

TRAJECTOGRAPHIE PAR TRIANGULATION EN SONAR PASSIF

J. DURIF - L. KOPP

THOMSON-SINTRA ASM BP 53 Chemin des Travaux 06801 CAGNES/MER CEDEX

Résumé

Cet article aborde le problème de la trajectographie passive de sources rayonnantes par triangulation sur 2 antennes distinctes. Observant un espace sous-marin dense en bruiteurs, chaque antenne fournit autant de pistes en azimut qu'elle en détecte, ce qui pose un réel problème d'affectation de pistes à la même source. On développe ici un test optimal d'association de 2 pistes au même bruiteur, en restreignant les trajectoires des cibles à des mouvements rectilignes uniformes. On décrit ensuite une méthode d'estimation du mouvement d'un bruiteur à partir des 2 pistes d'azimut qui lui sont affectées, dont on compare les performances aux limites données par la borne de Cramer-Rao.

1 INTRODUCTION-MODELISATION

En sonar passif il est facile d'estimer directement le gisement d'un bruiteur sur une antenne acoustique (formation de voies et interpolation). Par contre, l'estimation instantanée de sa distance est, quoique possible (mesure de la courbure du front d'onde incident sur l'antenne), assez complexe et limitée en performance par les faibles longueurs d'antennes réelles, les imperfections de leur construction et la perte de cohérence des signaux le long de celles-ci. Quand on dispose de 2 antennes suffisamment séparées spatialement, on peut exploiter la parallaxe de perception d'un bruiteur pour estimer sa distance [5]. En mesurant 2 azimuts on peut ainsi trianguler le bruiteur et on améliore les performances de cette localisation instantanée [4] par filtrage sur une certaine durée d'observation en supposant le mouvement de la source le plus simple possible (trajectographie). Toutefois, dans un environnement multi-sources, chaque antenne fournit plusieurs pistes d'azimut et il n'est pas trivial de déterminer les couples de pistes correspondant aux mêmes bruiteurs. Nous développons ici un test optimal d'association de pistes ainsi qu'un algorithme de trajectographie par triangulation dont on détermine les performances limites par calcul de la borne de Cramer-Rao.

Nous nous plaçons dans les conditions théoriques suivantes : les bruiteurs à trajectographier se déplacent, dans le plan horizontal des antennes A1 et A2, selon un mouvement rectiligne uniforme. La

Abstract

This paper deals with the Target Motion Analysis problem by means of "triangulation" using 2 widely separated arrays. In a dense target environment each array gives as many measured bearing sequences, i.e. tracks, as it detects sources and a big track matching problem arises. Here we develop an optimal tracks association test based on the generalised likelihood ratio, after assuming that all the targets move along straight lines with constant speeds. Then we give a 2 bearing TMA algorithm, the statistical properties of which are compared to the Cramer-Rao Lower Bounds.

N.B.: Cette étude rentre dans le cadre d'un contrat passé par la Direction des Constructions Navales.

propagation acoustique est isocélère et la trajectoire de chaque antenne est aussi rectiligne uniforme et parfaitement connue pendant toute la durée de l'observation du système, durée échantillonnée uniformément en K instants t_k avec $k=1, \dots, K$ et $t_k - t_m = (k-m)T$. Le vecteur d'état de la source est défini à l'instant t_k par (figure 1)

$$\underline{X}_k = (x_k, y_k, v_x, v_y)^t \quad (1)$$

et satisfait l'équation d'évolution linéaire

$$\underline{X}_k = \underline{\Phi}(k,m) \underline{X}_m \quad (2)$$

où $\underline{\Phi}(k,m)$ est la matrice de transition entre les instants t_k et t_m . Elle s'exprime :

$$\underline{\Phi}(k,m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (k-m)T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (k-m)T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Le but du problème est d'estimer \underline{X}_K , le dernier vecteur d'état, après la mesure de K azimuts $\{\beta_{ik}\}_k$ sur chaque antenne $A_i, i=1,2$. Dorénavant \underline{X}_K sera noté \underline{X} et appelé vecteur paramètre du mouvement rectiligne uniforme du bruiteur. On relie tout vecteur d'état \underline{X}_k à \underline{X} par la relation issue de (2)

$$\underline{X}_k = \underline{\Phi}(k,K) \underline{X} \quad (4)$$

L'équation de mesure du système est non linéaire et peut s'écrire sous la forme vectorielle

$$\underline{\beta}_k = \underline{\beta}(\underline{X}_k) + \underline{b}_k = \underline{\beta}(\underline{X}, k) + \underline{b}_k \quad (5)$$

où $\underline{\beta}(\underline{X}, k)$ est la transformation position-azimut définie par $\underline{\beta}(\underline{X}, k) = (\beta_1, \beta_2)^t$

$$\text{et } \beta_i(\underline{X}, k) = \text{tg}^{-1} \frac{x_k - (K-k)Tv_x - x_{ik}}{v_x - (K-k)Tv - v_{..}} \quad (6)$$



(x_{ik} , y_{ik} sont les coordonnées de A_i à l'instant t_k). $\beta_1(\underline{X}, k)$ est l'azimut vrai sous lequel l'antenne A_i verrait le bruiteur S à l'instant t_k en l'absence de bruit de mesure.

$\underline{b}_k = (b_{1k}, b_{2k})^t$ est un tirage d'un bruit vectoriel blanc, gaussien $\underline{b} = (b_1, b_2)^t$ centré et de matrice de covariance \underline{C} de la forme

$$\underline{C} = \sigma^2 \underline{I}_2 \quad (7)$$

2 ASSOCIATION DE PISTES

Sur chaque antenne A_i on considère une des pistes en azimut disponibles, notée P_i et composée de K mesures d'azimuts d'un bruiteur aux instants t_k , $k=1, \dots, K$, et on cherche à répondre à la question : les pistes P_1 et P_2 correspondent-elles au même bruiteur ? Dans ce but on définit les 2 hypothèses d'association du problème

H_1 : P_1 et P_2 sont des observations du même bruiteur,
 H_0 : P_1 et P_2 sont des observations de 2 bruiteurs différents.

Posant $P_i = \{\beta_{ik} | k, i=1,2\}$, ces pistes sont l'image du même mouvement rectiligne uniforme \underline{X} dans H_1 , ou de 2 mouvements \underline{X}_1 et \underline{X}_2 dans H_0 , ce qu'on traduit par :

pour $k=1, \dots, K$ et $i=1,2$

$$\beta_{ik} = \beta_1(\underline{X}, k) + b_{ik} \quad \text{dans } H_1, \quad (8)$$

$$\beta_{ik} = \beta_1(\underline{X}_i, k) + b_{ik} \quad \text{dans } H_0. \quad (9)$$

2.1 RAPPORT DE VRAISEMBLANCE GENERALISE

On est ramené à un choix d'hypothèses auquel on peut appliquer la théorie du test du Rapport de Vraisemblance Généralisé, noté ici R_v . H_1 et H_0 sont en fait des hypothèses composites, i.e. qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres: \underline{X} pour H_1 et $(\underline{X}_1, \underline{X}_2)$ pour H_0 . Pour déterminer le R.V.G. du couple de pistes (P_1, P_2) conditionné à H_1 et H_0 , il va falloir estimer le ou les paramètres dans chaque hypothèse: par des algorithmes de maximisation de la vraisemblance conditionnelle de (P_1, P_2) on trouve un estimé de \underline{X} , noté $\hat{\underline{X}}$, dans H_1 , et des estimés de \underline{X}_1 et \underline{X}_2 , notés $\hat{\underline{X}}_1$ et $\hat{\underline{X}}_2$, dans H_0 . Notant $f(P_1, P_2 / H_j, \dots)$ les vraisemblances conditionnelles, le R.V.G. s'écrit:

$$R_v = \frac{\text{Max}_{\hat{\underline{X}}} f(P_1, P_2 / H_1, \hat{\underline{X}})}{\text{Max}_{\hat{\underline{X}}_1, \hat{\underline{X}}_2} f(P_1, P_2 / H_0, \hat{\underline{X}}_1, \hat{\underline{X}}_2)} \quad (10)$$

On s'intéresse à la quantité $L_{rv} = -2 \text{Log}(R_v)$ et on démontre assez facilement, vues les hypothèses faites sur le bruit de mesure (7), que L_{rv} s'écrit :

$$L_{rv} = \sigma^{-2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^2 \{ (\beta_{ik} - \beta_1(\hat{\underline{X}}, k))^2 - (\beta_{ik} - \beta_1(\hat{\underline{X}}_i, k))^2 \} \quad (11)$$

2.2 TEST D'ASSOCIATION ET PERFORMANCES

La quantité L_{rv} est la variable de décision du problème d'association car elle présente les propriétés suivantes :

- pour tout couple (P_1, P_2) $L_{rv} \geq 0$,
- dans H_1 , $\hat{\underline{X}}$, $\hat{\underline{X}}_1$ et $\hat{\underline{X}}_2$ sont très voisins, si bien que, d'après (11), $L_{rv} \rightarrow 0$,
- dans H_0 , L_{rv} mesure la différence apparente des 2 mouvements \underline{X}_1 et \underline{X}_2 , $L_{rv} \gg 1$.

Le test d'association est de la forme

$$L_{rv} \underset{H_1}{\gtrsim} \underset{H_0}{\eta} \quad (12)$$

dont les performances sont fonction du seuil d'association η et des densités de probabilité de L_{rv} conditionnées à H_1 et à H_0 .

2.3 STATISTIQUES DE $L_{rv} = -2 \text{Log } R_v$

Beaucoup de statisticiens se sont penchés sur les distributions asymptotiques des R.V.G. [1],[2], ainsi le résultat suivant a été établi :

soit θ un ouvert de \mathbb{R}^m , $E_1 \subset E_0$ 2 variétés contenues dans θ de dimensions respectives $n_1 < n_0$; soit $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_K)$ une suite de K vecteurs aléatoires indépendants de densité $f(\underline{X}, \theta) = \prod_k f(X_k, \theta)$;

si $\theta \in E_0$ alors la variable aléatoire

$$-2 \left\{ \text{Max}_{\gamma \in E_1} \text{Log } f(\underline{X}, \gamma) - \text{Max}_{\delta \in E_0} \text{Log } f(\underline{X}, \delta) \right\}$$

suit asymptotiquement en K une loi du χ^2 à $n_0 - n_1$ degrés de liberté. De plus, si $\theta \in E_1$ alors cette loi du χ^2 est centrée, sinon elle est décentrée d'un paramètre λ qui peut être calculé théoriquement en fonction de θ .

Ce théorème peut s'appliquer directement à la statistique asymptotique de $L_{rv} = -2 \text{Log } R_v$ puisque $H_1 \subset H_0$ (H_1 n'est rien d'autre que H_0 avec $\underline{X}_1 = \underline{X}_2 = \underline{X}$). Il ne reste qu'à déterminer les dimensions des 2 variétés correspondantes à H_1 et à H_0 , et le paramètre de décentrement λ en fonction de la conjoncture. Les dimensions n_1 et n_0 dépendent a priori de l'observabilité des systèmes que l'on délimite pour l'estimation des paramètres γ et δ . Contraignant les mouvements des 2 antennes à être rectilignes uniformes, l'estimation unique dans H_0 de \underline{X}_1 et \underline{X}_2 est impossible (système non observable) et on doit fixer arbitrairement une composante de chaque vecteur (x_K par exemple) pour estimer les 3 autres (y_K, v_x, v_y) de façon unique. Donc dans H_0 on estime $n_0 = 3 + 3 = 6$ paramètres. Par contre le système est toujours observable dans H_1 si la source ne se déplace pas sur l'axe joignant les 2 antennes (triangulation toujours possible hormi ce cas), donc on peut estimer de façon unique les 4 composantes du vecteur \underline{X} et $n_1 = 4$. D'où le résultat suivant :

Quand les antennes ne manoeuvrent pas la quantité L_{rv} est distribuée asymptotiquement en K selon une loi du χ^2 à $n_0 - n_1 = 6 - 4 = 2$ degrés de liberté. La loi est centrée dans $H_1(\underline{X})$ et décentrée dans $H_0(\underline{X}_1, \underline{X}_2)$ d'un paramètre λ qui s'exprime comme suit :

$$\lambda = \sigma^{-2} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^2 (\beta_{ik}(\hat{\underline{X}}, k) - \beta_{ik}(\hat{\underline{X}}_i, k))^2 \quad (13)$$

où \hat{X} est l'estimé du mouvement unique de H1 alors qu'on est réellement dans $H0(\underline{X}_1, \underline{X}_2)$.

λ étant une somme de 2K termes positifs, c'est une fonction croissante du nombre de mesures K.

A des fins de simulations on a programmé les estimateurs de \underline{X} dans H1 et de \underline{X}_i dans H0 au sens du Maximum de Vraisemblance pour des antennes fixes dans un référentiel géographique, de coordonnées $x_1 = -x_2 = 1$ Km et $y_1 = y_2 = 0$ Km. On a estimé la distribution de Lrv dans chaque situation par histogramme portant sur N=500 tirages aléatoires de 2 pistes bruitées ($\sigma_\beta = .28$ °) de K=150 mesures d'azimut espacées de T=4 s. A la figure 2 on a superposé 4 histogrammes dans H1 correspondant à 4 valeurs du paramètre \underline{X} et la loi théorique du X_2^2 centrée : on vérifie notamment l'indépendance de la statistique de Lrv vis à vis de \underline{X} dans H1. La figure 3 représente 3 histogrammes dans H0 pour 2 mouvements de source dont les paramètres de type (1) sont :

$$\underline{X}_1 = (0 \text{ Km}, 10 \text{ Km}, 7.07 \text{ m/s}, -7.07 \text{ m/s}),$$

$$\underline{X}_2 = (0 \text{ Km}, 20 \text{ Km}, 7.07 \text{ m/s}, 7.07 \text{ m/s})$$

et pour 3 durées d'observation différentes (K= 100, 150, 200) auquel on a superposé les lois théoriques du X_2^2 décentrée d'une valeur calculée par (13). Là encore la théorie est bien confirmée : les histogrammes approchent bien les lois théoriques et on vérifie que plus l'observation est longue, plus la valeur moyenne de Lrv est grande, et donc plus le rejet du couple de pistes par le test (12) est probable.

2.4 CALCUL EXPLICITE DES PERFORMANCES DU TEST

Connaissant les 2 densités de probabilité conditionnelle de Lrv, $f1(x/H1)$ dans H1 et $f0(x/H0)$ dans H0, et s'étant fixé un seuil d'association η pour le test (12), nous calculons la probabilité d'association Pa et de fausse association Pfa par :

$$Pa = \int_0^\eta f1(x/H1) dx = .5 \int_0^\eta e^{-x/2} dx = 1 - e^{-\eta/2}, \quad (14)$$

$$Pfa = \int_0^\eta f0(x/H0) dx = .5 \int_0^\eta e^{-I0(\sqrt{\lambda x})} dx.$$

Ainsi pour avoir une Pa de 0.9 il faut prendre le seuil η à 4.6, à partir duquel on peut calculer la Pfa grâce aux fonctions de Marcum [3] $Q_M(a,b)$ puisque l'on remarque que $Pfa = 1 - Q_1(\sqrt{\lambda}, \sqrt{\eta})$. $Q_M(a,b)$ étant une fonction croissante de a et λ une fonction croissante du nombre de mesures K, on trouve bien que la Pfa est une fonction décroissante de K à seuil η fixé : 2 mouvements proches seront d'autant mieux séparés que l'on observera plus longtemps le système.

3 TRAJECTOGRAPHIE PAR TRIANGULATION

On s'intéresse ici à l'estimation du vecteur paramètre \underline{X} du mouvement rectiligne uniforme de l'hypothèse H1 à partir des 2 pistes d'azimuts bruitées P1 et P2 observées sur les antennes.

3.1 CRITERE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Pour estimer \underline{X} on cherchera la valeur, notée $\hat{\underline{X}}$ qui maximise la vraisemblance du couple (P1,P2) dans H1, ce qui s'écrit :

$$\text{Max}_{\hat{\underline{X}}} f(P1, P2/H1, \underline{X}) \quad (16)$$

ou encore

$$\text{Min}_{\hat{\underline{X}}} J_\beta(\underline{X}) \quad (17)$$

avec

$$J_\beta(\underline{X}) = \sum_{k=1}^K (\beta_k - \underline{\beta}(\underline{X}, k))^t C^{-1} (\beta_k - \underline{\beta}(\underline{X}, k)). \quad (18)$$

Le problème de minimisation (18) relève des techniques d'optimisation non linéaire de part la nature de la transformation $\underline{\beta}(\underline{X}, k)$ défini par (6). On s'intéresse d'abord aux performances limites théoriques de l'estimation de \underline{X} .

3.2 BORNE DE CRAMER-RAO

La matrice de covariance d'erreur \underline{V} de tout estimateur $\hat{\underline{X}}(P1, P2)$ de \underline{X} , définie par

$$\underline{V} = E \{ (\hat{\underline{X}} - E(\hat{\underline{X}})) (\hat{\underline{X}} - E(\hat{\underline{X}}))^t \}, \quad (19)$$

est bornée inférieurement par l'inverse de la matrice de Fisher $\underline{F}(\underline{X})$, i.e.

$$\underline{V} - \underline{F}^{-1}(\underline{X}) \geq 0. \quad (20)$$

$\underline{F}(\underline{X})$ étant définie par

$$\underline{F}(\underline{X}) = - E \{ \nabla_{\underline{X}}^t \cdot \nabla_{\underline{X}} \text{Log } f(P1, P2/H1, \underline{X}) \} \quad (21)$$

où $\nabla_{\underline{X}}$ est l'opérateur de dérivation d'un champ vectoriel, on démontre facilement qu'elle peut s'exprimer :

$$\underline{F}(\underline{X}) = \sum_{k=1}^K (\nabla_{\underline{X}} \underline{\beta}(\underline{X}, k)) C^{-1} (\nabla_{\underline{X}} \underline{\beta}(\underline{X}, k))^t \quad (22)$$

où $(\nabla_{\underline{X}} \underline{\beta}(\underline{X}, k))^t$ est la matrice (2,4) de terme générique $(\partial/\partial x_j) \beta_i(\underline{X}, k)$ avec $i=1,2$ et $j=1, \dots, 4$.

Si l'on s'intéresse aussi à l'estimation de \underline{X}_k avec $k \neq K$, ses propriétés statistiques théoriques se déduisent simplement des expressions (2) et (21) et on a

$$\underline{V}_k \geq \underline{F}_k^{-1}(\underline{X}) \quad (23)$$

avec $\underline{F}_k(\underline{X}) = \underline{\Phi}(k, K) \underline{F}(\underline{X}) \underline{\Phi}(k, K)^t$.

Considérant les composantes de position de \underline{X}_k , i.e. x_k et y_k , on peut déterminer des ellipses d'incertitude à $a\sigma$ en diagonalisant la sous-matrice (2,2) de $\underline{F}_k(\underline{X})$ correspondant à ces 2 composantes.

On rappelle que la probabilité de présence d'un estimé dans cette ellipse à $a\sigma$ est donnée par

$$p(a) = 1 - \exp(-a^2/2), \quad (25)$$

ce qui donne 87% de chances pour des ellipses à 2σ .

3.3 ALGORITHME ET SIMULATION

Pour résoudre le problème (17) on a utilisé un algorithme itératif du type Gauss-Newton qui repose sur la linéarisation de la transformation (6). Afin de juger des performances statistiques de cet estimateur on a effectué des simulations de Monté-Carlo sur N=100 tirages aléatoires de 2 pistes de K=150 mesures bruitées ($\sigma_\beta = .28$ °).



mouvement $\underline{X} = (0 \text{ Km}, 10 \text{ Km}, -7.07 \text{ m/s}, -7.07 \text{ m/s})$.
 Pour chaque estimation de \underline{X} , on a affiché 4 points de la trajectoire aux instants $t_1, t_{50}, t_{100}, t_{150}$, en superposition aux ellipses d'incertitude à 2σ aux mêmes instants (figure 4). Il semblerait que cet estimateur atteigne la borne.

4 CONCLUSION-REFERENCES

Un test simple d'association de pistes en azimuth provenant de 2 plates-formes distinctes spatialement a été développé ainsi que ses performances. Il permet d'associer 2 pistes à partir desquelles on peut trajectographier par triangulation des sources en mouvement rectiligne uniforme. Les performances limites de cette méthode de localisation ont été déterminées et laissent espérer des résultats pratiques intéressants, d'autant plus que l'algorithme de simulation utilisé atteint la borne.

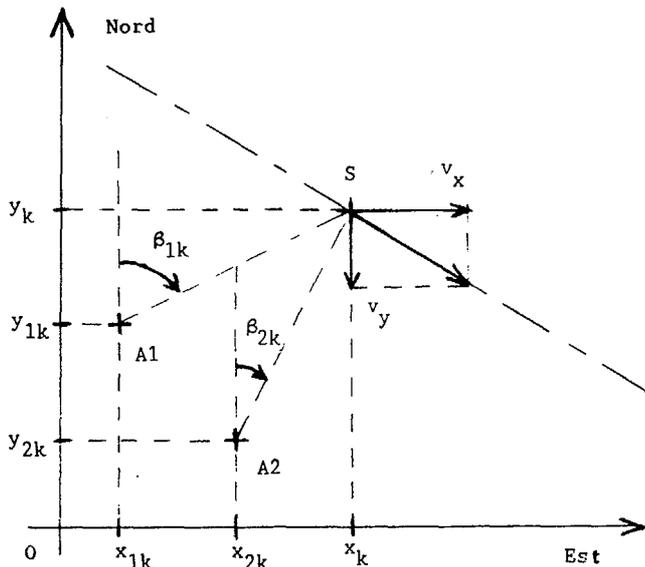


figure 1 : paramétrisation des mouvements source - antennes dans un référentiel géographique.

- [1] Kendall & Stuart; "Advanced Theory of Statistics"; Vol 2; § "Likelihood Ratio Test".
- [2] G Vezzosi; "Une méthode fréquentielle pour l'estimation des temps de retard. ..."; Etude financée par le CELAR; Juin 86.
- [3] G.M. Dillard; "Recursive Computation of the Generalized Q Function"; IEEE trans. on Aerospace and Electronic Systems; July 73.
- [4] R.S. Engelbrecht; "Passive Source Localization from Spatially Correlated Angle-of-Arrival Data"; IEEE Trans. on ASSP, Vol 31, n° 4, August 83.
- [5] J.F. Arnold, Y. Bar-Shalom, R. Estrada, R.A. Mucci; "Target Parameter Estimation Using Measurements Acquired with a small Number of Sensors"; IEEE J. of Oceanic Engineering, Vol OE-8, July 83.

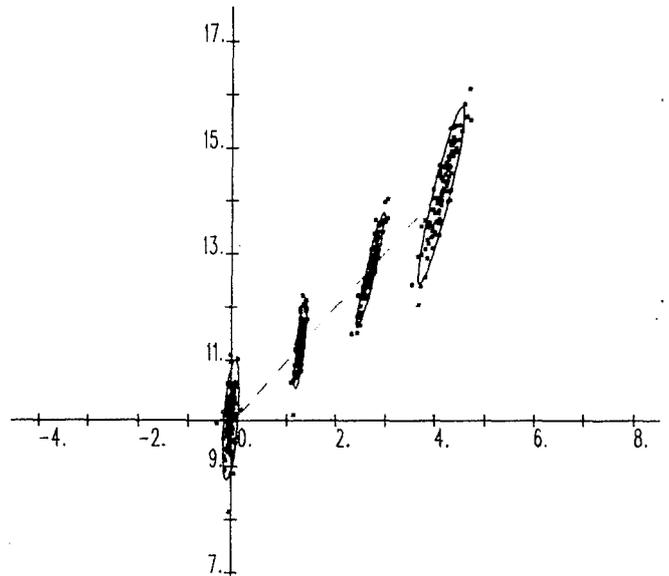


figure 4 : simulation de Monté-Carlo et comparaison à la borne de Cramer-Rao.

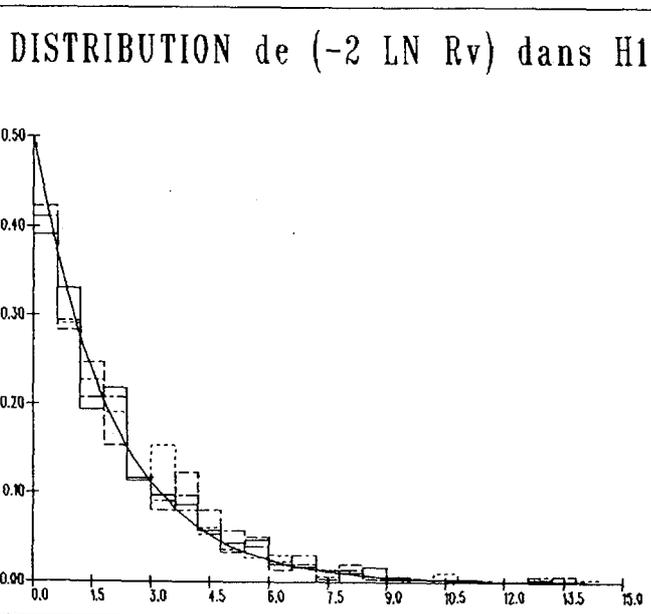


figure 2 : 4 histogrammes dans H1(\underline{X}) et loi du X_2^2 .

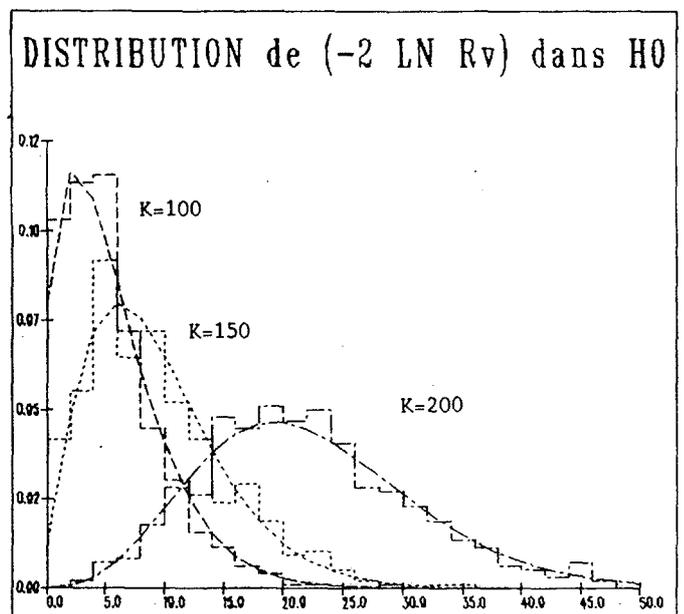


figure 3 : histogrammes dans H0($\underline{X}_1, \underline{X}_2$) et lois du $X_2^2(\lambda)$ pour 3 durées d'observation.