

COMPARAISON DES PERFORMANCES DES METHODES NON RECURSIVES EN TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE SOUS-MARINES *

J.M. PASSERIEUX

THOMSON-SINTRA Activités Sous-Marines
Chemin des Travaux 06801 CAGNES-SUR-MER Cedex

RESUME :

Dans cet article nous décrivons plusieurs algorithmes qui permettent à un observateur de déterminer la trajectoire d'un mobile à partir d'une séquence de mesures bruitées d'azimuts seuls. (Trajectographie Passive à partir d'Azimuts ou "TPA"). Des essais sur signaux synthétiques mettent en évidence la supériorité de méthodes globales, non récursives (Moindres Carrés non linéaires, Variables Instrumentales) sur les méthodes récursives (filtre de Kalman étendu en coordonnées polaires modifiées). Finalement nous décrivons un test de détection de manoeuvre de la cible qui conduit à un mode opératoire "récursif par blocs" adapté à la poursuite de cibles manoeuvrantes.

SUMMARY :

This paper first describes several algorithms for the trajectory estimation of a mobile from a sequence of noise corrupted bearing measurements (Bearing Only Tracking). A few trials with synthetic data clearly demonstrate the improved performances of global and non recursive methods (Nonlinear Least Squares or Instrumental Variable) versus recursive ones (extended Kalman filter in modified polar coordinates). We finally describe a maneuver detection test which allows a "block recursive" implementation of non recursive methods, well suited to manoeuvring target tracking.

*Etude financée par la Direction des Recherches et Etudes Techniques (DRET, Paris)

1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'examiner et de comparer les performances de plusieurs techniques qui permettent à un observateur (porteur) de localiser un bruiteur sous-marin (but, source) à partir de la séquence des azimuts sous lesquels il le relève. En acoustique sous-marine en effet s'il est relativement simple de déterminer la direction d'un bruiteur (son azimut) à partir des signaux reçus sur un seul senseur directif, déterminer sa distance est incomparablement plus délicat. C'est la raison d'un engouement considérable pour la TPA, dont témoignent une masse considérable de publications ([6], [7], [8]), qui consiste à reconstituer complètement la trajectoire du but à partir d'une séquence de mesures d'azimuts. Naturellement ceci nécessite des hypothèses préalables sur cette trajectoire, le plus souvent un mouvement rectiligne uniforme, et des conditions sur la trajectoire du porteur (il faut qu'il manoeuvre pour assurer l'unicité de la solution, "observabilité", [1], [2]).

2. EQUATIONS DU PROBLEME

Les évolutions des mobiles et quelques notations sont indiquées figure 1.

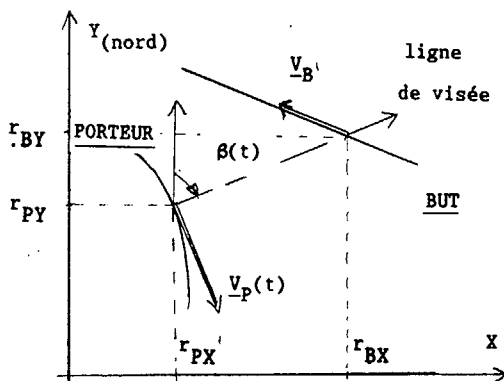


figure 1 : évolutions des mobiles

Nous notons:

$\underline{X}_B(t) = (r_{BX}, r_{BY}, v_{BX}, v_{BY})^t$ le vecteur (4x1) des position et vitesse du but dans un référentiel absolu,
 $\underline{X}_P(t) = (r_{PX}, r_{PY}, v_{PX}, v_{PY})^t$ le même vecteur relatif au porteur,
 $\Gamma_P(t)$ = l'accélération du porteur, connue et non identiquement nulle pour que le problème soit observable.

Puis:

$$\underline{X}(t) = (\underline{X}_B - \underline{X}_P) = (r_X, r_Y, v_X, v_Y) = (x_i, i=1,4)$$

C'est ce dernier, appelé "VECTEUR D'ETAT" dans la terminologie des filtreurs, que l'on cherche à déterminer. Son évolution entre deux instants t et t* quelconques est régie par:

$$\underline{X}(t^*) = \Phi(t^*, t) \underline{X}(t) + \underline{C}(t^*, t) \quad (1)$$

"EQUATION D'ETAT"

avec:

$$\Phi(t^*, t) = \begin{bmatrix} I_2 & (t^* - t)I_2 \\ 0_2 & I_2 \end{bmatrix}$$

et

$$\underline{C}(t^*, t) = - \begin{bmatrix} \int_t^{t^*} (t^* - \tau) \Gamma_P(\tau) d\tau \\ \int_t^{t^*} \Gamma_P(\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

($\underline{C}(t^*, t)$ déterministe, connu, dépend seulement de Γ_P)

Nous notons $\beta_m(t_k)$ et $\beta(t_k)$ les azimuts mesuré et vrai en t_k . Ils sont reliés entre eux et au vecteur d'état par :

$$\begin{cases} \beta_m(t_k) = \beta(t_k) + v(t_k) \\ \beta(t_k) = \tan^{-1}(r_X(t_k)/r_Y(t_k)) = \tan^{-1}(x_1/x_2) \end{cases} \quad (2)$$

"EQUATION DE MESURE"

($v(t_k)$ étant le bruit de mesure).

Le problème est finalement de déterminer la trajectoire du but, c'est à dire la valeur du vecteur d'état $\underline{X}(t_R)$ à un instant de référence t_R (la position du but à tout instant s'en déduisant par (1)) à partir de la séquence de mesures $\{\beta_m(t_i), i=1, n\}$ recueillies sur $[t_0, t_n]$ et reliées au vecteur d'état par (2).

Nous notons enfin:

$B(X)$ = vecteur nx1 des azimuts $\beta(t_i)$ calculés à partir d'un $\underline{X} = \underline{X}(t_R)$ quelconque par (1) puis (2),
 \underline{B}_m = vecteur nx1 des azimuts mesurés



\underline{V} = vecteur $n \times 1$ des échantillons de bruit de mesure $\underline{v}(t_k)$. Nous supposons que \underline{V} est gaussien, centré, de matrice de covariance diagonale $\Sigma = \sigma^2 I_n$.

3. INSUFFISANCE DES METHODES RECURSIVES EN TPA

Dans un premier temps le problème de la TPA a d'abord été résolu en appliquant mécaniquement aux équations (1) et (2) la théorie du filtrage de Kalman. Selon le type de coordonnées utilisées pour décrire le vecteur d'état (cartésiennes, polaires, polaires modifiées) et la méthode de linéarisation préalable des équations (Kalman étendu, étendu et itéré, pseudo linéaire) on obtient divers filtres récursifs classiques ([5] à [9]).

Les défauts d'une telle approche sont maintenant bien connus et exposés dans de nombreuses publications ([4] à [7]):

- les équations sont non linéaires et donc tous ces filtres récursifs sont sous-optimaux,
- ils sont parfois très sensibles aux hypothèses (par exemple sur le bruit de mesure). Ainsi un biais de mesure même faible peut faire diverger brutalement,
- le principe même de l'initialisation, arbitraire ici, est critiquable (contraignant elle biaise l'estimation, trop lâche le filtre peut diverger),
- ces filtres s'accommodent assez mal d'irrégularités du rythme d'obtention des mesures ou d'interruptions de ces mesures.

Enfin leur défaut le plus grave est spécifique à la TPA et tient au manque d'observabilité de la trajectoire du but avant que le porteur n'ait manoeuvré (sur sa première "jambe"). Pendant cette phase la trajectoire du but n'est pas observable et le risque de divergence d'un filtre de Kalman étendu est grand (surtout en cartésien, filtre EK [9]).

L'utilisation de pseudo-mesures (filtre pseudo-linéaire PLK [8],[9]) interdit ces divergences. Par contre le filtre résultant est affecté par un fort biais en distance qui conduit certains à le rejeter [7]. Le filtre de Kalman étendu en coordonnées polaires modifiées (β , β , r/r , $1/r$), dit "MPK", semble finalement le plus performant de ces filtres [5] et le seul qui ne soit pas à proscrire (peu de divergences, biais faibles).

Tous ces motifs (voir [4] ou [7]) conduisent à s'intéresser plutôt à des méthodes globales optimales non nécessairement récursives en temps.

4. DESCRIPTION SUCCINCTE DES ALGORITHMES

4.1. FONCTION DE VRAISEMBLANCE

Dans le contexte gaussien centré de §2 la fonction de vraisemblance s'écrit:

$$p(\underline{B}_m/\underline{X}) = [(2\pi)^n \cdot \det(\Sigma)]^{-1/2} \cdot \exp\{-0.5 [\underline{B}_m - \underline{B}(\underline{X})]^t \Sigma^{-1} [\underline{B}_m - \underline{B}(\underline{X})]\} \quad (3)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de \underline{X} (gaussien, sans biais et efficace asymptotiquement, pour $n \rightarrow \infty$ [10]) se confond ici avec l'estimateur non linéaire des moindres carrés qui minimise le critère:

$$J(\underline{X}) = 0.5 [\underline{B}_m - \underline{B}(\underline{X})]^t \cdot \Sigma^{-1} \cdot [\underline{B}_m - \underline{B}(\underline{X})] \quad (4)$$

"Critère de moindres carrés"

4.2. ESTIMATEUR DE GAUSS-NEWTON (GN)

Compte-tenu de la simplicité du calcul analytique du gradient de J (et dans une moindre mesure du Hessien) on utilise plutôt des méthodes qui exploitent ces quantités et plus particulièrement l'algorithme de Gauss-Newton ([3],[7],[12]). L'estimée correspondante, notée $\hat{\underline{X}}_{GN}$, est obtenue après une suite d'itérations:

$$\hat{\underline{X}}_{GN}^{l+1} = \hat{\underline{X}}_{GN}^l - \rho_1 \cdot [H(\hat{\underline{X}}_{GN}^l)]^{-1} \cdot \nabla J(\hat{\underline{X}}_{GN}^l) \quad (5)$$

"Algorithme de Gauss-Newton"

Le pas ρ_1 (compris entre 0 et 1) est déterminé à chaque itération en vérifiant la décroissance de $J(\underline{X})$. Les itérations cessent si le critère ne décroît plus de manière significative. De plus:

$$\nabla J(\underline{X}) = -M^t(\underline{X}) \cdot \Sigma^{-1} \cdot [\underline{B}_m - \underline{B}(\underline{X})] \quad (6-a)$$

$$H(\underline{X}) = M^t(\underline{X}) \cdot \Sigma^{-1} \cdot M(\underline{X}) \quad (6-b)$$

"Hessien approché du critère"

$M(\underline{X})$ est la matrice Jacobienne $n \times 4$ de l'application $\underline{X} \rightarrow \underline{B}(\underline{X})$ égale à:

$$M(\underline{X}) = R^{-1}(\underline{X}) \cdot A(\underline{X}) \quad (7)$$

avec:

$$A(\underline{X}) = \begin{bmatrix} \underline{a}(1) & \underline{a}(2) & \dots & \underline{a}(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}(k) = [\cos \beta_k, -\sin \beta_k, (t_k - t_R) \cos \beta_k, -(t_k - t_R) \sin \beta_k]^t$$

(les β_k sont calculés par (1) ou (2) à partir de \underline{X})

et $R(\underline{X})$ est une matrice diagonale $n \times n$ dont les éléments sont les $r(t_k) = (r_X^2 + r_Y^2)^{1/2}$ calculés à partir de $X(t_R)$.

4.3. ESTIMATEUR PSEUDO-LINEAIRE

Partant de l'équation de mesure (2) on construit ([3],[8]) des pseudo-mesures $z(t_k)$ toutes nulles reliées linéairement à $\underline{X}(t_R)$:

$$z(t_k) = \underline{a}_m^t(k) \cdot \underline{X}(t_R) + y_m(k) + r(t_k) \cdot \sin(v(t_k)) \quad (8)$$

$\underline{a}_m(k)$ est identique à $\underline{a}(k)$ de §4.2 mais est obtenu à partir des azimuts mesurés,

$$y_m(k) = \cos \beta_m(t_k) \cdot \int_{t_R}^{t_k} (t_R - \tau) \gamma_{PX}(\tau) \cdot d\tau + \sin \beta_m(t_k) \cdot \int_{t_R}^{t_k} (t_R - \tau) \gamma_{PY}(\tau) \cdot d\tau \quad (9)$$

De manière compacte on écrit (en construisant à partir des \underline{a}_m et y_m des matrices \underline{A}_m et \underline{Y}_m et en approximant $\sin v(t)$ par $v(t)$:

$$\underline{Z} = \underline{A}_m^t \cdot \underline{X} + \underline{Y}_m + R \cdot \underline{V} = \underline{0} \quad (10)$$

Le vecteur d'état est ensuite estimé en minimisant un nouveau critère de moindres carrés, rendu quadratique en \underline{X} par la pseudo-linéarisation, $\|\underline{Z} - (\underline{A}_m \cdot \underline{X} + \underline{Y}_m)\|^2$. Il suffit pour cela de résoudre l'équation normale:

$$\underline{A}_m \cdot (\underline{A}_m^t \cdot \underline{X} + \underline{Y}_m) = \underline{0} \quad (11)$$

ce qui conduit à:

$$\hat{\underline{X}}_{PSL} = -(\underline{A}_m \cdot \underline{A}_m^t)^{-1} \cdot \underline{A}_m \cdot \underline{Y}_m \quad (12)$$

"Estimateur pseudo-linéaire"

Si $t_R = t$ l'estimateur $\hat{\underline{X}}_{PSL}$ est identique à la sortie en t du filtre pseudo-linéaire PLK (aux effets de l'initialisation de PLK près négligeables si PLK est initialisé comme en [8] ou [9]). Il est donc biaisé au même titre que PLK.

4.4. METHODES DE VARIABLES INSTRUMENTALES

Le biais important de PSL viendrait de ce que dans l'équation normale (11) la matrice \underline{A}_m est corrélée avec le bruit de mesure \underline{V} . Supposons maintenant qu'on puisse trouver une famille $\underline{\zeta}(n)$ de matrices rectangulaires $4 \times n$ telles que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\underline{\zeta}(n) \cdot \underline{A}_m^t] \text{ est régulière} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\underline{\zeta}(n) \cdot R \cdot \underline{V}] = \underline{0} \end{array} \right. \quad (13)$$

Si dans l'équation normale (10) on remplace à gauche la matrice \underline{A}_m par $\underline{\zeta}(n)$ on obtient une nouvelle équation normale:

$$\underline{\zeta}(n) \cdot [\underline{A}_m^t \cdot \underline{X} + \underline{Y}_m] = \underline{0} \quad (14)$$

d'où l'estimateur:

$$\hat{\underline{X}}_{\zeta} = -[\underline{\zeta}(n) \cdot \underline{A}_m^t]^{-1} \cdot \underline{\zeta}(n) \cdot \underline{Y}_m \quad (15)$$

"Estimateur de variable instrumentale"

La propriété la plus importante de ce nouvel estimateur est son absence asymptotique de biais. Substituant dans (15) la valeur de \underline{Y}_m tirée de (10) il vient:

$$\hat{\underline{X}}_{\zeta} - \underline{X} = \frac{1}{n} [\underline{\zeta}(n) \cdot \underline{A}_m^t] \cdot \frac{1}{n} [\underline{\zeta}(n) \cdot R \cdot \underline{V}] = \underline{0} \quad (16)$$

Si on confond à droite de (16) espérance mathématique $E\{\}$ et moyenne temporelle $1/n[\cdot]$, puis qu'on passe à la limite $n \rightarrow \infty$, le premier terme est inversible d'après (13) tandis que le second tend vers 0. Asymptotiquement le biais est donc nul.

Ce qui précède peut sembler obscur, nous n'avons cependant pas pu trouver une justification de cette technique qui soit à la fois claire et rigoureuse (comparable à celles qu'on peut donner des méthodes de Newton [12]). Introduite en TPA en [8] elle semble toutefois d'un usage habituel pour identifier les coefficients ARMA d'une série temporelle (voir [13] et les références mentionnées).

Si en principe n'importe quelle matrice "Instrument" $\zeta(n)$, pour peu qu'elle satisfasse à (13), convient (biais nul) plusieurs choix sont judicieux. Dans tous les cas l'instrument est obtenu après une suite d'itérations.

Variable instrumentale (IV):

Pour calculer \hat{X}^{l+1} on prend $\zeta = A(\hat{X}^l)$. Les itérations sont initialisées par \hat{X}_{PSL} de §4.3.

Variable instrumentale modifiée (MIV):

De même: $\zeta(n) = A(\hat{X}^l) \cdot R^{-1}(\hat{X}^l) \cdot \Sigma^{-1} \cdot R^{-1}(\hat{X}^l)$ (17)

Ce choix de l'instrument, qui pondère les mesures de manière optimale en tenant compte de la distance porteur-but, est susceptible de conduire à un estimateur efficace (ce que n'est pas IV, [14]).

4.5 BORNES DE CRAMER-RAO

La variance de tout estimateur sans biais \hat{X} du vecteur d'état est supérieure à l'inverse de la matrice de Fisher égale ici à :

$$F(\hat{X}) = M^t(\hat{X}) \cdot \Sigma^{-1} \cdot M(\hat{X}) \quad (18)$$

"Matrice de Fisher"

5. ESSAIS SUR SIGNAUX SYNTHETIQUES

Les quatre méthodes non récursives de §4 (GN, PSL, IV et MIV) ont été comparées entre elles, au filtre MPK et aux performances potentielles de la TPA (bornes de Cramer-Rao) à l'aide de signaux synthétiques. Pour les méthodes globales les équations programmées sont exactement celles de §4 (en particulier GN et MIV sont initialisés par PSL). Les équations du filtre MPK sont celles données en [5]. De plus ce filtre est initialisé par:

$$\hat{Y}(0/0) = (0, 0, \beta_m(t_0), 1/r_0) \quad (r_0 = 10 \text{ km})$$

$$\hat{P}(0/0) = \text{diag}(10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-8})$$

Tous les résultats présentés correspondent à un même scénario assez court (décrit figure 2):
 - le porteur suit une route en L à 3.4 m/s qui le mène vers le nord,
 - le but se déplace à 8 m/s au cap 150,
 - la trajectographie a une durée de 1200 secondes pendant lesquelles on dispose de 60 mesures séparées de 20 secondes.
 - la distance porteur-but est faible, de 10 à 15 km, le défilement en azimut important.

Nombre d'itérations nécessaires:

Les deux méthodes de variable instrumentale se distinguent de la méthode de Gauss-Newton par une convergence beaucoup plus rapide:

- pour MIV et IV dans la quasi totalité des cas, et ce quelque soit σ , deux à trois itérations suffisent pour que ni \hat{X} ni la valeur du critère J n'évoluent plus de manière significative.
- la convergence de Gauss-Newton est beaucoup plus lente. Le critère J décroît de manière régulière pendant parfois jusqu'à une dizaine d'itérations.

Biais des estimateurs- Efficacité:

Figures 2a et 2b sont présentés les résultats obtenus par MIV et PSL pour le même scénario avec $\sigma = 1$ degré. Nous avons tracé dans un référentiel absolu :

- les routes vraies du but et du porteur,
- les ellipses à 3 σ (intervalle de confiance à 99%) de la localisation à partir des 60 mesures pour 6 instants différents (déduites des bornes de Cramer-Rao),
- les estimées \hat{X}_{PSL} et \hat{X}_{MIV} (5 itérations) obtenues pour 100 tirages indépendants de la séquence de bruit

de mesure V), représentées par des "•".

A vue d'oeil \hat{X}_{MIV} semble bien sans biais et efficace (ainsi que GN dont la sortie est ici indiscernable de celle de MIV). PSL par contre est fortement biaisé. Figure 2c les résultats obtenus par MPK, pourtant initialisé de manière favorable, sont catastrophiques.

Ces résultats sont précisés par ceux d'autres essais, toujours sur le même scénario, avec plusieurs valeurs de σ , qui sont présentés figure 3. Nous avons tracé (avec une échelle log-log) :

- le biais correspondants aux diverses méthodes pour l'estimée de la distance porteur-but en fin de fenêtre, représenté par des signes "+" (estimé sur 100 tirages indépendants de V),
- la variance correspondante, avec des signes "x",
- l'erreur quadratique totale (E.Q.² = variance + (biais)²), avec des "•",
- enfin la variance minimale déduite du calcul des bornes de Cramer-Rao.

Ces tracés permettent, pour chaque estimateur, de faire la part entre biais et variance dans l'erreur totale. Ils mettent en évidence un comportement semblable pour tous (sauf PSL) :

- lorsque σ reste inférieur à un seuil σ_{eff} (de 0.5 à 1 degré) les estimateurs sont tous sans biais et efficaces,
- par contre dès que σ dépasse σ_{eff} la variance décroche de la borne de manière plus ou moins brutale (en lui étant supérieure).

Cette valeur de σ_{eff} dépend de l'algorithme et permet d'établir entre eux la hiérarchie suivante (par ordre de préférence décroissante) : MIV, GN puis MPK.

6. DETECTION DE MANOEUVRES DE LA CIBLE

Supposons qu'à un instant t_n quelconque on ait déjà obtenu une estimée \hat{X} de la trajectoire du but à partir de mesures sur $I_1 = [t_1, t_n]$. Si on attend jusqu'en t_{n+N} on va disposer de N nouvelles mesures, obtenues sur $I_2 = [t_{n+1}, t_{n+N}]$. Avant d'utiliser ces nouvelles mesures on détermine si :

- H_0 : le but a conservé la même trajectoire sur I_2 , que sur I_1 . Les azimuts vrais sur I_2 sont les éléments de $B_2(\hat{X})$ (extrapolation sur I_2 des azimuts sur I_1)
- H_1 : le but a manœuvré sur I_2 . Dans ce cas les azimuts vrais sont les éléments de $B_{2v} \neq B_2(\hat{X})$.

Le test proposé exploite les quantités :

$$\epsilon_2 = B_{2m} - B_2(\hat{X}) \quad (19)$$

vecteur $N \times 1$ des écarts entre les azimuts mesurés sur I_2 et ceux prédits à partir des mesures d'azimuts sur I_1 seul. Sous H_0 (et sous réserve que \hat{X} soit sans biais, efficace et gaussien) ϵ_2 est un vecteur gaussien, centré de matrice de covariance :

$$C_2 = \Sigma_2 + M_2 \cdot F_1^{-1} \cdot M_2^t \quad (20)$$

(M_2 et F_1 étant les restrictions à I_2 et I_1 des matrices M et F données par (7) et (18)). On en déduit un test optimal de détection de manœuvre (rapport de vraisemblance généralisée) analogue à celui utilisé par les méthodes récursives ([6],[10]) :

$$R = \epsilon_2^t \cdot C_2^{-1} \cdot \epsilon_2 \quad \eta \quad (21)$$

Le seuil η est fixé à partir du taux de fausse alarme toléré α par :

$$\alpha = \text{prob}\{R > \eta / H_0\} = \text{prob}\{X^2_N > \eta\} \quad (22)$$

(puisque R est distribué selon une loi du X^2 à N degrés de liberté). A η ou α fixé on peut aisément déterminer la puissance du test (probabilité de décider H_1 si H_1 est vraie). En effet alors R est distribué selon une loi du X^2 non central $X'^2_N(\delta)$ de paramètre de décentrement :

$$\delta = [B_{2v} - B_2(\hat{X})]^t \cdot C_2^{-1} \cdot [B_{2v} - B_2(\hat{X})] \quad (23)$$

La validité de ces équations et l'intérêt du test ont été validés sur signaux synthétiques. Le scénario est le même qu'en §5 à ceci près que, sous H_1 , le but



manoeuvre à partir de $t = 900$ sec, pendant 120 secondes, passant du cap 150 au cap 270 à vitesse constante. L'accord entre les distributions théoriques et les histogrammes de R (obtenus à partir de 500 tirages indépendants des séquences de bruit de mesure) est excellent figure 4, que ce soit sous H_0 ou sous H_1 . De manière générale la manoeuvre est détectée d'autant mieux que σ est petit, N et $B_{2v} - B_2(X)$ grands. On peut mentionner que ce test ne nécessite pas que σ soit connu (on peut l'estimer sur I_1 , mais R ne suit qu'approximativement une loi du χ^2). De plus il n'est pas nécessaire que la trajectoire du but soit observable sur I_1 (il suffit qu'elle le soit sur $I_1 \cup I_2$). Ce test peut être utilisé pour donner un fonctionnement "récuratif par blocs" aux méthodes globales en rajoutant des nouveaux blocs de mesures (si H_0) ou en supprimant les plus anciens.

7. CONCLUSIONS :

Des essais sur signaux synthétiques ont mis en évidence la supériorité des méthodes globales sur les méthodes récuratives (y compris MPK réputé le meilleurs des filtres récuratifs). Par ailleurs un test de détection de manoeuvre permet de donner à ces méthodes globales un fonctionnement "récuratif par blocs" (ce qui peut être agréable en pratique)

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES:

[1] S.C.NARDONE, V.J.AIDALA "Observability for bearing-only target motion analysis" IEEE trans on AES, Vol 17 n°2 (Mars 1981)
 [2] D.PILLON, C.JAUFFRET "Problèmes d'observabilité en trajectographie passive" XI^e colloque GRETSI, Nice, 1^{er} au 5 Juin 1987

[3] S.C.NARDONE, A.G.LINDGREN, K.F.GONG "Fundamental properties of conventional bearing-only target motion analysis" IEEE trans on AC, Vol 29 n°9, (Sept 1984)
 [4] C.DONCARLI, P.DE LARMINAT "Une approche non-récurative de l'azimétrie passive" X^e colloque GRETSI, Nice, Mai 1985
 [5] V.J.AIDALA, S.C.HAMMEL "Utilisation of modified polar coordinates for bearing-only tracking" IEEE trans on AC, Vol 28 (Mars 1983)
 [6] C.A.BOZZO "Le filtrage optimal et ses applications aux problèmes de poursuite" ed TEC&DOC, Montrouge (1982)
 [7] S.I.CHO "Antisubmarine Warfare (ASW) passive target tracking" NOSC Technical Document TD342 (1980)
 [8] A.G.LINDGREN, K.F.GONG "Position and velocity estimation via velocity estimation and bearing observation" IEEE trans on AES, Vol 14 n°4 (July 1978)
 [9] V.J.AIDALA "Kalman filter behaviour in bearing-only tracking applications" IEEE trans on AES, Vol 15 n°1 (Jan 1979)
 [10] Y.BAR SHALOM, K.BIRMIWAL "Variable dimension filter for maneuvering target tracking" IEEE trans on AES Vol 18 n°4 (Sept 1982)
 [11] M.KENDALL, S.STUART "The advanced theory of Statistics" Griffin ed Londres (1979)
 [12] R.FLETCHER "Practical methods for optimization" J.Wiley ed, New York (1980)
 [13] B.FRIEDLANDER "The over-determined recursive instrumental method" IFAC - Adaptive Systems in Control and Signal Processing (1983)
 [14] Marché DRET 85/354 "Trajectographie à partir d'azimuts"

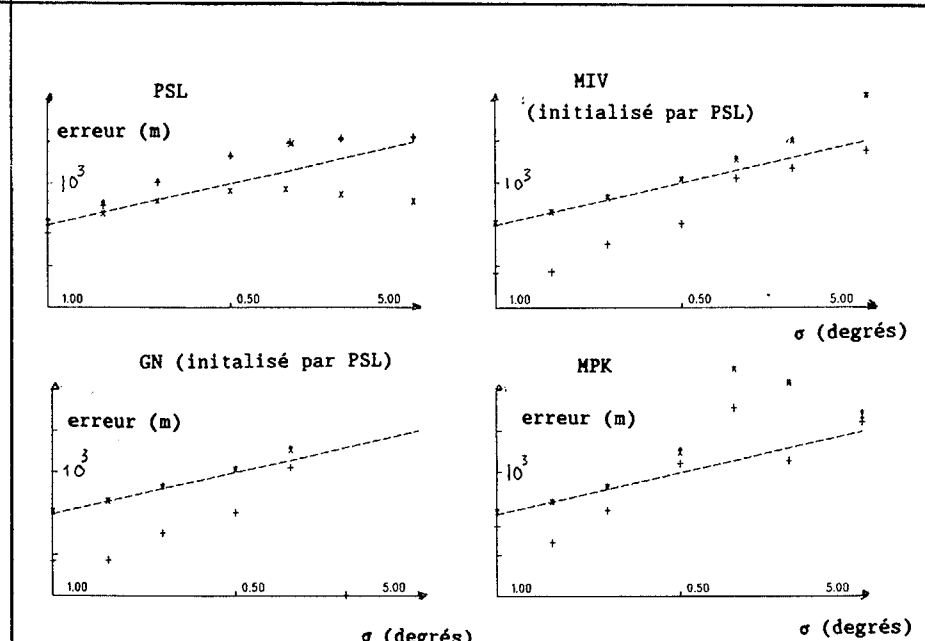
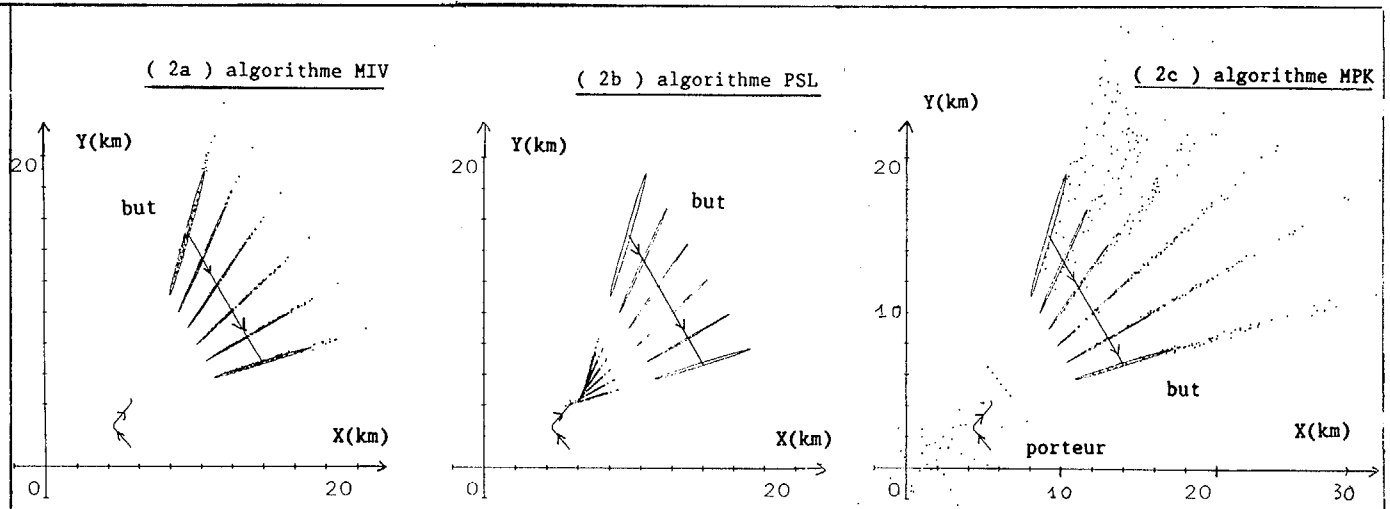


figure 3 :

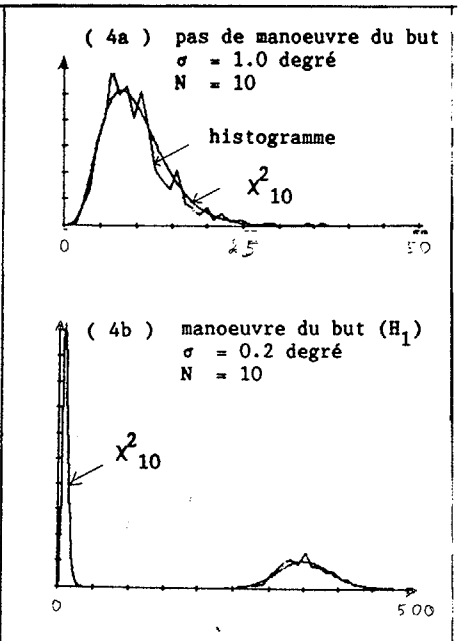


figure 4 :