

[10] Y. GRENIER - "Nonstationary signal modelling with application to bat echolocation calls", Acustica, Vol 61, n°3, pp 155-165, 1986.

[11] V.F. PISARENKO - "The retrieval of harmonics from a covariance function", Geoph. J. of Royal Astrom. Soc., Vol 33, n° 3, pp 347-366, 1973.

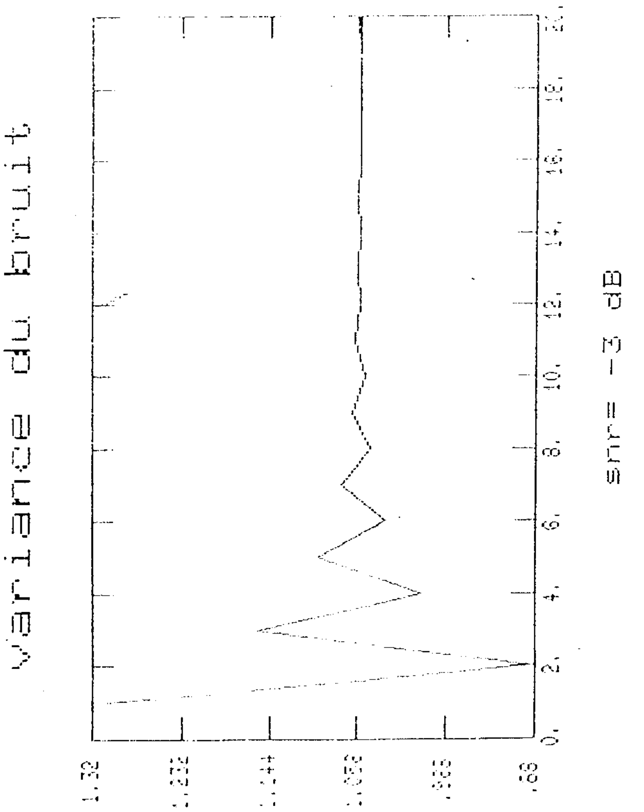

Figure 1. Evolution d'erreur de prédiction pour le signal test, par la procédure du paragraphe 4.