



AUTOSTABILISATION DES PREDICTEURS ARMA ADAPTATIFS A ENTREE SINUSOIDALE,
CONTROLES PAR L'ERREUR A PRIORI ET A POSTERIORI

M. JAÏDANE-SAÏDANE ^{1,3}, O. MACCHI ^{1,3}, N. M' SIRDY ^{2,3}

¹Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-ESE,
Plateau du Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette, France

²Laboratoire d'Automatique de Grenoble, ENSIEG,
B.P.46 - 38402 St. Martin d'Hères, France

³GRECO - SARTA

Résumé

La structure réursive des prédicteurs ARMA adaptatifs pose des problèmes de stabilité. Bien que sous optimaux, des algorithmes simples de type LMS classiquement utilisés en traitement du signal maintiennent la stabilité globale (entrée bornée, sortie bornée) du prédicteur réursif. En présence d'erreurs de modélisation, (par exemple pour une entrée à bande étroite) des instabilités locales de la partie MA contrôlées par un phénomène d'autostabilisation sont permises. L'utilisation de l'erreur a posteriori dans l'adaptation améliore le comportement qualitatif du prédicteur en atténuant les pics de l'erreur de prédiction, tout en maintenant la stabilité globale de ce dernier, ceci sans procédure externe de stabilisation.

Abstract

The recursive structure of adaptive ARMA predictors involves stability problems. Although suboptimal, simple algorithms such as the LMS one, which is usual in the field of signal processing, maintain the global stability of the recursive predictor (bounded input, bounded output). In the presence of modelling errors, for example with narrowband inputs, local instabilities of the MA part, controlled by the selfstabilization phenomenon, are permitted. The use of the a posteriori error in the adaptation improves the qualitative behaviour of the predictor. It smooths the prediction error peaks and maintains global stability without an external stabilization procedure.

I. Le problème de la prédiction ARMA adaptative

Les prédicteurs ARMA adaptatifs sont classiquement utilisés par les traiteurs de signaux, par exemple en transmission, et par les automaticiens pour le contrôle des processus. Pour chacune de ces disciplines les exigences d'optimalité sont différentes. Par contre, la condition de stabilité se pose quelle que soit l'application, du fait de la structure réursive du prédicteur qui comporte une moyenne ajustée (MA) donc avec des pôles.

Dans notre travail, le prédicteur considéré est adaptatif et de plus son entrée est un signal à bande étroite. De ce fait le problème de la stabilité se pose d'une façon non classique: sans risque que la sortie explose, le système peut admettre des pôles à l'extérieur du cercle unité pourvu que ceci soit peu fréquent - le système varie au cours du temps - et/ou pourvu que les fréquences de ces pôles ne soient pas celles des entrées. C'est pourquoi dans ce qui suit, nous nous préoccupons de stabilité globale (entrée bornée, sortie bornée).

Dans l'exemple particulier de la transmission numérique des signaux téléphoniques, qui utilise des prédicteurs adaptatifs, une faible complexité de calculs est nécessaire. Elle est obtenue par une adaptation de type LMS, dénommée (C) dans la suite car c'est un algorithme classique en traitement du signal. Cette adaptation bien que sous optimale assure la stabilité globale du prédicteur. Dans le cas d'erreurs de modélisation, par exemple pour des entrées à bande étroite, des instabilités locales sont permises. Elles sont alors contrôlées par un phénomène appelé autostabilisation [1] qui ne dégrade pas la transmission.

En automatique, l'exigence d'optimalité est plus cruciale mais la complexité des calculs n'est plus si contraignante. On a tendance à utiliser l'algorithme (G) du gradient stochastique car il est optimal. Malheureusement il n'assure pas la stabilité globale [1].

En se permettant une complexité des calculs plus grande que dans le cas LMS, comment construire un algorithme d'adaptation proche de l'optimalité qui

conserve pourtant la stabilité globale? Telle est la question que nous nous posons ici. Pour trouver une réponse, nous avons considéré la notion d'erreur de prédiction a posteriori [2] qui permet de construire des algorithmes proches de l'optimalité. Après avoir rappelé les caractéristiques de l'autostabilisation pour des algorithmes de type LMS, la présente étude montre que la stabilité globale est conservée lorsqu'on remplace l'erreur de prédiction a priori par l'erreur a posteriori. On obtient un algorithme à la fois stable et plus efficace, en ce qu'il lisse le phénomène d'autostabilisation.

II. Erreurs de contrôle a priori et a posteriori

Dans une prédiction de type ARMA, la prédiction \hat{s} à un pas d'un signal s supposé stationnaire est une combinaison linéaire des valeurs passées de ce signal et de l'erreur de prédiction e :

$$\hat{s}_n = A^T S_n + B^T E_n; e_n = s_n - \hat{s}_n, \quad (2-1)$$

avec $S_n = (s_{n-1}, \dots, s_{n-p})^T$ et $E_n = (e_{n-1}, \dots, e_{n-q})^T$. Dans le signal prédit, $A^T S_n$ représente la partie autorégressive (AR) d'ordre p et $B^T E_n$ représente la partie moyenne ajustée (MA) d'ordre q . Pour condenser on écrira $\hat{s}_n = \theta^T \phi_n$ à l'aide du vecteur paramètre $\theta^T = (A^T, B^T)$ et du vecteur "observation" $\phi_n^T = (S_n^T, E_n^T)$.

Les estimations des paramètres A et B du prédicteur sont obtenues en minimisant de façon itérative un critère mettant en jeu l'erreur de prédiction. Lorsque dans la prédiction du signal à l'instant n , les paramètres A et B inconnus sont remplacés dans (2-1) par leurs estimées A_{n-1} , B_{n-1} basées sur le passé jusqu'à l'instant $n-1$, on construit la prédiction a priori et son erreur

$$\hat{s}_n = A_{n-1}^T S_n + B_{n-1}^T E_n \triangleq \theta_{n-1}^T \phi_n; e_n = s_n - \hat{s}_n. \quad (2-2-C)$$

Après la mise à jour de l'estimation du vecteur paramètre, la prédiction s'améliore; on construit ainsi l'erreur de prédiction a posteriori avec des notations évidentes, l'indice p signifiant a posteriori:



$$\hat{s}_n^p = A_n^T S_n + B_n^T E_n^p \triangleq \theta_n^T \phi_n^p; \quad e_n^p = s_n - \hat{s}_n^p. \quad (2-2-P)$$

Le passé de l'erreur a posteriori peut également servir à construire une autre erreur de prédiction a priori:

$$\hat{s}_n' = A_{n-1}^T S_n + B_{n-1}^T E_n^p \triangleq \theta_{n-1}^T \phi_n^p; \quad e_n' = s_n - \hat{s}_n' \quad (2-2-N)$$

Il y a donc trois possibilités pour le choix du critère à minimiser

$$J(C) = E[e_n^2]; \quad J(P) = E[(e_n')^2]; \quad J(N) = E[(e_n^p)^2]. \quad (2-3)$$

L'adaptation de type gradient qui mène à l'optimum est la suivante:

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \frac{\beta}{2} \nabla_{\theta} (J); \quad \beta > 0. \quad (2-4)$$

Lorsque le prédicteur est purement AR, on démontre [3] que l'adaptation dite LMS qui consiste à minimiser l'erreur de prédiction a priori par à-coups (en supprimant l'espérance) est encore optimale. On utilise donc le gradient stochastique

$$\nabla_{\theta} (e_n^2) = -2 e_n \phi_n, \quad (2-5)$$

avec des équations semblables pour les deux autres critères.

Lorsque le prédicteur contient une partie MA, le vecteur observation contient des valeurs passées de l'erreur de prédiction, elles-mêmes dépendantes de θ . L'algorithme du gradient optimal appelé (G) nécessite dans l'incrément le filtrage du vecteur observation par la partie récurrente MA [4]. Nous avons montré antérieurement [1] qu'un tel algorithme du gradient n'assure pas la stabilité du prédicteur.

Une approximation de type LMS [5] consiste à supposer la dépendance entre ϕ et θ négligeable. Le calcul du gradient de l'erreur donné par (2-5) devient donc une approximation. Ceci conduit aux trois algorithmes d'adaptation suivants pour les critères (2-3):

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \beta \phi_n e_n; \quad (2-6-C)$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \beta \phi_n^p e_n'; \quad (2-6-P)$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \beta \phi_n^p e_n^p; \quad (2-6-N)$$

L'algorithme classique (2-6-C) est associé au prédicteur (2-2-C) tandis que chacun des algorithmes (2-6-P) et (2-6-N) est associé aux deux équations (2-2-P) et (2-2-N). La causalité de l'algorithme (2-6-N) est obtenue en remarquant que les erreurs a priori et a posteriori sont reliées par

$$e_n^p = e_n' / [1 + \beta |\phi_n^p|^2]; \quad (2-7-N)$$

d'où la notation (N) comme erreur a priori normalisée. L'algorithme (N) proposé dans [6] est issu de l'algorithme des moindres carrés étendus et assure la stabilité globale du prédicteur indépendamment des conditions initiales.

L'algorithme (P) représente l'étape intermédiaire entre (C) et (N) puisqu'il n'utilise pas de normalisation de l'erreur a priori: la forme (2-6-P) est directement causale. Notons que

$$e_n^p = e_n' [1 - \beta |\phi_n^p|^2]. \quad (2-7-P)$$

Pourtant cet algorithme, comme (C) et contrairement à (P), peut être mis en oeuvre sans effectuer aucune division.

III. Adaptation lente et autostabilisation pour une excitation sinusoïdale

La relation (2-2) peut être mise sous le formalisme polynomial des fonctions de transfert. Si à un instant n le vecteur paramètre B appartient au domaine de stabilité, l'adaptation ne garantit pas que cette propriété soit encore vraie à l'instant $n+1$. Lorsque B sort du domaine de stabilité,

l'algorithme (C) l'oblige à réintégrer ce domaine selon un phénomène dit d'autostabilisation [1]. Nous montrons dans ce qui suit comment cette stabilité globale peut être généralisée aux algorithmes (P) et (N). Le comportement du prédicteur adaptatif est ici analysé dans le cas d'une entrée sinusoïdale et pour une adaptation lente. Remarquons que lorsque cette adaptation est rapide (β élevé) le comportement du prédicteur devient complexe voire chaotique [7].

III-1. Dérive des paramètres MA

L'entrée du prédicteur est une sinusoïde de fréquence f échantillonnée à f_e :

$$s_n = \sin n\phi; \quad \phi \triangleq 2\pi f/f_e \quad (3-1)$$

Lorsque l'adaptation est lente (β petit), le prédicteur peut être considéré comme un filtre linéaire, tant que l'on se trouve à l'intérieur du domaine de stabilité. En conséquence, e pour l'algorithme (C), e' et e^p pour (P) et (N) sont des sinusoïdes à la fréquence de l'entrée, mais d'amplitudes différentes et déphasées par rapport à l'entrée. L'atténuation α et le déphasage du filtre varient lentement au cours du temps.

Ainsi dans (2-6), l'incrément $B_n - B_{n-1}$ de la partie MA a un comportement oscillatoire à la fréquence $2f$ sur lequel se superpose une dérive de direction constante

$$\frac{\Delta B_n}{\alpha^2} = \beta \frac{n}{2} C. \quad (3-2)$$

Par exemple pour les algorithmes (C) et (N) cette direction est

$$C = (\cos \phi, \cos 2\phi, \dots, \cos q\phi)^T. \quad (3-3)$$

Initialisé dans un état stable B_0 , le paramètre B du prédicteur adaptatif dérive suivant une direction donnée par ΔB_n . Il va nécessairement sortir du domaine de stabilité à un instant n_0 , que l'adaptation soit (C), (P) ou (N).

III-2. Non linéarité due à l'adaptation

Le vecteur observation contient les erreurs de prédiction passées (a priori ou a posteriori). Les algorithmes (C), (P) ou (N) constituent donc des systèmes récurrents non linéaires non autonomes [8]

$X_{n+1} = f(X_n, n)$ avec $X_n^T = (E_n^T, \theta_n^T)$ dans le cas (C) et $X_n^T = (E_n^T, E_n^{pT}, \theta_n^T)$ dans les cas (P) et (N). Le gain d'adaptation β contrôle la non linéarité, matérialisée par l'incrément $\theta_n - \theta_{n-1}$.

Considérons tout d'abord un prédicteur MA(q) à entrée sinusoïdale (3-1) dont l'adaptation est figée ($\beta=0$).

On a alors $e = e' = e^p$; $B = (b^1, \dots, b^q)^T$, le système récurrent devient donc linéaire. On démontre ainsi que la sortie du prédicteur peut être décomposée en 2 termes dit erreur "linéaire" et "non linéaire" selon

$$e_n = e_n^L + e_n^{NL}, \quad (3-4)$$

$$e_n^L = \alpha_1 e^{i\phi} + \alpha_2 e^{-i\phi}, \quad (3-5)$$

$$e_n^{NL} = \sum_{i=3}^{q+2} \alpha_i \lambda_i^n, \quad (3-6)$$

où $\lambda_i, i=3, q+2$ sont les racines du polynôme $\lambda^q + b_1 \lambda^{q-1} + \dots + b_q = 0$. Lorsque ces racines sont de module strictement plus petit que 1, le terme non linéaire e_n^{NL} est une composante transitoire. Au bout d'un certain temps il ne subsiste plus que la composante linéaire e_n^L qui est une sinusoïde à la fréquence de l'entrée: le prédicteur est stable.

Lorsque au moins une des racines $\lambda_i, i=3, q+2$ a un module supérieur à 1, le terme e_n^{NL} diverge avec une amplitude exponentiellement croissante: le prédicteur

est instable. Les fréquences contenues dans l'erreur non linéaire e^{NL} sont celles des pôles instables. En particulier, pour un prédicteur MA(1) de paramètre b [1]:

$$e_n^{NL} = \gamma |b|^n (-\text{signe}(b))^n; \quad (3-7)$$

où γ dépend de ϕ et des conditions initiales.

Lorsque le prédicteur devient adaptatif, le paramètre B sort de son domaine de stabilité du fait de la dérive et ce quelque soit l'algorithme (C), (P) ou (N). La stabilité globale du prédicteur dépend de la façon dont l'adaptation prend en compte ce phénomène non linéaire.

III-3. Autostabilisation contrôlée par l'erreur a priori [1]

Considérons le prédicteur MA(1) muni de l'algorithme (C). Lorsque $|b|$ dépasse 1, l'erreur e^{NL} devient prépondérante devant e^L . D'après (3-7), pour une fréquence f inférieure à $f_e/2$, l'erreur e^{NL} est de fréquence $f_e/2$ qui est celle du pôle instable $z=-1$ correspondant à la valeur $b=1$.

L'erreur e^{NL} est exponentiellement croissante. Elle crée une dérive de signe opposé à b qui est nécessairement stabilisante. Ainsi b réintègre le domaine de stabilité. L'erreur non linéaire devient alors transitoire et lorsque e^L domine à nouveau e^{NL} , la dérive déstabilisante puis le phénomène d'autostabilisation ont lieu de nouveau. Ceci confère à l'erreur de prédiction a priori ainsi qu'au paramètre b une évolution quasipériodique qui assure la stabilité globale du prédicteur. La fréquence du phénomène augmente avec β .

Le phénomène d'autostabilisation et le comportement quasipériodique du prédicteur sont illustrés sur la figure III-1 pour $f=500\text{Hz}$, $f_e=8000\text{Hz}$, $\beta=0.005$. Ces valeurs sont conservées pour (P) et (N).

La figure III-1a montre la succession des dérives déstabilisantes puis stabilisantes. On observe que b oscille avec une amplitude constante (fonction croissante de β) autour de la frontière de stabilité: la valeur moyenne de b vaut 1. Dans les zones instables on observe bien la superposition du 500Hz et du 4000Hz (e^{NL}) selon (3-7).

Notons qu'il existe un domaine en (e_0, b_1) pour lequel le prédicteur est instable. Dans la simulation précédente, les conditions $e_0=0, b_1=0$ assurent la stabilité globale du prédicteur.

La présence d'une partie AR dans le prédicteur ne modifie pas le phénomène pour autant que l'ordre de celle-ci soit trop faible pour modéliser de manière adéquate la sinusoïde d'entrée. Ainsi pour un ARMA (1,1), le comportement quasipériodique de b et de e reste semblable à celui d'un prédicteur MA(1): e conserve des explosions locales qui induisent de petites bouffées dans l'évolution du paramètre AR.

L'efficacité de l'algorithme peut être caractérisée par le gain de prédiction $G=E(e_n^2)/E(s_n^2)$ (5.95dB dans le cas de la simulation MA(1)). Mais le comportement "haché" de l'erreur de prédiction a priori avec des pics de forte amplitude n'est pas favorable pour le contrôle d'un système. En automatique on lui préfèrera un comportement plus lisse.

IV. Erreur a posteriori et autostabilisation

L'utilisation de l'erreur a posteriori apporte une amélioration sensible au phénomène d'autostabilisation.

Les comparaisons des simulations issues de chacun des algorithmes (C), (P) et (N) sont faites pour $f=500\text{Hz}$ et $f_e=8000\text{Hz}$.

IV.1. Cas du prédicteur MA(1)

A l'ordre 1, compte tenu des relations (2-7), les adaptations (P) et (N) deviennent respectivement

$$b_n = b_{n-1} + \beta [1 - (e_{n-2}^p)^2] e_n' e_{n-1}', \quad (4-1-P)$$

$$b_n = b_{n-1} + \beta [1 + \beta (e_{n-1}^p)^2]^{-1} [1 + \beta (e_{n-2}^p)^2]^{-1} e_n' e_{n-1}'. \quad (4-2-N)$$

Elles font toutes deux apparaître le produit $e_n' e_{n-1}'$ des erreurs a priori qui, durant la phase de stabilité, sont simplement déphasées par rapport à l'entrée. Ainsi la stabilité globale du prédicteur en présence d'une entrée sinusoïdale est encore assurée par le phénomène d'autostabilisation décrit au paragraphe précédent pour l'algorithme (C).

La figure IV.1 illustre l'algorithme (P). L'amplitude des oscillations de b n'est plus constante, elle décroît au cours du temps de même que celles de e' . A la convergence, b oscille très faiblement autour de 1; l'amplitude de ces oscillations croît avec β (ici 0.00085). De ce fait, la présence dans e' de l'erreur non linéaire à la fréquence du pôle (4000Hz) n'est plus intermittente comme dans (C) mais permanente (figure IV-1c). L'amplitude des oscillations de l'erreur e' est indépendante de β , elle correspond à l'erreur irréductible de modélisation d'une sinusoïde par un MA(1). L'écart entre erreur a priori et a posteriori est très faible; il est limité grâce aux faibles fluctuations de b . En effet, d'après (2-2-N,P) on a à l'ordre 1

$$(b_n - b_{n-1}) e_{n-1}^p = e_n' - e_n^p. \quad (4-3)$$

L'algorithme (N) diffère de (P) par une normalisation supplémentaire qui modifie peu le comportement du prédicteur; celui-ci est très légèrement accéléré. L'avantage de l'algorithme (N) est d'assurer la stabilité globale du prédicteur quelles que soient les conditions initiales, ce qui n'est pas le cas pour (P). Cet avantage ne justifie peut-être pas l'augmentation de complexité qui se traduit par une division, à éviter lors d'une implantation sur ordinateur.

Le comportement lissé du prédicteur obtenu avec les algorithmes a posteriori (P) et (N) est favorable en commande. La même efficacité que pour l'algorithme (C) est obtenue (gain de prédiction égal à 6.05dB) pour un comportement qualitatif supérieur puisque les pics élevés sont lissés.

Notons que la méthode a posteriori n'est plus une prédiction au sens propre puisque la valeur \hat{s}_n est calculée en tenant compte de s_n . Elle ne peut donc pas être utilisée dans un système strictement temps réel; tel un système de transmission où seule l'erreur est transmise (et non s_n).

IV.2. Cas du prédicteur ARMA (1,1)

La stabilité globale d'un prédicteur ARMA (1,1) recevant une sinusoïde et adapté par un algorithme du type (P) ou (N) conduit à un paradoxe. Ainsi que le montre la figure IV-2a pour (P), le paramètre MA oscille à la convergence autour d'une valeur moyenne qui se situe en dehors du domaine de stabilité et s'en éloigne avec l'augmentation de β (à condition de ne pas dépasser une valeur critique de stabilité). L'amplitude des oscillations de b augmente également avec β . L'évolution de e^p (ou e') montre le 500Hz de l'entrée auquel se superpose de façon permanente le 4000Hz du pôle instable. Comme dans le cas MA(1) l'amplitude de l'erreur est indépendante de β à la convergence. Le même phénomène est constaté pour un ARMA (2,2) et une entrée composée de 2 sinusoïdes unitaires de fréquences 500Hz et 1000Hz (figure IV-2b), les paramètres (b_1, b_2) du prédicteur se stabilisent en dehors du triangle de stabilité. Ainsi la stabilité globale d'un prédicteur ARMA adaptatif est-elle obtenue alors que les pôles sont stabilisés à l'extérieur du cercle unité.

Le paradoxe n'est qu'apparent; il suffit que les fréquences associées à ces pôles ne soit pas excitées par les entrées pour éviter l'explosion. Ce phénomène n'est pas apparu dans le cas de prédicteurs MA purs.



Il semble donc lié à la présence d'une partie AR, qui modéliserait mal le signal d'entrée. Notons aussi qu'il n'apparaît jamais pour l'adaptation a priori (C). Ce phénomène est encore imparfaitement expliqué.

V. Conclusion

La structure réursive des prédicteurs ARMA adaptatifs pose des problèmes de stabilité. Bien que sous optimaux, des algorithmes simples de type LMS maintiennent la stabilité globale du prédicteur récurif. En présence d'erreurs de modélisation, par exemple pour une entrée à bande étroite, des instabilités locales de la partie MA apparaissent, lorsque l'algorithme utilise l'erreur de prédiction a priori comme il est classique en traitement du signal. Ces instabilités sont contrôlées par le phénomène d'autostabilisation mais elles entraînent des pics quasipériodiques de grande amplitude à la sortie du système.

Pour lisser les pics de l'autostabilisation nous avons eu recours à l'erreur de prédiction a posteriori: la valeur de l'échantillon s_n intervient indirectement dans sa prédiction \hat{s}_n par la mise à jour des coefficients du prédicteur. C'est une hypothèse assez forte puisqu'elle exclut un traitement en temps réel strict. A ce prix la sortie du système devient lisse. Le principe demeure néanmoins valable: c'est l'intervention d'une composante non linéaire à la fréquence du pôle instable dans l'erreur de prédiction, qui permet l'autostabilisation. D'intermittente qu'elle était pour l'erreur a priori, cette composante non linéaire devient permanente avec l'erreur a posteriori et les bouffées locales sont lissées. Sans dommage pour la stabilité globale, les paramètres du prédicteur

peuvent demeurer en permanence à l'extérieur du domaine de stabilité des systèmes linéaires.

La présente théorie généralisée de l'auto-stabilisation montre que les filtres récurifs adaptatifs, même à variations très lentes, ne peuvent être bien compris que lorsqu'on plonge leur étude dans le cadre plus large des systèmes non linéaires.

Références

- [1] O. MACCHI, M. JAÏDANE, "Stability of an adaptive ARMA predictor in presence of narrowband input signals", Proc. IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control and Signal Processing, Lund, pp.417-422, Juin 1986.
- [2] L.LJUNG, T. SODERSTRÖM, "Theory and practice of recursive identification", MIT Press, 1983.
- [3] O. MACCHI, "Advances in adaptive filtering", Tirrenia, Septembre 1985.
- [4] C.R. JOHNSON, "Adaptive IIR filtering: current results and open issues", IEEE Trans. on Inf. Theory, vol.IT-30, n°2, pp.237-250, Mars 1984.
- [5] P.L. FEINTUCH, "An adaptive recursive LMS filter", Proc. IEEE, vol.64, pp.1622-1624, Novembre 1976.
- [6] C. DON CARLI, P.DE LARMINAT, "Analyse de la stabilité globale d'un algorithme d'identification réursive des systèmes linéaires stochastiques discrets", RAIRO Automatique/Systems analysis and control, vol.12, n°3, pp.269-276, 1978.
- [7] M. JAÏDANE, O. MACCHI, "Comportement chaotique des prédicteurs ARMA adaptatifs: application à la compression des signaux téléphoniques", no. spécial Annales des Télécommunications, Mars 87.
- [8] I. GUMOWSKI, C. MIRA, "Dynamique chaotique", Cepadues Editions, 1980.

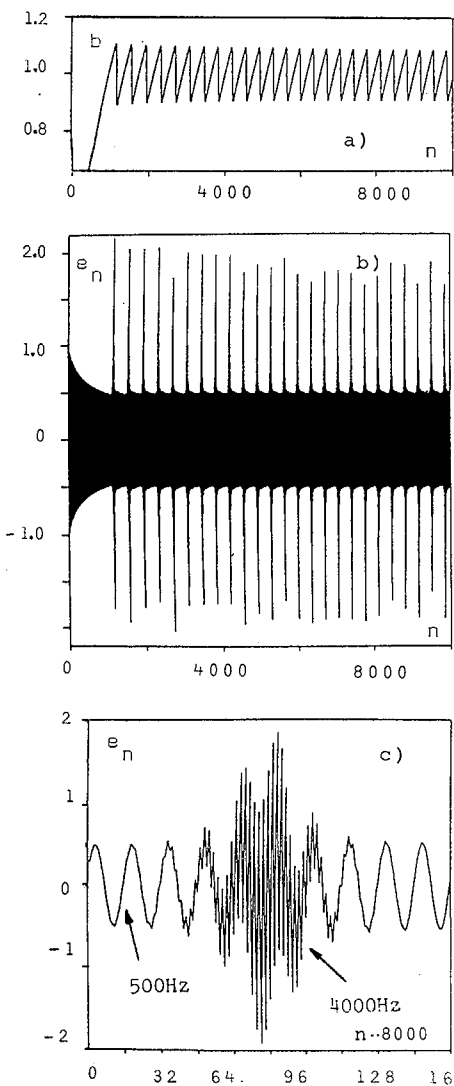


Figure III-1: autostabilisation et algorithme (C), MA(1).

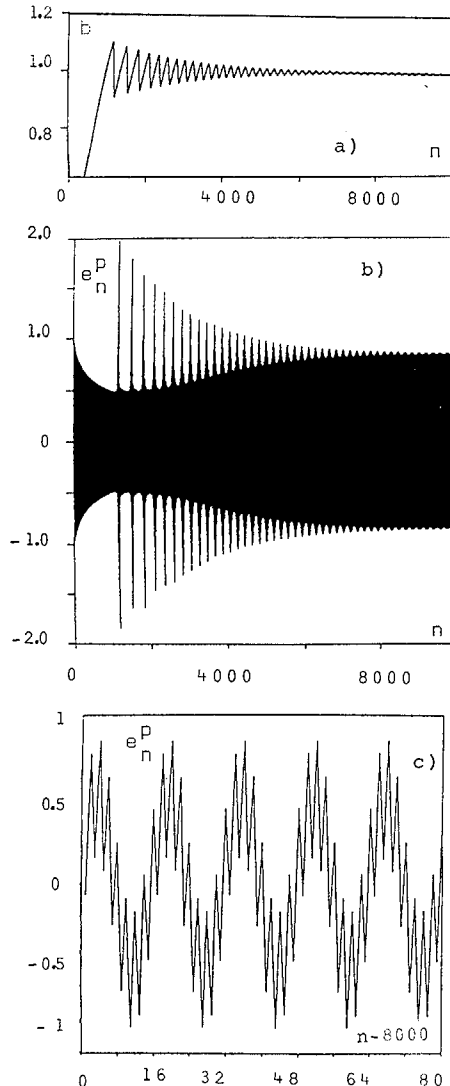


Figure IV-1: autostabilisation et algorithme (P), MA(1).

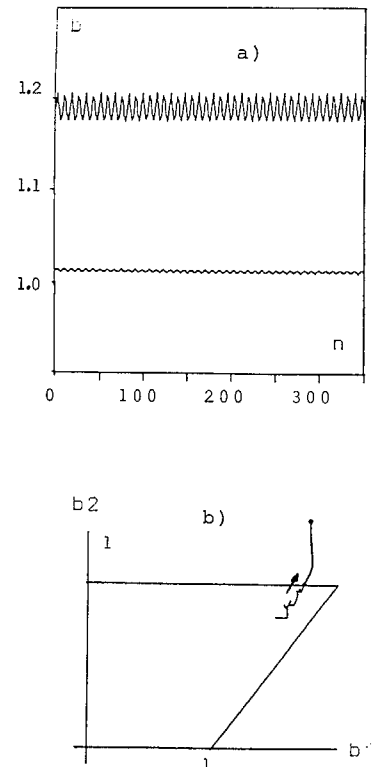


Figure IV-2: algorithme (P) et prédicteur ARMA.