

APPROXIMATION DU FILTRE DE MARR-HILDRETH PAR UN FILTRE A SUPPORT ETROIT

Marc BERNARD, Remy NITSCHÉ

ENST Laboratoire Image 46 rue Barrault
75634 PARIS CEDEX 13

RESUME

Une méthode d'approximation du filtre de Marr-Hildreth est proposée utilisant un critère de moindres carrés pondérés. Pour obtenir une bonne estimation il nous faut, aussi, imposer une contrainte au filtre: sa réponse en fréquence doit être nulle pour la fréquence zéro. La procédure d'estimation entraîne un certain nombre de déformations sur le spectre, et la réponse impulsionnelle, que l'on essaie de contrôler à l'aide de la pondération. Des résultats sont présentés sur des images.

SUMMARY

A method based on weighted least square for approximating the Marr-Hildreth filter is proposed. In order to reach a good fitting we must impose a constraint: the frequency response must be zero for the zero frequency. This method induces some distortions on the spectrum and on the impulse response which we try to reduce with the weighting factor. Some results are shown on images

1. INTRODUCTION

L'utilisation de filtres du type laplacien de gaussienne (LOG) (<HIL2>, <MARR>), en particulier pour la détection de contour, a suscité beaucoup de débats ces dernières années.

Deux axes principaux de confrontation peuvent être dégagés: d'abord les mérites respectifs des opérateurs non-directionnels par rapport aux directionnels, l'utilisation des passages par zéro des images filtrées, l'utilisation de filtres multiéchelles il s'agit, en l'occurrence, d'un débat sur le principe même de la méthode de Marr-Hildreth (<HARRAL1>); mais une autre discussion à lieu sur les problèmes d'implémentation du filtre LOG, en particulier ceux liés au temps de calcul (<MED>). En effet les filtres LOG sont des filtres à support large (20*20, 30*30 ou plus) et présentent une lourdeur certaine de mise en oeuvre. Ce point a d'ailleurs fait l'objet d'une vive polémique entre Harralick et Hildreth (<HIL1>, <HARRAL2>). Il nous a donc semblé intéressant de réfléchir sur des méthodes permettant une approximation satisfaisante des filtres LOG tout en essayant d'en limiter le plus possible le support.

2. CALCUL D'UN FILTRE OPTIMAL AVEC CONTRAINTE

Le but de ce travail est le calcul d'un filtre à support étroit approchant au sens des moindres carrés la réponse en fréquence d'un filtre LOG d'écart-type donné. Mais pour obtenir une formulation exploitable du problème, nous devons faire les remarques suivantes:

- les filtres LOG sont des filtres à symétrie circulaire, il s'en suit que l'optimisation pourra être faite en monodimensionnel.

- nous aurons à calculer un filtre RIF à phase nulle du fait de la symétrie paire du filtre LOG

à partir de ces considérations nous pouvons exprimer la réponse en fréquence du filtre monodimensionnel cherché.

$$H(f) = h_0 + \sum_{i=1}^P (2 h_i \cos(2\pi i f)) \quad (1)$$

Nous allons, donc, chercher à minimiser l'erreur quadratique entre cette réponse et la réponse du filtre LOG. Si σ est l'écart type voulu, la réponse en fréquence du filtre LOG est donnée par la relation suivante:

$$Y(f) = k f e^{-2\pi\sigma^2 f^2} \quad (2)$$

Appelons Y le vecteur de la réponse en fréquence calculé en N points, h le vecteur des coefficients du filtre, l'erreur quadratique s'exprime alors de la façon suivante:

$$\epsilon^2 = (Y - Ch)^T (Y - Ch) \quad (3)$$

où C est une matrice fréquentielle obtenue à partir de la relation (1) et qui peut être écrite comme suit:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2\cos(2\pi f_2) & \dots & 2\cos(2\pi P f_2) \\ 1 & 2\cos(2\pi f_3) & \dots & 2\cos(2\pi P f_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2\cos(2\pi f_N) & \dots & 2\cos(2\pi P f_N) \end{pmatrix} \quad (4)$$

La taille de cette matrice est N*(P+1), avec (2P+1) égal au nombre de coefficients choisis pour la réponse impulsionnelle approchée. Mais le problème tel qu'il est formulé pour l'instant ne mène pas à une solution satisfaisante. Il nous faut encore ajouter une condition supplémentaire sous la forme d'une contrainte sur les coefficients du filtre. En fait leur somme doit être nulle pour assurer la nullité de réponse en fréquence du filtre à la fréquence nulle. Cette contrainte s'exprime de la façon suivante:

$$V^T h = 0 \quad (5)$$

où V est un vecteur tel que:



$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Pour exprimer l'erreur quadratique nous allons utiliser un multiplicateur de Lagrange λ nous obtenons donc le formulation suivante:

$$\epsilon^2 = (Y - Ch)'(Y - Ch) + \lambda V'h \quad (7)$$

L'optimisation est donc menée maintenant par rapport aux coefficients du filtre, mais en prenant en compte le multiplicateur λ . Ensuite nous calculons λ en exprimant la contrainte, ce qui nous donne les résultats suivants:

$$h_{optimal} = (C'C)^{-1}C'Y - 1/2\lambda(C'C)^{-1}V \quad (8)$$

$$\lambda = 2 \frac{V'(C'C)^{-1}C'Y}{V'(C'C)^{-1}V} \quad (9)$$

Des résultats obtenus par cette méthode sont montrés sur les figures 1 et 2.

La première correspond à un écart type égal à 4., la seconde à un écart type de 2. Sur ces figures la courbe continue correspond au filtre approximé, celle en tirets au filtre LOG exact. Dans les deux cas nous avons $P=6$. Trois remarques peuvent être faites à partir de ces courbes:

- la contrainte de réponse nulle à la fréquence nulle est bien tenue
- il y a une déformation non négligeable de la réponse en fréquence en basse fréquence
- il y a apparition d'ondulations importantes en haute fréquence ce qui aura pour effet de dégrader la tolérance de la méthode par rapport au bruit (apparition de nombreux contours de bruit).

Une autre constatation peut être faite: le filtre obtenu est très peu différent de celui proposé par Harralick par ailleurs (<HARRAL1>). Cela s'explique par le fait que les deux méthodes sont fondamentalement basées sur le théorème de projection orthogonale. Ainsi nous avons été amenés à tenter d'améliorer nos résultats en utilisant une pondération fréquentielle.

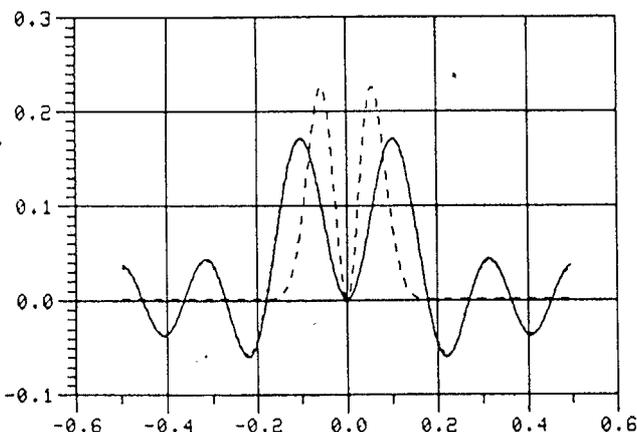


figure 1

$\sigma=4., P=6$, courbe continue: filtre approximé, tirets: filtre LOG

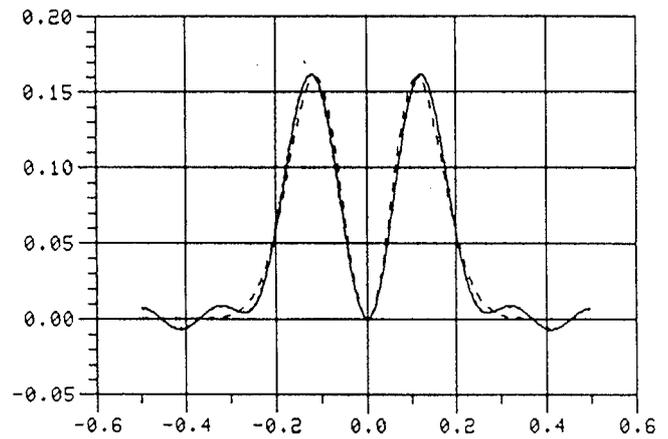


figure 2

$\sigma=2., P=6$, courbe continue: filtre approximé, tirets: filtre LOG

3. INTRODUCTION D'UNE PONDERATION FREQUENTIELLE

L'erreur quadratique définie ci-dessus accorde la même importance à toutes les zones du spectre. Or nous avons vu que les déformations sur le spectre ne sont pas uniformément réparties, en particulier les hautes fréquences présentent des ondulations importantes. Il semble donc intéressant d'utiliser une méthode de moindres carrés pondérés.

$$\epsilon^2 = (Y - Ch)'W(Y - Ch) + \lambda V'h \quad (10)$$

où W est notre matrice de pondération définie de la façon suivante:

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & & & & & \\ & w_2 & & 0 & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & 0 & & w_{N-1} \\ & & & & & & w_N \end{pmatrix} \quad (11)$$

En fait cette formulation est encore trop générale, nous découperons notre pondération fréquentielle en trois zones correspondant respectivement aux basses fréquences, aux fréquences intermédiaires et aux hautes fréquences. Ainsi pour réaliser notre estimation il faudra fournir cinq paramètres caractéristiques: trois coefficients de pondérations et deux entiers délimitant nos trois zones fréquentielle. L'optimisation faite à partir de cette nouvelle formulation mène aux résultats suivants:

$$h_{optimal} = (C'WC)^{-1}C'WY - 1/2\lambda(C'WC)^{-1}V \quad (12)$$

$$\lambda = 2 \frac{V'(C'WC)^{-1}C'WY}{V'(C'WC)^{-1}V} \quad (13)$$

Les courbes 3 et 4 nous donnent des résultats de cette méthode toujours pour des σ égaux à 4. ou 2.. Les conventions de représentation sont les mêmes que précédemment, avec, en plus, en pointillés la réponse du filtre approximé sans pondération. Nous constatons que nous avons obtenu une forte diminution de l'amplitude des ondulations en HF sans entrainer une déformation considérable en BF par rapport au cas précédent. Nous avons fait porter l'essentiel de l'optimisation sur les HF.

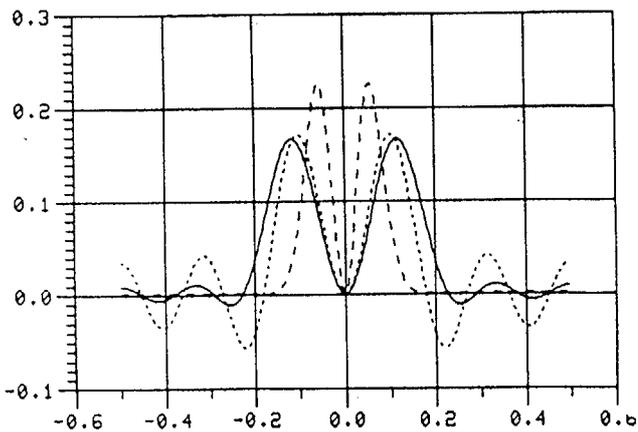


figure 3

$\sigma=4$, $P=6$, courbe continue: avec pondération
pointillés: sans pondération, tirets: filtre LOG

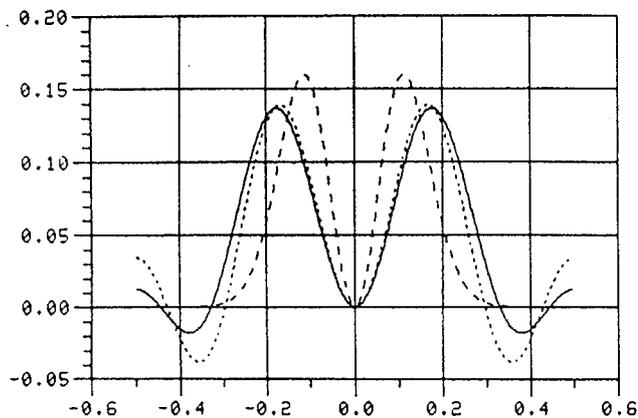


figure 4

$\sigma=2$, $P=4$, courbe continue: avec pondération
pointillés: sans pondération, tirets: filtre LOG

4. PASSAGE AU BIDIMENSIONNEL

Pour passer en bidimensionnel nous utiliserons la propriété de symétrie circulaire du filtre LOG. L'utilisation de cette symétrie en spatial nécessiterait l'utilisation préalable d'une transformée de Bessel-Hankel. Nous avons préféré utiliser une approche fréquentielle, nous passons en bidimensionnel dans le domaine des fréquences spatiales par symétrie circulaire (il faut noter que nous avons à notre disposition une formule exacte pour le calcul de la réponse en fréquence en un point quelconque, il s'agit de la formule (1)). Ensuite par utilisation d'une transformée de Fourier bidimensionnelle nous obtenons la réponse impulsionnelle 2D en ne retenant que le nombre de coefficients qui nous intéresse. Le défaut de cette approche est qu'elle entraîne une certaine dégradation de la contrainte à la fréquence nulle due, en fait, à des problèmes de fenêtre dans la transformée de Fourier inverse 2D, l'utilisation d'une fenêtre classique (Hamming...) apporterait peut-être une amélioration. Mais la dégradation restant tout à fait tolérable nous nous sommes contentés de la fenêtre rectangulaire.

5. RESULTATS SUR DES IMAGES

Des résultats de filtrage nous sont maintenant présentés sur les figures 5 à 10. Les figures 5 à 7 correspondent respectivement à des filtrages par un filtre sans pondération, avec pondération et un vrai filtre LOG pour $\sigma=2$, les figures 8 à 10 faisant de même pour $\sigma=4$.

Nous constatons peu de différences pour l'écart-type le plus faible. Par contre pour $\sigma=4$, nous constatons que l'approximation à pour effet de modifier assez fortement la réponse du filtre, ceci apparaissant clairement sur les détails fins comme les doigts du personnage, par exemple, qui sont mieux vus par les filtres approchés ce qui est, paradoxalement, un inconvénient.

6. CONCLUSION

Cette approche peut se révéler intéressante à condition de pouvoir injecter de l'information supplémentaire dans la procédure d'optimisation. C'est ce que nous avons fait en introduisant une pondération fréquentielle, et de la sorte, nous avons pu notablement améliorer les problèmes en haute fréquence spatiale. Mais le point faible de cette approche reste la déformation assez importante en basse fréquence, qui résulte en une distorsion de la réponse impulsionnelle, en particulier le lobe principal de celle-ci devient nettement plus étroit. Tout ce passe comme si nous faisons la synthèse d'un filtre d'écart-type inférieur à celui qui est désiré. Une modification de la formulation des contraintes est en cours pour essayer d'affiner notre estimation en basse fréquence. Le problème se pose aussi de rendre automatique la procédure d'estimation en particulier vis à vis de la définition de la pondération fréquentielle.

Références:

- <HARAL1> Digital step edges from zero crossing of second directional derivatives. IEEE PAMI vol. 6 no 1 Janvier 1984
- <HIL1> W.E. GRIMSON, E.C. HILDRETH Comments on "Digital edges from zero crossing of second derivatives" IEEE PAMI vol. 7 no 1 Janvier 1985
- <HARAL2> Author's reply IEEE PAMI vol. 7 no 1 Janvier 1985
- <HIL2> E.C. HILDRETH The detection of intensity change by computer and biological vision systems. CGIP vol. 22 1983
- <MAR> D. MARR, E.C. HILDRETH Theory of edge detection Proc. R. Soc. Lond. vol 207 1980
- <MED> J.S. CHEN, A. HUERTAS, G. MEDIONI Very fast convolution with LOG masks proc. CVPR Juin 1986

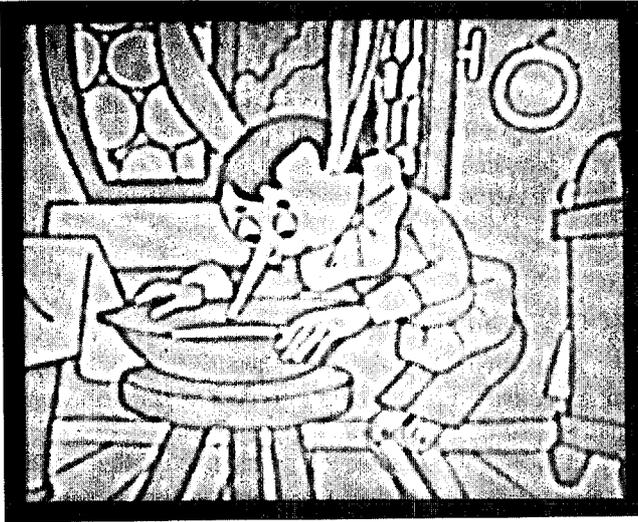


figure 5: $\sigma=2$, sans pondération

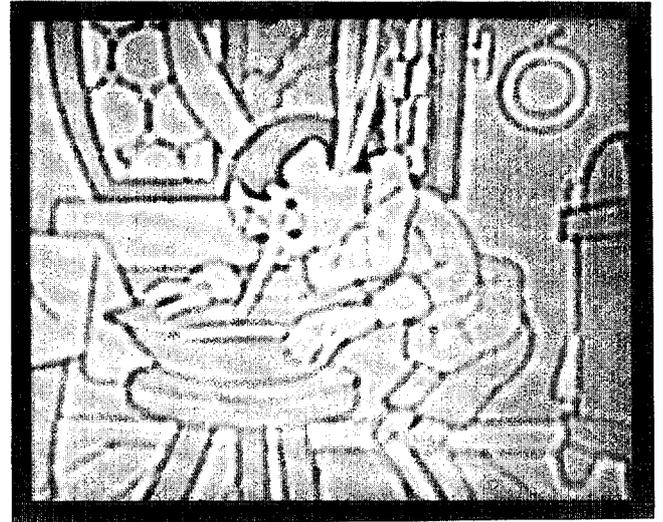


figure 8: $\sigma=4$, filtre sans pondération

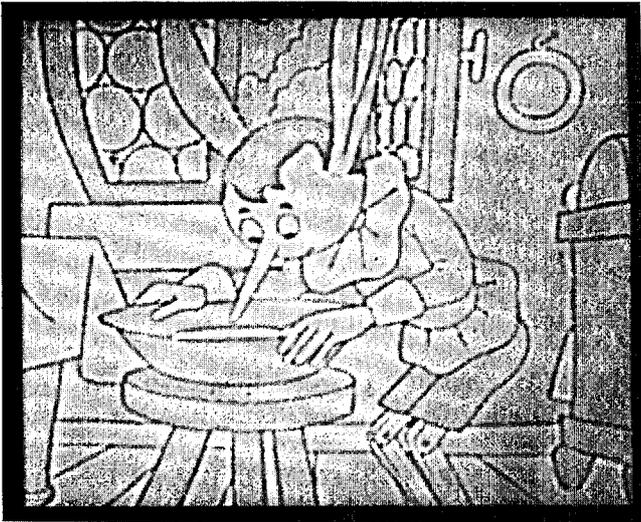


figure 6: $\sigma=2$, avec pondération

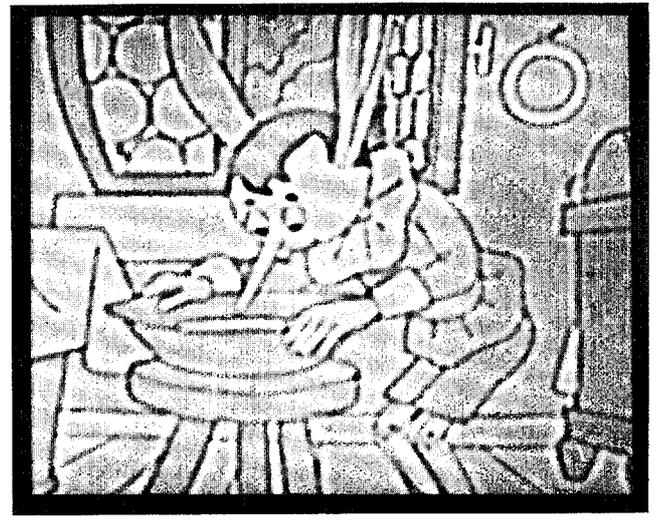


figure 9: $\sigma=4$, avec pondération

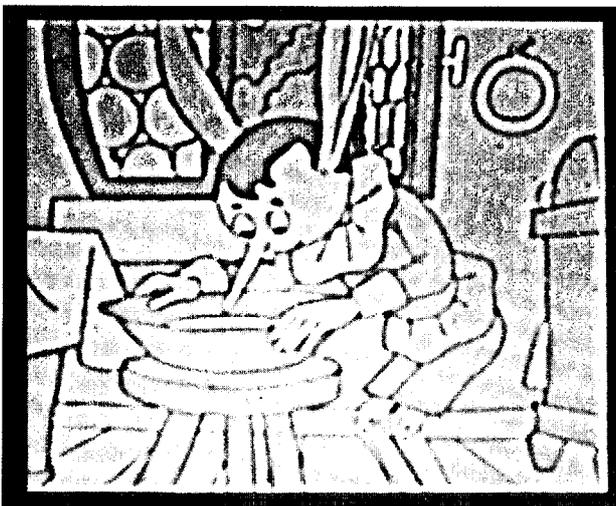


figure 7: $\sigma=2$, filtre LOG



figure 10: $\sigma=4$, filtre LOG