FILTRAGE D'ANTENNE EN RADIOCOMMUNICATIONS.
RECEPTION OPTIMALE PAR INVERSION DE PUISSANCE

L. FETY et C. GUEGUEN

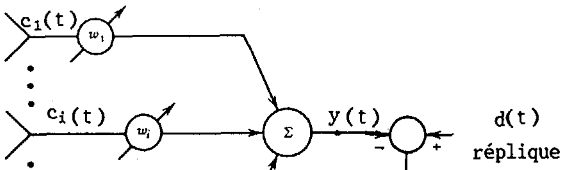
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TELECOMMUNICATIONS *
46, Rue Barrault 75634 PARIS CEDEX 13

Cet article propose une généralisation au cas d'une antenne réseau constituée de N capteurs (N>2), du concept d'"Inversion de Puissance" introduit initialement par Compton /1/.
En radiocommunications, la réception optimale d'une source dite "utile" en présence de sources d'interférence peut être réalisée en combinant linéairement les signaux des différents capteurs de l'antenne. La combinaison optimale peut être calculée en se donnant une "réplique" du signal de la source utile. Néanmoins, pour être utilisée, cette réplique doit être préalablement synchronisée avec le signal utile reçu par les capteurs.
Nous présentons l'inversion de puissance comme un prétraitement des signaux-capteurs permettant une telle synchronisation via l'amélioration du rapport signal à interférence.

This article proposes a generalization of the "Power Inversion" concept initially introduced by Compton /1/, where the network antenna is made up of N sensors (where N>2).
In radiocommunications optimal reception of an "efficient" source ammong other, interfering sources is had by combining signals from different antenna sensors. The optimal combination can be calculated by using a "replica" of the efficient source signal. In order to be used, however, this replica should be previously synchronized with the efficient signal received by the sensors.
We present the power inversion here as a preprocessing of sensor signals, which permits such a synchronisation by improving the interference signal ratio.

I. INTRODUCTION

En radiocommunications, dans certaines gammes de fréquence, comme la gamme "HF", les signaux des différentes sources présentes dans l'environnement (signaux-sources) peuvent parvenir aux différents capteurs de l'antenne réseau après avoir été atténués et réfléchis par l'environnement matériel immédiat de l'antenne.
Ces phénomènes interdisent le calcul des vecteurs directionnels des sources, sur la base des seules positions géographiques.
Dans ces conditions, les méthodes d'analyse spatiale telles que les méthodes "Haute résolution" deviennent inefficaces.
La réception optimale d'une source "utile" en présence d'interférences passe inévitablement par la discrimination des sources à partir des signaux émis. Une méthode performante consiste alors, à utiliser une réplique du signal utile, sur une certaine fenêtre temporelle, pour calculer le filtre de réception optimal.



Comme dans le cas de l'égalisation, cette réplique, pour être utilisée, doit être préalablement synchronisée avec le signal utile reçu par l'antenne.

* Cette étude a été menée en collaboration avec T.R.T. Télécommunications Radioélectriques et téléphoniques BP. 21 92352 Le Plessis Robinson Cedex - France

Cette synchronisation peut être effectuée en estimant la fonction d'intercorrélation de la réplique avec un des signaux capteurs et en détectant son maximum.

$$r_i(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} c_i(t-\tau).d^*(t) \qquad (1)$$

t: indice discret de l'instant d'échantillonnnage
$c_i(t)$: signal du capteur d'indice spatial i
d(t): réplique du signal utile de longueur T

Les sources étant supposées à bande étroite, on peut admettre que leur signal parvient à chacun des capteurs, affaibli et déphasé.
Ainsi, le vecteur de dimension N des signaux capteurs peut s'écrire

$$C(t) = Z.S(t) + B(t) \qquad (2)$$

Z est une matrice de gains complexes de dimension N*M.
S(t) est le vecteur des signaux sources de dimension M.
B(t) est un vecteur de bruit de dimension N.

Nous supposerons que le nombre de signaux sources formant le vecteur S(t) est inférieur ou égal au nombre de capteurs ($M \leq N$). Seuls les signaux sources de puissance nettement supérieure au bruit et surtout ceux de puissance comparable ou supérieure à celle du signal utile seront retenus pour former le vecteur S(t). Ceux-ci seront normalisés (puissance unité), leur puissance relative s'inscrira dans la matrice Z. Les autres signaux sources seront considérés comme du bruit.
Le bruit B(t) a diverses origines: bruit atmosphérique, contribution de sources de faible puissance, bruit de mesure, bruit de quantification, etc...

Nous supposerons que la puissance de ce bruit est très faible devant l'ensemble des signaux sources du vecteur S(t), et, nous négligerons ici, son influence.

La corrélation (1) peut être reécrite

$$r_i(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{M} z_{i,j}\cdot s_j(t-\tau).d^*(t) \qquad (3)$$

Le signal utile, étant arbitrairement choisi comme le signal source d'indice 1, est défini comme suit:

$$s_1(t) = \begin{cases} \text{inconnu} & \forall\ t \leq \tau_s \\ d(t-\tau_s) & \forall\ \tau_s < t \leq \tau_s+T \\ \text{inconnu} & \forall\ t > \tau_s \end{cases} \qquad (4)$$

avec d(t) normalisé

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d^2(t) = 1 \qquad (5)$$

L'estimation de $r_i(\tau)$ sera d'autant meilleure que T sera grand. On aura typiquement:

$$r_{i_\infty}(\tau) = \lim_{T\to\infty} r_i(\tau) = \begin{cases} 0 & \forall\,\tau \neq \tau_s \\ z_{i,1} & \tau = \tau_s \end{cases} \qquad (6)$$

$$T \neq \infty \qquad r_i(\tau) = r_{i_\infty}(\tau) + \xi_i(\tau) \qquad (7)$$

où $r_{i_\infty}(\tau)$ est la fonction d'intercorrélation pour $T = \infty$.

Dans le cas simple où les signaux sources sont considérés comme des variables aléatoires indépendantes, à distribution gaussienne centrée et à spectre blanc, le bruit d'estimation $\xi_i(\tau)$ est de moyenne nulle, et sa variance peut être calculée en fonction de T:

$$\sigma^2_{\xi_i}(\tau) = E\left\{\xi_i^2(\tau)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{j=2}^{M} z_{i,j}^2 \left[+ z_{i,1}^2 \quad \text{pour} \quad \tau \neq \tau_s \right] \qquad (8)$$

Le pic de corrélation destiné à fixer l'instant de synchronisation sera vu avec le rapport signal à bruit

$$T \cdot \frac{z_{i,1}^2}{\sum_{j=2}^{M} z_{i,j}^2} \qquad (9)$$

Celui-ci dépend du rapport de la puissance du signal de la source utile avec les puissances cumulées des sources d'interférence (rapport signal à interférence), mais aussi et surtout de T.

Dans le domaine des radiocommunications, le filtrage d'antenne a pour ambition d'améliorer des situations où le rapport signal à interférence est très défavorable, typiquement: -30 dB. Dans ces conditions, pour avoir un rapport signal à bruit de corrélation acceptable (15-20 dB), d'après (9), T doit être de l'ordre de 10^5. Il est impensable, dans la pratique, d'avoir recours à des répliques aussi longues.

II. INVERSION DE PUISSANCE

L'"inversion de puissance" est une méthode introduite par Compton /1/ dans le cas d'une antenne à deux capteurs, qui sous certaines conditions, inverse le rapport des puissances des différentes sources reçues par l'antenne.

II.1. Cas d'une antenne à deux capteurs.

Lorsque deux sources décorrélées entre elles sont reçues, les signaux-capteurs s'écrivent:

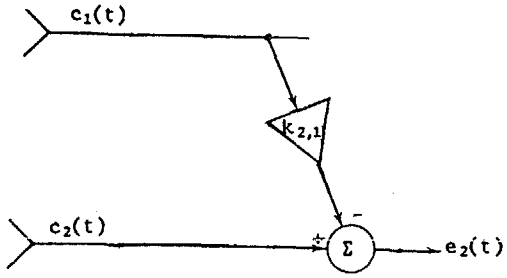
$$\begin{aligned} c_1(t) &= z_{1,1}\cdot s_1(t) + z_{1,2}\cdot s_2(t) \\ c_2(t) &= z_{2,1}\cdot s_1(t) + z_{2,2}\cdot s_2(t) \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\text{avec } E\left\{s_1(t).s_2^*(t)\right\} = 0$$

Compton propose de prédire linéairement, l'un des signaux-capteurs à partir de l'autre suivant l'équation

$$e_2(t) = c_2(t) - k_{2,1}\cdot c_1(t) \qquad (11)$$

qui définit la cellule élémentaire



L'inversion de puissance est réalisée lorsque $k_{2,1}$ est tel que $e_2(t)$ est de puissance minimale. Dans ce cas, $e_2(t)$ est orthogonale à $c_1(t)$.

$$E\left\{e_2(t).c_1^*(t)\right\} = 0 \qquad (12)$$

En vertu de (11), on peut poser

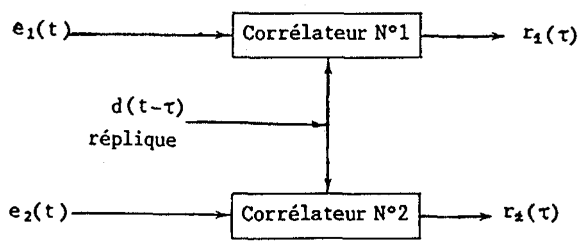
$$e_2(t) = z'_{2,1}\cdot s_1(t) + z'_{2,2}\cdot s_2(t) \qquad (13)$$

Pour vérifier (12), il est donc nécessaire que

$$\frac{z'^2_{2,1}}{z'^2_{2,2}} = \frac{z^2_{1,2}}{z^2_{1,1}} \qquad (14)$$

Ainsi le rapport des puissances des deux signaux sources constituant $c_1(t)$ se retrouve inversé dans $e_2(t)$.

Dans le cas où la source utile apparait avec un rapport signal à interférence défavorable (<0dB), la synchronisation de la réplique pourra être effectuée sur $e_2(t)$ avec cette fois, un rapport signal à interférence favorable (>0dB). Le cas le plus difficile survient lorsque le rapport signal à interférence est de 0 dB sur $c_1(t)$ et $e_2(t)$. Dans cette situation, d'après (9), une réplique de longueur inférieure à 100 sera cependant suffisante. L'inversion de puissance apparait comme un prétraitement transformant les signaux-capteurs. C'est à l'issue de celui-ci qu'on estimera les fonctions d'intercorrélation:



Seule la fonction d'intercorrélation faisant apparaître le plus grand maximum relatif sera retenue. L'instant de synchronisation sera déduit de celle-ci.

II.2. Cas d'une antenne à N capteurs recevant M sources ($M \leq N$)

Dans le cas "deux capteurs", l'inversion de puissance peut être vue comme une transformation linéaire des signaux capteurs.

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_{2,1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} \tag{15.a}$$

$$\text{tel que } E\left\{e_1(t).e_2^*(t)\right\} = 0$$

Que l'on pourra encore écrire

$$E(t) = L^{-1}.C(t)$$
$$E\left\{E(t).E^T(t)\right\} = D \tag{15.b}$$

$(.)^T$ signifie ici "transposé et conjugué".
L est une matrice triangulaire inférieure avec Diag(L) = I.
D est une matrice diagonale représentant la puissance de E(t).
D'après (15.b),

$$D = L^{-1}.E\left\{C(t).C^T(t)\right\}.L^{-T} = L^{-1}.R.L^{-T} \tag{16}$$

où R est la matrice de corrélation des signaux capteurs.

$$R = L.D.L^T \tag{17}$$

L et D s'obtiennent par décomposition "LDU" de R
Nous proposons de généraliser le concept d'inversion de puissance, proposée par Compton dans le cas d'une antenne à deux capteurs, au cas d'une antenne à N capteurs en suivant ce principe, à savoir, la transformation linéaire des signaux capteurs par le facteur triangulaire obtenu par décomposition "L.D.U" de leur matrice de corrélation.

III. INVERSION DE PUISSANCE ?

Par hypothèse, les signaux sources contenus dans le vecteur S(t) sont de puissance normalisée et décorrélés entre eux.

$$E\left\{S(t).S^T(t)\right\} = I \tag{18}$$

Ils forment donc une base orthonormée d'un sous-espace qu'on peut nommer "sous-espace source".
En utilisant (15.b), E(t) peut être écrit dans cette base

$$E(t) = L^{-1}.Z.S(t) \tag{19}$$

Sa matrice de corrélation étant diagonale (15.b), E(t) engendre lui-même une base orthogonale du sous-espace source.
S(t) est de dimension M, tandis que E(t) est de dimension N, avec par hypothèse $M \leq N$. N-M des composantes de E(t) sont donc nulles, ainsi que les N-M élements diagonaux de D correspondants. D étant obtenu par décomposition "L.D.U" de R, seuls les derniers élements diagonaux de D peuvent être nuls.
On a donc

$$\begin{aligned} &\forall\ N-M \leq i \leq N \quad d_{i,i} = 0 \\ &\forall\ N-M \leq i \leq N \quad e_i(t) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Soit $E_M(t)$, le vecteur constitué des M premières composantes, non nulles, de E(t), et D_M, la matrice D tronquée représentant la puissance de $E_M(t)$,

$$D_M = E\left\{E_M(t).E_M^T(t)\right\} \tag{21}$$

Les composantes du vecteur

$$\bar{E}_M(t) = D_M^{-1/2}.E_M(t) \tag{22}$$

forment une base, cette fois, orthonormée du sous-espace source. S(t) et $\bar{E}_M(t)$ sont deux bases orthonormées décrivant le même sous-espace. La relation qui lie tout vecteur de la base $\bar{E}_M(t)$ à son plus proche voisin (au sens de la plus grande projection) dans les vecteurs de la base S(t) peut être qualifiée d'application bijective, à l'exception de quelques cas que nous dirons "singuliers" et sur lesquels nous reviendrons.
En effet, chacun des signaux sources se retrouve sur un, et un seul, des M signaux $e_i(t)$ en occupant la position de plus forte puissance (par rapport aux autres signaux sources).
Les cas que nous avons qualifié de singuliers, se rencontrent lorsque n signaux sources ($1<n\leq M$) se retrouvent sur n signaux $e_i(t)$ avec la même puissance relative.
Le cas n=M représente la situation la plus défavorable: Les M signaux sources apparaissant sur les M signaux $e_i(t)$ avec la même puissance relative.
Dans ce cas, le rapport signal à interférence est égal pour l'ensemble des signaux $e_i(t)$.

$$\text{Rapport signal à interference} = \frac{1}{M-1} \tag{23}$$

Ainsi par exemple, pour une antenne constituée de 4 capteurs, en appliquant (9) on trouve que la longueur de la réplique doit être de l'ordre de 200, ce qui est acceptable.
La généralisation que nous venons de proposer, n'inverse donc pas les puissances des sources au sens strict lorsque que leur nombre est supérieur à deux. Cependant, comme nous venons de le montrer, elle "révéle" toutes les sources, en les faisant apparaitre, chacune sur l'une des voies de sorties $e_i(t)$ avec un rapport signal à interférence qui, dans le cas le plus défavorable, reste proche de 0 dB.

IV. ALGORITHMES

Il existe de nombreux algorithmes globaux de décomposition LDU d'une matrice de corrélation. Plus rares sont les algoritmes séquentiels qui actualisent la décomposition de manière récursive dans le temps et qui permettent, de ce fait, l'adaptativité. On peut citer l'algorithme de Bierman , qui fournit directement l'inverse des matrices L et D. Son coût de calcul (orthogonalisation comprise) est d'environ $2N^2$ opérations (N: dimension de la matrice).
Nous avons développé un algorithme séquentiel qui fournit à chaque instant la décomposition de l'estimation de la matrice de corrélation, la version orthogonalisée du signal multidimensionnel d'entrée, ainsi que le filtre optimal, au sens du critère des moindres carrés, destiné à fournir dans notre cas, l'estimation du signal de la source utile (en utilisant bien sûr la réplique). Celui-ci nécessite un coût de calcul d'environ N^2.

<table>
<tr><th colspan="4">Algorithme basé sur l'erreur a priori</th></tr>
<tr><td colspan="4">A l'intant t=0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Initialisation</td><td rowspan="2">$p: 1 \to N$</td><td colspan="2">$\alpha_p(0) = 0 \quad k_p(0) = 0$</td></tr>
<tr><td>$i: p \to N$</td><td>$k_{i,p}(0) = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="4">A l'instant t</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Inititialisation</td><td colspan="3">$\gamma_0(t) = 1 \quad e^{1\to 0}(t) = d(t)$</td></tr>
<tr><td>$p: 1 \to N$</td><td colspan="2">$e_p^{1\to 0}(t) = c_p(t)$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$p: 1 \to \min\left[N, t\right]$</td><td colspan="3">$\alpha_p(t) = \lambda\alpha_p(t-1) + \gamma_{p-1}(t)e_p^{1\to p-1}(t)e_p^{1\to p-1^*}(t)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\gamma_p(t) = \gamma_{p-1}(t) - \dfrac{\gamma_{p-1}^2(t)e_p^{1\to p-1}(t)e_p^{1\to p-1^*}(t)}{\alpha_p(t)}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$i: p+1 \to N$</td><td colspan="2">$e_i^{1\to p}(t) = e_i^{1\to p-1}(t) - k_{i,p}^*(t-1)e_p^{1\to p-1}(t)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$k_{i,p}(t) = k_{i,p}(t-1) + \dfrac{\gamma_{p-1}(t)e_p^{1\to p-1}(t)e_i^{1\to p^*}(t)}{\alpha_p(t)}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Filtrage</td><td colspan="2">$e^{1\to p}(t) = e^{1\to p-1}(t) - k_p^*(t-1)e_p^{1\to p-1}(t)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$k_p(t) = k_p(t-1) + \dfrac{\gamma_{p-1}(t)e_p^{1\to p-1}(t)e^{1\to p^*}(t)}{\alpha_p(t)}$</td></tr>
</table>

λ: facteur d'oubli ($1-\varepsilon$).
$\alpha_p(t)$: éléments diagonaux de la matrice D(t).
$k_{i,p}(t)^*$: éléments de la matrice triangulaire L(t).
$e_p^{1\to p-1}(t)$: composantes du vecteur E(t) (orthogonalisation de C(t)).
$k_p(t)^*$: coefficients de filtrage.
$e^{1\to N}(t)$: erreur de filtrage.
Cet algorithme a, par ailleurs, été développé parallelement et présenté récemment par Ling /2/.

V. CONCLUSIONS

La généralisation de l'inversion de puissance que nous venons de développer consiste en fait, à orthogonaliser les signaux capteurs au sens de "l'orthogonalisation de Gram-Schmidt" /3/.

Nous avons vu quelle consistait à transformer linéairement les signaux capteurs grâce au facteur triangulaire obtenu par décomposition "LDU" de leur matrice de corrélation.

Outre la résolution du problème soulevé par l'utilisation d'une réplique, l'orthogonalisation des signaux capteurs permet l'utilisation d'algorithmes simples tels que ceux utilisant uniquement le gradient du critère pour converger.

L'examen de la matrice D peut fournir le nombre de sources présentes dans l'environnement et permettre ainsi de déterminer le nombre de capteurs nécessaires au traitement afin d'éviter les situations où la matrice de corrélation des signaux capteurs est singulière, situations fatales aux algorithmes à convergence rapide qui inversent cette matrice.

Cette méthode d'orthogonalisation apparait comme un prétraitement ne nécessitant aucune information a priori (réplique, vecteurs directionnels, etc...) et offrant de nombreux avantages.

Dans les applications où on connait l'expression analytique des vecteurs directionnels, la méthode que nous venons de présenter peut permettre, au même titre que les méthodes "haute résolution", de faire de l'analyse spatiale. Ces dernières se basent sur la décomposition en éléments propres de la matrice de corrélation pour fournir des filtres dont la réponse est minimale envers les sources. Le grand avantage des méthodes "haute résolution" vient du fait qu'elles sont insensibles à l'intensité du bruit tant que sa matrice de corrélation est connue. Elles souffrent cependant du manque d'algorithmes de décomposition en éléments propres, rapides et séquentiels.

La décomposition "LDU" fournit quant à elle,des filtres, travaillant sur un nombre variable de capteurs, à réponse minimale et adaptés au sens du maximum d'entropie. En radiocommunications, lorsque le but est la réception optimale d'une, ou de plusieurs sources, le bruit est supposé faible. Sa matrice de corrélation est par contre généralement inconnue (sources multiples de position inconnue). Dans ces conditions, le maximum d'entropie, pour lequel on dispose d'algorithmes rapides et robustes, représente un bon compromis.

VI. REFERENCES

[1] R.T. Compton,JR., "The Power-Inversion, Adaptive Array: Concept and Performance" IEEE on AES, Vol. 15 N° 6. November 1979.

[2] Fuyun Ling, Dimitris Manolakis and John G. Proakis, "A Recursive Modified Gram-Schmidt Algorithm for Least-Squares Estimation" IEEE on ASSP, Vol. 34 N° 4. August 1986.

[3] R.A.Monzingo and T.W.Miller, "Introduction to Adaptive Arrays",p. 364, A Wiley-Interscience publication, John Wiley & Sons.