

GAIN ASYMPTOTIQUE DU TRAITEMENT SPATIAL ADAPTATIF EN SONAR ACTIF

D. Billon

,THOMSON SINTRA ASM - Route de Sainte Anne du Portzic - 29601 BREST cedex

On évalue le gain du traitement spatial adaptatif vis-à-vis du traitement conventionnel pour un sonar à haute résolution formant une image du fond marin. Le gain en résolution est exprimé ici sous la forme d'un allongement équivalent de l'antenne munie du traitement conventionnel. Cet allongement, déterminé dans le cas où la matrice de covariance des signaux de l'antenne peut être parfaitement estimée, est celui de l'antenne qui permet d'obtenir l'image conventionnelle la plus proche de l'image adaptative obtenue avec l'antenne de référence. Il dépend de la distribution angulaire de puissance du champ observé et du rapport signal à bruit. Dans certains cas ayant un intérêt pratique, il peut être proche du doublement.

I. INTRODUCTION

Le traitement spatial adaptatif des signaux délivrés par un réseau de capteurs concurrence le traitement conventionnel des antennes de sonar passif par sa plus grande aptitude à séparer deux sources proches du champ observé, ou à rejeter des interférences qui bien qu'en provenance de sources localisées dans des directions autres que celle d'observation, affectent l'estimation du signal reçu dans cette direction. De manière générale, ce traitement d'antenne a été évalué dans des situations où le champ observé est constitué d'un petit nombre de sources dont les signaux rayonnés se superposent au champ du bruit ambiant.

Un sonar actif formant une image du fond marin est confronté à une distribution de réflecteurs spatialement continue à l'échelle de sa résolution. S'agissant d'un système d'imagerie cohérente, la rugosité de la surface réfléchissante, qui est supérieure à la longueur d'onde des sonar HF ($f > 100$ kHz), donne aux signaux reçus un caractère aléatoire ; ce phénomène est physiquement analogue à celui du fourmillement (speckle) de l'optique cohérente. Une modélisation probabiliste du champ observé, qui est à la base du traitement adaptatif, est donc bien adaptée à un tel cas.

La qualité de l'image s'apprécie en termes de résolution et de contraste. Ces deux aspects conditionnent en effet l'estimation de la densité spatiale de puissance du champ réfléchi, donnée par le niveau moyen local de l'image. A partir d'une antenne linéaire on obtient une représentation du champ réfléchi suivant deux dimensions : distance et gisement. Cette représentation n'est pas isotrope car la résolution en distance du sonar est déterminée par la largeur de la bande spectrale de l'émission, alors que sa résolution en gisement dépend de la longueur de l'antenne de réception L rapportée à la longueur d'onde λ .

De la même manière qu'on améliore la résolution en distance en élargissant le spectre du signal temporel, on améliore la résolution en gisement en augmentant le rapport L/λ qui est la largeur du spectre des fréquences spatiales. En effet toute composante monochromatique, de fréquence $f = c/\lambda$ ($c =$ vitesse de propagation), du champ existant le long de la droite qui

The adaptative spatial processing gain with respect to conventional processing is evaluated for a high resolution sonar devoted to seabed imaging. In this paper the resolution gain is expressed as an equivalent increase of the length of the array equipped with conventional processing. This increase is evaluated when the covariance matrix of array signals can be exactly estimated, by looking for the array from which the conventional image can be obtained which is the closest one to the adaptative image obtained with the original array. It depends on the observed field power angular distribution and on signal-to-noise ratio. In particular cases with practical interest it can be close to factor two.

supporte l'antenne, est une fonction de la variable spatiale x/λ , x étant l'abscisse des points de la droite, égale à la transformée de Fourier du champ réfléchi décrit par une fonction de la variable $\sin\theta$, θ étant le gisement, i.e. la direction d'arrivée sur l'antenne repérée par rapport à son axe normal. L'allongement de l'antenne se heurte à des contraintes pratiques de coût et d'encombrement et peut être limité par la cohérence spatiale du milieu de propagation [1]. L'élévation de la fréquence, équivalente à la réduction de λ , implique une diminution de la portée du sonar causée par une plus forte absorption des ondes par le milieu.

La résolution en distance des sonars HF d'imagerie du fond marin est le plus souvent meilleure que la résolution latérale, produit de la résolution angulaire par la distance. On a donc le souci d'accroître la résolution angulaire et, compte tenu des limitations physiques exposées précédemment, il est naturel de chercher l'obtention d'un tel gain en changeant la nature du traitement spatial, lequel demeure aujourd'hui, dans ce type de sonar, un traitement conventionnel. Le but de cet article est de quantifier le gain de résolution susceptible d'être apporté par le traitement adaptatif, en l'exprimant sous la forme d'un allongement équivalent de l'antenne munie du traitement conventionnel.

II. RAPPELS THEORIQUES

Soit $X = (x_1, \dots, x_N)^T$ le vecteur de \mathbb{C}^N dont les composantes sont les enveloppes complexes des signaux délivrés par les N capteurs de l'antenne, échantillonnées simultanément au temps t , l'origine des temps étant prise à l'instant d'émission. Nous supposons que le lieu géométrique des réflecteurs dont le signal contribue à une même composante de X , est identique pour les N composantes. Il est composé des points dont la distance au centre de l'antenne est dans un intervalle de largeur $c\tau/2$, si τ est la durée de l'impulsion émise, autour de $ct/2$. Deux conditions, satisfaites dans la plupart des cas réels, autorisent cette hypothèse :

- la propagation et la réflexion sont spectralement blanches dans la bande du signal,
- la différence des temps de propagation entre deux points de l'antenne pour une onde issue d'un point appartenant à ce lieu est petite vis-à-vis de τ (il suffit pratiquement que cette contrainte soit satisfaite pour les points situés dans l'ouverture à -3 dB du lobe d'insonification).



X s'écrit alors :

$$(1) \quad X = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} s(\theta) D(\theta) d\theta + Z.$$

$D(\theta)$ est une fonction vectorielle connue qui donne la phase d'une onde arrivant dans la direction θ aux centres de phase des capteurs :

$$(2) \quad D(\theta) = (e^{-jk\xi_1(\theta)}, \dots, e^{-jk\xi_N(\theta)})^T$$

où $k=2\pi/\lambda$ et $\xi_1(\theta), \dots, \xi_N(\theta)$ sont les différences de trajet de propagation entre les N capteurs et un point choisi arbitrairement sur l'antenne pour origine des phases. $s(\theta)d\theta$ est la composante du signal délivré par un capteur qui serait situé à l'origine des phases, due aux réflecteurs situés dans le secteur $d\theta$ autour de θ . Enfin, $Z = (z_1, \dots, z_N)^T$ est le vecteur des bruits qui affectent les signaux des capteurs.

Le traitement conventionnel et le traitement adaptatif estiment linéairement le champ réfléchi $s(\theta)$ à partir de X sous la forme d'un vecteur $Y = (y_1, \dots, y_M)^T$:

$$(3) \quad y_m = W_m^T X.$$

Le vecteur W_m de \mathbb{C}^N est choisi de telle sorte que le lobe de directivité de la voie y_m ait une valeur imposée, prise ici égale à 1, dans la direction θ_m :

$$(4) \quad W_m^T D(\theta_m) = 1.$$

Les directions θ_m couvrent le secteur de l'image avec un pas constant compatible avec la résolution du sonar. Pour le traitement conventionnel, on a

$$(5) \quad W_m = \frac{1}{N} D(\theta_m).$$

Le lobe de directivité $|W_m^T D(\theta)|$ est maximum dans la direction de consigne θ_m de la voie.

Le traitement adaptatif est basé sur une modélisation de $s(\theta)$ par un processus aléatoire blanc dans la bande des fréquences spatiales délimitées par l'antenne, ce qui signifie

$$(6) \quad E(x_m \bar{x}_n) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \gamma(\theta) e^{-jk(\xi_m(\theta) - \xi_n(\theta))} d\theta + E(z_m \bar{z}_n)$$

avec $\gamma(\theta) = E[|s(\theta)|^2]$ et $1 \leq m, n \leq N$. En vertu de cette hypothèse la puissance moyenne d'une voie y_m définie par (3) est donnée par la relation

$$(7) \quad E(|y_m|^2) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \gamma(\theta) |W_m^T D(\theta)|^2 d\theta + W_m^T \Gamma_Z W_m$$

où Γ_Z est la matrice de covariance du bruit. Le vecteur W_m est déterminé en vue de minimiser $E(|y_m|^2)$ tout en satisfaisant la contrainte exprimée par (4). Suivant (4), on peut réécrire (7) sous une forme utile à l'interprétation de ce critère :

$$(8) \quad E(|y_m|^2) \approx \int_{\theta_m - \varepsilon}^{\theta_m + \varepsilon} \gamma(\theta) d\theta + \left(\int_{-\pi/2}^{\theta_m - \varepsilon} + \int_{\theta_m + \varepsilon}^{\pi/2} \right) \gamma(\theta) |W_m^T D(\theta)|^2 d\theta + W_m^T \Gamma_Z W_m$$

pour ε suffisamment petit. Minimiser $E(|y_m|^2)$, fonction de W_m , revient à minimiser la somme des deux derniers termes du membre de droite de l'équation (8), qui sont respectivement la puissance moyenne de la composante du signal de voie induite par les réflecteurs situés en dehors du voisinage immédiat de la direction de consigne θ_m et la puissance du bruit. La solution de ce problème est [2]

$$(9) \quad W_m = \frac{\Gamma_X^{-1} D(\theta_m)}{D(\theta_m)^T \Gamma_X^{-1} D(\theta_m)}$$

Γ_X est la matrice de covariance de X .

III. ESTIMATION DE Γ_X

Le calcul des vecteurs de formation de voie W_m suivant l'équation (9) nécessite l'estimation préalable de la matrice de covariance Γ_X à partir d'une suite de réalisations du vecteur aléatoire X . Ces réalisations peuvent être obtenues au moyen d'une diversité temporelle ou fréquentielle.

La diversité temporelle peut être, comme en écoute passive, celle des échantillons successifs des signaux de l'antenne. Mais dans notre cas, ces échantillons ne sont pas a priori relatifs à la même distribution angulaire de puissance $\gamma(\theta)$ du champ observé, ni par conséquent à la même matrice de covariance Γ_X dont les coefficients sont donnés par (6) ; ils se rapportent en effet à des zones du fond séparées en distances. Toutefois la stationnarité en distance de la réponse acoustique du fond peut souvent être supposée supérieure à la résolution en distance du sonar, justifiant ainsi l'estimation de Γ_X à partir de plusieurs échantillons successifs des signaux de l'antenne.

La diversité temporelle peut aussi être celle liée à l'insonification périodique du fond. La décorrélation entre deux réalisations de X se rapportant à la même zone du fond, mais séparées temporellement par la période de récurrence du sonar, peut provenir de la stationnarité temporelle limitée du milieu ou des mouvements de l'antenne qui occasionnent un déplacement latéral au moins égal à sa longueur pendant la période de récurrence. Dans ce dernier cas il est nécessaire de mesurer les mouvements en translation et en rotation de l'antenne avec des précisions respectives supérieures à la résolution en distance et à la résolution en gisement, en vue de recalculer spatialement les signaux des capteurs de récurrences différentes ; ce recalage est concrétisé par la détermination des instants d'échantillonnage homologues pour compenser le déplacement suivant l'axe normal, et par une correction des phases des N signaux déterminée en fonction de la rotation en gisement et du déplacement latéral.

La diversité fréquentielle consiste à filtrer les signaux des capteurs dans plusieurs canaux spectralement contigus, ce que l'on réalise pratiquement par une transformation de Fourier des signaux temporels. L'indépendance des différentes composantes ainsi obtenues résultent du non-recouvrement en fréquence des canaux. Elles gardent cependant la même covariance spatiale quand la bande totale est suffisamment étroite pour que les hypothèses faites au début du §II soient vraies. La résolution en distance de chaque canal est dégradée, par rapport à la résolution en distance fixée par la bande totale, d'un facteur égal au nombre de canaux.

Bien que le nombre d'observations stationnaires indépendantes du vecteur X soit de nature à limiter les performances du traitement adaptatif, nous n'envisageons ici que le cas asymptotique où Γ_X peut être parfaitement connue. Par conséquent les résultats qui suivent, doivent être considérés comme étant une borne supérieure du gain que l'on peut attendre de ce traitement.

IV. IMAGES ASYMPTOTIQUES

Que le traitement soit adaptatif ou conventionnel, la modélisation aléatoire du champ $s(\theta)$ reste pertinente car celui-ci ne constitue pas directement l'information désirée laquelle réside dans sa distribution angulaire de puissance $\gamma(\theta)$. On estime cette dernière par le carré des modules des voies y_m . Dans chacune des directions θ_m de l'image, l'erreur d'estimation est la somme d'un biais et d'une composante aléatoire centrée $|y_m|^2 - E[|y_m|^2]$. Lorsqu'on dispose de plusieurs observations indépendantes de X , condition requise pour la mise en oeuvre du traitement adaptatif, on réduit la composante aléatoire par moyennage des images formées à partir de ces observations. Dans le cas asymptotique ne subsiste que le biais.

La puissance moyenne d'une voie y_m calculée suivant (3) est

$$(10) E[|y_m|^2] = W_m^\dagger \Gamma_X W_m.$$

Nous notons ce nombre réel strictement positif c_m ou selon que W_m est le vecteur de la formation de voie conventionnelle (cf. (5)) ou celui de la formation de voie adaptative (cf. (9)). On a

$$(11) c_m = \frac{D(\theta_m)^\dagger \Gamma_X D(\theta_m)}{N^2}$$

$$(12) a_m = \frac{1}{D(\theta_m)^\dagger \Gamma_X^{-1} D(\theta_m)}$$

Γ_X dépend de $\gamma(\theta)$ et de la covariance du bruit des capteurs Z . Nous supposons ce dernier spatialement stationnaire et décorréolé, soit

$$(13) \Gamma_Z = \sigma^2 I$$

où I est la matrice identité d'ordre N et σ^2 est la puissance de chacune des N composantes du bruit. Cette hypothèse est bien adaptée au cas des sonars HF où le bruit propre des capteurs domine en général le bruit ambiant du milieu marin. Γ_X s'écrit alors sous la forme (cf. (6))

$$(14) \Gamma_X = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \gamma(\theta) D(\theta) D(\theta)^\dagger d\theta + \sigma^2 I.$$

Considérons maintenant un réseau linéaire périodique de capteurs qui est la configuration de l'antenne la plus souvent adoptée dans la pratique. Après une éventuelle correction des phases des signaux des capteurs pour focaliser l'antenne sur la distance d'observation, celle-ci peut être considérée comme appartenant au champ lointain ; d'où

$$(15) D(\theta) = (1, e^{-jkdsin\theta}, \dots, e^{-jk(N-1)dsin\theta})$$

si d est le pas entre capteurs et si l'origine des phases est prise sur le premier capteur. On peut supposer que le champ observé est limité au secteur $-\lambda/2d < \sin\theta < \lambda/2d$, puisqu'une onde dont la direction est en dehors, à une loi de phase sur les N capteurs identique à celle qui serait la sienne si elle arrivait dans la direction du secteur équivalente modulo λ/d . En pratique la largeur du secteur insonifié doit donc être inférieure à λ/d . On peut réécrire alors (14) sous la forme :

$$(16) \Gamma_X = \int_{-\lambda/2d}^{\lambda/2d} \left(\frac{\gamma(\theta)}{\cos\theta} + \frac{d}{\lambda} \sigma^2 \right) D(\theta) D(\theta)^\dagger dsin\theta.$$

On voit ainsi que le bruit des capteurs est équivalent au signal qui serait induit par une distribution de puissance constante, égale à $d\sigma^2/\lambda$, dans l'intervalle $[-\lambda/2d, \lambda/2d]$ du domaine des $\sin\theta$. Le rapport signal à bruit correspondant sur les capteurs est

$$(17) r = \frac{\int_{-\theta_d}^{\theta_d} \gamma(\theta) d\theta}{\sigma^2}$$

avec $\theta_d = \arcsin(\lambda/d)$.

Nous considérons ici une distribution angulaire de puissance dans le secteur $[-\theta_d, \theta_d]$ de la forme

$$(18) \begin{cases} \gamma(\theta) = 0 & \text{si } |\sin\theta| \leq \delta/2, \\ \gamma(\theta) = \cos\theta & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce choix correspond dans notre cas d'application à une ombre acoustique de largeur δ en gisement qui peut être provoquée par le relief du fond ou par un objet y reposant, qui occulte la zone située immédiatement derrière. Autour du secteur δ le fond est supposé uniformément réverbérant à un facteur $\cos\theta$ près, sans importance significative puisque le secteur insonifié est toujours suffisamment étroit pour que ce facteur soit négligeable, mais choisi ici pour que la densité de puissance dans le domaine des $\sin\theta$ soit exactement 1 en dehors de $[-\delta/2, \delta/2]$. Cette distribution angulaire de puissance a en fait un intérêt général car le problème de la résolution en imagerie acoustique résiste pour une grande part dans la restitution des compo-

santes haute fréquence de $\gamma(\theta)$ associées aux transitions brusques entre les zones où cette fonction varie lentement. On peut ici modifier l'importance relative de ces composantes haute fréquence en jouant sur les paramètres δ et r . Ce dernier détermine le contraste ρ entre les deux zones stationnaires du champ observé lorsqu'on y intègre comme dans (16) le champ de bruit équivalent. La densité de puissance dans le domaine des $\sin\theta$ vaut $d\sigma^2/\lambda$ dans l'ombre de largeur δ et $1+(d\sigma^2/\lambda)$ en dehors. En exprimant σ^2 en fonction de r à partir de (17) et (18), on obtient l'expression suivante du contraste :

$$(19) \rho = 1 + \frac{r}{1 - \delta d/\lambda}.$$

La figure 1 donne les images asymptotiques, conventionnelle $C=(c)$ et adaptative $A=(a)$, dans le cas $N=40$, $\delta=2\lambda/L$ et $m=100$. Pour une longueur d'antenne $L=Nd$ fixée, le nombre N de capteurs influe peu sur l'image au voisinage de l'ombre pourvu que $\delta d/\lambda \ll 1$ ou, de manière équivalente, $N \gg \delta L/\lambda$. Le nombre de points calculés est très supérieur à ce qu'il serait nécessaire pratiquement, ceci afin qu'une interpolation linéaire soit suffisante pour tracer la courbe correspondant à une variation continue de la direction de consigne des voies.

On constate que l'image adaptative a un meilleur contraste, 15 dB au lieu de 10 dB pour l'image conventionnelle, mais qui reste inférieur au contraste réel $10 \log r$ voisin de 20 dB. De plus les flancs de l'ombre sont plus raides ; sur les images calculées à partir d'un nombre d'observations de X limité, cette propriété favorise le positionnement visuel des bords de l'ombre dans le bruit que constitue la composante aléatoire du niveau de chaque point. Ce positionnement effectué à chaque ligne de l'image conduit à l'estimation du contour bidimensionnel de l'ombre. Les courbes de la figure 1 indiquent que l'ombre adaptative apparaîtra en moyenne plus large que l'ombre conventionnelle, dont la largeur à -3 dB est voisine de la largeur de l'ombre réelle. L'explication de ce phénomène est donnée par la figure 2 où sont superposés les lobes de directivité de la voie conventionnelle et de la voie adaptative pointées dans la direction du bord de l'ombre : on voit que, contrairement au lobe conventionnel, le lobe adaptatif n'atteint pas son maximum dans la direction de consigne, mais à proximité du centre de l'ombre de façon à minimiser l'énergie interceptée en dehors de l'ombre, ce qui se traduit dans cette zone par des lobes secondaires de niveaux inférieurs à ceux du lobe conventionnel.

V. EVALUATION DU GAIN

Pour évaluer le gain du traitement adaptatif vis-à-vis du traitement conventionnel, nous cherchons la longueur $L'=N'd$ de l'antenne linéaire périodique de pas d composée de N' capteurs qui, munie du traitement conventionnel, fournit l'image $C'=(c')$ la plus proche, dans un sens à préciser, de l'image adaptative $A=(a)$ obtenue avec l'antenne de référence de longueur $L=Nd$. Le contenu informationnel d'une image n'étant pas modifié par un facteur d'homothétie, nous définissons la proximité de C' par rapport à A à partir de la distance entre la droite vectorielle engendrée par C' dans \mathbb{R}^M (M est le nombre de points des images) et A . Nous choisissons la distance euclidienne pour laquelle le calcul de la distance entre un point et une droite est particulièrement simple. Le gain g du traitement adaptatif vis-à-vis du traitement conventionnel est alors défini par la relation

$$(20) g = \frac{N'}{N} \Leftrightarrow \|A - \frac{(A, C')}{\|C'\|^2} C'\| \text{ minimum}$$

où $\|\cdot\|$ et (\cdot, \cdot) sont la norme et le produit scalaire euclidiens dans \mathbb{R}^M . Les images A et C' sont formées dans un secteur étroit autour de l'ombre, défini par $|\sin\theta| < (\delta/2) + (\lambda/L)$, ceci afin de favoriser la sensibilité du calcul de N' aux variations du profil du flanc d'ombre où se situent les composantes HF de l'image.

Les courbes de la figure 3 donnent g en fonction de δ pour différentes valeurs du contraste ρ . L'antenne de



référence a un nombre suffisant de capteurs ($N=40$) pour que, selon (19), on ait $r \approx \rho - 1$. Les valeurs élevées du contraste peuvent donc être confondues avec celles du rapport signal à bruit. Tant que celles-ci restent inférieures à 30 dB on constate que le gain, partant de 1 pour $\delta=0$, croît rapidement pour atteindre, à 10 % près, son maximum dès $\delta=2$. Le gain étant une fonction croissante de ρ , la courbe $\rho=\infty$ est l'enveloppe supérieure de la famille de courbes $g=f(\delta)$ paramétrées en ρ . On note que pour δ petit, la courbe du gain pour des valeurs modérées du rapport signal à bruit est proche de cette enveloppe. Celle-ci prend une allure linéaire à partir de $\delta=2$, mais nous n'avons pas pu calculer ses points au-delà de $\delta=5$, où g est voisin de 3, l'inversion de Γ_X devenant alors difficile à cause de son mauvais conditionnement. En fait cette courbe n'a qu'un intérêt théorique car, même si la dynamique des signaux des sonars HF excède couramment 70 dB, l'importance de l'absorption dans le milieu étant la cause de la forte variation du rapport signal à bruit avec la distance, d'autres facteurs vont limiter en pratique le gain à partir d'un certain seuil, notamment la précision avec laquelle on sait estimer Γ_X et définir $D(\theta)$.

La figure 4 permet de comparer l'image adaptative obtenue avec l'antenne de référence de longueur L , composée de $N = 40$ capteurs, et l'image conventionnelle la plus proche obtenue avec une antenne de longueur $L'=gL$, composée de $N'=gN$ capteurs, dans le même cas que celui illustré par la figure 1 : $\delta=2$ et $r=100$. On a alors $N'=70$, soit $g=1,75$. Quoique les deux images ne puissent être superposables car l'ombre adaptative est, indépendamment de la longueur de l'antenne, plus large dans sa partie supérieure qu'une ombre conventionnelle, ceci étant dû à la déformation du lobe adaptatif pour les directions de consigne proche du bord de l'ombre (cf. §IV et figure 2), on constate un bon accord quant aux profils des flancs d'ombre, ce qui est déterminant pour la résolution subjective de l'image.

VI. CONCLUSION

Nous avons montré que le traitement adaptatif est susceptible d'améliorer la résolution angulaire des sonars actifs dans des applications telles que l'imagerie du fond marin. Dans le cas asymptotique où la matrice de covariance des signaux de l'antenne est parfaitement connue, le gain exprimé ici en allongement équivalent de l'antenne munie du traitement conventionnel, peut atteindre un facteur voisin de 2 pour des valeurs du rapport signal à bruit raisonnables (20 à 30 dB). Quoique nous ayons abordé les modalités pratiques de l'estimation de la matrice de covariance, ce problème demeure une hypothèque, certainement pas réductible, quant à la validité des résultats asymptotiques dans une application réelle.

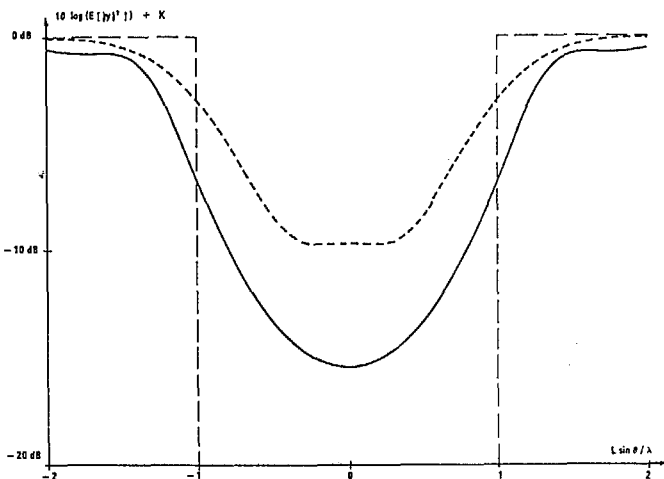


Figure 1

--- $\gamma(\theta)$
 — image adaptative
 -.- image conventionnelle } $r = 100. N = 40.$

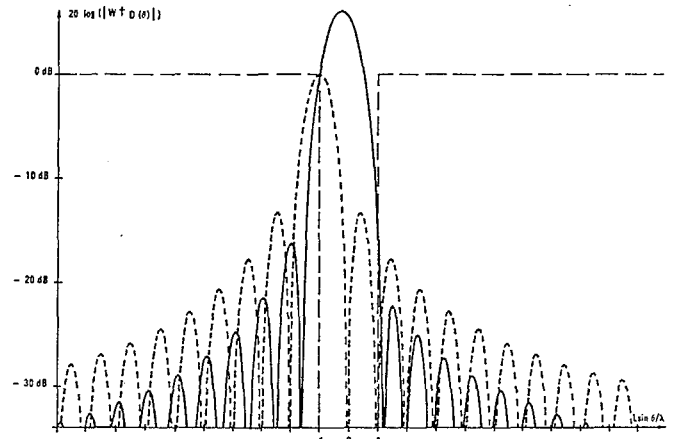


Figure 2

--- $\gamma(\theta)$
 — lobe adaptatif ($r=100$)
 -.- lobe conventionnel } direction de consigne
 } $\sin \theta = -R/L$

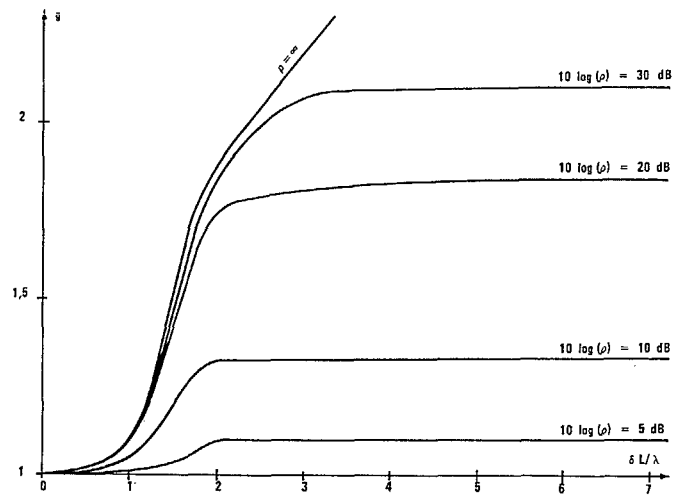


Figure 3

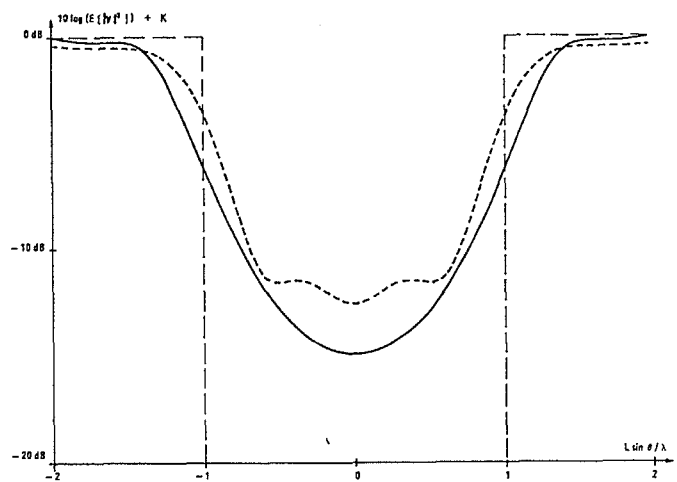


Figure 4

--- $\gamma(\theta)$
 — image adaptative $N=40$
 -.- image conventionnelle $N'=70$ } $r = 100$

Références

[1] Propagation sous-marine : mesure des stabilités spatiales et temporelles du plan d'onde. C. JAIN. G.R.E.T.S.I. 1985.
 [2] Underwater Passive Detection and Spatial Coherence Testing. G. BIENVENU. J.A.S.A. Vol 65 no 2. Février 1979.