

ALGORITHME MCR POUR FILTRE ADAPTATIF EN CELLULES DU SECOND ORDRE

J.M. Travassos-Romano et M. Bellanger

LSS/ESE

Plateau du Moulon

91190 Gif-sur-Yvette

Résumé

Pour le filtrage adaptatif en cellules du second ordre, une approche basée sur un algorithme des moindres carrés rapide multidimensionnel est présentée dans le cas de l'identification et de la prédiction linéaire. Les signaux d'entrée de l'algorithme, en nombre égal au nombre de cellules, sont constitués par les dérivées de l'erreur de sortie par rapport aux coefficients. Les résultats de simulation confirment le potentiel de hautes performances que présente la méthode.

I. Introduction

Les techniques adaptatives sont à la base de l'analyse des signaux en temps réel [1]. Dans ce domaine il est souvent utile et parfois nécessaire de déterminer les résonances; c'est le cas notamment en mécanique pour les études de vibrations ou encore en analyse de parole dans la recherche des formants. La structure de filtre appropriée est alors formée d'un ensemble de cellules du second ordre en cascade. Or, la mise en oeuvre de techniques adaptatives avec une telle structure présente une difficulté car la détermination des coefficients d'un polynôme à partir des zéros, et l'inverse, sont des opérations non linéaires alors que, pour des raisons de complexité, il est généralement impératif en pratique de se limiter aux traitements linéaires.

Une première approche consiste à utiliser un algorithme du gradient, pour lequel le calcul de la dérivée du signal d'erreur par rapport aux coefficients conduit à la structure représentée sur la figure 1. Un filtre RIF d'ordre 2K, de fonction de transfert H(z) telle que:

$$H(z) = \prod_{i=1}^K H_i(z) = \prod_{i=1}^K (h_{i0} + h_{i1} z^{-1} + h_{i2} z^{-2}) \quad (1)$$

est décomposé en K cellules du second ordre et le signal d'entrée x(n) est appliqué à un ensemble de K branches comportant chacune l'ensemble des cellules mais dans un ordre différent. Le signal d'erreur e(n) est obtenu en soustrayant la sortie $\bar{y}_i(n)$ de chaque branche de la référence y(n). On peut vérifier directement que les signaux intermédiaires $u_i(n-j)$, avec $1 \leq i \leq K$ et $0 \leq j \leq 2$, représentent les dérivées des signaux $\bar{y}_i(n)$ par rapport aux coefficients h_{ij} [2]. Dans chaque branche l'algorithme adaptatif ne s'applique qu'à la dernière cellule et le système fonctionne comme un ensemble de K filtres adaptatifs d'ordre 2 indépendants. Il en résulte que, les cellules n'étant pas différenciées et étant traitées séparément, la convergence vers le minimum unique cherché n'est garantie, en théorie, que si les zéros sont répartis dans les domaines de convexité que présente alors la fonction erreur quadratique; par suite la méthode est inutilisable dans le cas général. Néanmoins, moyennant l'introduction de contraintes appropriées, des structures réalisables et efficaces peuvent être élaborées [3,4].

L'objet du présent article est d'étudier une seconde approche qui consiste à faire appel à une structure indépendante de l'ordre des cellules associée à une méthode de moindres carrés, utilisant, pour limiter la complexité, un algorithme de moindres carrés rapide (MCR).

Abstract

A multidimensional fast least squares algorithm can be used for adaptive filtering in cascade form. The approach is presented for identification and linear prediction. The algorithm input dimension equals the number of second order sections in the cascade and the signals are the derivatives of the filter output error with respect to the coefficients. Simulation results confirm that a high level of performance can be expected from the method.

II. Application d'un algorithme MCR multidimensionnel

Soit la fonction coût J(n) correspondant à un ensemble de n données et définie par:

$$J(n) = \sum_{p=1}^n w^{n-p} e^2(p) \quad (2)$$

où w ($0 < w < 1$) est un facteur de pondération. Avec la structure directe pour le filtre, l'erreur s'écrit:

$$e(p) = y(p) - H^t X(p) \quad (3)$$

où H est le vecteur des coefficients et X(p) le vecteur des données d'entrée les plus récentes. La surface d'erreur représentant le coût J(n) en fonction des éléments du vecteur H est convexe et le minimum unique est donné par:

$$H_m = \left[\sum_{p=1}^n w^{n-p} X(p) X^t(p) \right]^{-1} \sum_{p=1}^n w^{n-p} X(p) y(p) \quad (4)$$

La décomposition en cellules du second ordre conduit à une autre expression que (3) pour e(n). Cependant, si l'on fait abstraction de l'ordre des cellules, les ensembles de coefficients correspondant aux structures directe et décomposée sont liés par une relation biunivoque, correspondant à la factorisation d'un polynôme. Dans ces conditions, la surface d'erreur représentant J(n) en fonction des coefficients associés à la structure décomposée présente le même minimum.

Une approche pour s'affranchir de l'ordre des cellules consiste à adopter le schéma de la figure 2, où le signal d'erreur est obtenu en soustrayant de la référence y(n) la moyenne des signaux issus de K branches, où les cellules sont permutées comme indiqué.

L'annulation des dérivées de J(n), par rapport aux coefficients $h_{ij}(n)$ des cellules, fournit l'ensemble optimal H(n), qui s'exprime en fonction des signaux $u_i(n-j)$ par le système:

$$H(n) = R_{uu}^{-1}(n) \sum_{p=1}^n w^{n-p} U(p) y(p) \quad (5)$$

où U(p) représente le vecteur des dérivées $u_i(p-j)$ et $R_{uu}(n)$ la matrice de corrélation:

$$R_{uu}(n) = \sum_{p=1}^n w^{n-p} U(p) U^t(p) \quad (6)$$

Les équations (5) sont non linéaires par rapport aux paramètres $h_{ij}(n)$, car ces derniers interviennent dans la détermination des éléments $u_i(p-j)$ pour $1 \leq p \leq n$. Cependant si l'ensemble des coefficients est suffisamment proche de l'optimum pour qu'un



développement au premier ordre soit valable, l'accroissement à leur donner ΔH pour atteindre cet optimum est obtenu en minimisant la fonction:

$$J_1(n) = \sum_{p=1}^n w^{n-p} [Ke(p) - U^t(p) \Delta H]^2 \quad (7)$$

Par annulation des dérivées de $J_1(n)$ par rapport aux éléments du vecteur ΔH il vient:

$$\Delta H = R_{uu}^{-1}(n) \sum_{p=1}^n w^{n-p} Ke(p) U(p) \quad (8)$$

La solution de cette équation peut être calculée pour un bloc de données [2]. Le filtrage adaptatif implique plutôt en général un calcul à chaque valeur de l'indice et il peut être mis en oeuvre par un algorithme multidimensionnel, où les signaux d'entrée sont les K signaux intermédiaires $u_i(n)$ [4,1]. La figure 3 donne l'ensemble des opérations correspondant à un algorithme MCR pour un filtre à K entrées et N coefficients par entrée, dans lequel le nombre de multiplications à effectuer est de l'ordre de $(7N+6)K^2$. Dans l'application considérée, le nombre de coefficients par entrée est limité à trois: $N \leq 3$. La structure de filtre est celle de la figure 2.

Il est important de remarquer qu'un algorithme des moindres carrés de type récursif minimise la fonction coût $J(n+1)$ à partir des coefficients qui minimisent $J(n)$, avec l'hypothèse que les données reçues jusqu'à l'indice n ne changent pas à l'indice $(n+1)$. Or cette hypothèse n'est pas vérifiée pour les signaux $u_i(p)$, avec $1 \leq p \leq n$, car les valeurs $u_i(p)$ à l'indice $(n+1)$ dépendent des coefficients à calculer comme indiqué précédemment, ce qui est la traduction de la non-linéarité du problème. Dans ces conditions, il apparaît clairement que l'utilisation de l'algorithme de la figure 3 est d'autant plus justifiée que les coefficients sont proches de l'optimum, car les variations entre deux valeurs de l'indice deviennent petites, mais aussi que le nombre de cellules est plus faible.

Alors, pour ce qui est des paramètres de l'adaptativité, la précision de l'algorithme après convergence est comparable à celle de la structure directe, mais la constante de temps est délicate à déterminer. Il faut noter de ce point de vue l'importance que peut avoir l'information a priori pour réduire le plus possible le domaine d'évolution des coefficients. Par exemple, s'il est connu que les zéros du filtre cherché sont à l'intérieur du cercle unité, alors des limites imposées aux coefficients peuvent garantir la convergence et l'accélérer.

Comme pour l'algorithme du gradient, la non-différenciation des cellules est un obstacle qui, dans l'algorithme MCR de la figure 3, peut être levé par les valeurs initiales. En effet, en prenant comme valeur initiale $E_{Ka}(0)$ de la matrice d'erreur quadratique de prédiction avant une matrice diagonale avec des termes différents, les signaux $u_i(n)$ se trouvent différenciés et il en est de même des cellules du second ordre.

III. Résultats de simulation

Dans la mise en oeuvre, le schéma de la figure 2 peut être simplifié, pour le calcul des signaux intermédiaires, comme indiqué sur la figure 4, à la condition que les zéros du filtre restent dans le cercle unité [2]. Cette contrainte de stabilité peut d'ailleurs être imposée aux coefficients dans leur évolution.

Une simulation a été faite, avec pour signal d'entrée $x(n)$ un bruit blanc et une référence $y(n)$ donnée par:

$$y(n) = x(n) + 1,294x(n-1) + 1,036x(n-2) + 0,512x(n-3) + 0,177x(n-4).$$

Dans l'algorithme $K=2; N=3; W=0,99; H(0)=0$ et la matrice d'erreur initiale ayant la valeur: $E_{Ka}^{-1}(0) = \text{diag}[1; 1,125]$.

Après convergence les cellules du second ordre suivantes ont été obtenues:

$$H_1(z) = 1,09 + 0,186z^{-1} + 0,421z^{-2}; H_2(z) = 0,918 + 1,031z^{-1} + 0,420z^{-2}$$

ce qui correspond bien à la fonction de transfert $H(z)$ entre la référence et l'entrée puisque $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$. L'évolution des coefficients et des zéros dans le plan complexe est présentée à la figure 5. On peut observer que les coefficients se stabilisent après 60 itérations environ et des variations importantes, dues aux approximations de la méthode, qui se produisent quand les coefficients sont loin des valeurs optimales, comme indiqué au paragraphe précédent.

IV. Cas de la prédiction linéaire

La prédiction linéaire correspond à la décomposition suivante de la fonction de transfert $H(z)$ du filtre:

$$H(z) = \prod_{i=1}^K (1 + h_{i1}z^{-1} + h_{i2}z^{-2}) \quad (9)$$

avec un signal de référence nul, $y(n)=0$. L'erreur de prédiction est obtenue directement en sortie des K branches, comme le montre la figure 1, c'est-à-dire que les h_{ij} sont des coefficients de prédiction. Or l'algorithme MCR de la figure 3 calcule lui-même une matrice $A_K(n)$, à KN lignes et K colonnes, de coefficients de prédiction et il faut d'abord relier ces deux catégories de paramètres.

La matrice $A_K(n)$ est donnée par (voir chapitre 8 dans [1]):

$$A_K(n) = R_{uu}^{-1}(n-1) \sum_{p=1}^n w^{n-p} U(p-1) [u_1(p), \dots, u_K(p)] \quad (10)$$

Or la prédiction linéaire peut aussi être interprétée comme un filtrage adaptatif avec des cellules dont le premier coefficient est nul, $h_{oi}=0$ et le signal de référence tel que:

$$y(n) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K u_i(n) \quad (11)$$

Dans ces conditions, la procédure de minimisation de l'équation (2) conduit au vecteur à $2K$ éléments des coefficients de prédiction:

$$H(n) = R_{uu}^{-1}(n-1) \sum_{p=1}^n w^{n-p} K U(p-1) y(p) \quad (12)$$

En reportant le signal de référence (11) dans cette équation et en la rapprochant de la relation (10), il apparaît que les coefficients $H(n)$ sont obtenus en faisant la somme des colonnes de la matrice $A_K(n)$.

A titre d'illustration la figure 6 représente l'évolution des coefficients et des zéros dans le plan complexe, d'un filtre à $K=3$ cellules du second ordre, pour le signal:

$$x(n) = \sin n \frac{2\pi}{8} + \sin n \frac{2\pi}{3} + \sin n \frac{10\pi}{12}$$

Les paramètres de l'algorithme sont les suivants:

$$W=0,99; H(0)=0; E_{Ka}^{-1}(0) = \text{diag} [1; 1,125; 1,25]$$

La convergence est obtenue après quelques centaines d'itérations.

V. Conclusion

Les algorithmes de moindres carrés de type récursif et multidimensionnels peuvent s'appliquer au filtrage adaptatif avec décomposition en cellules du second ordre. Ils conduisent à une approche qui devrait être réalisable dans le cas général et efficace, moyennant un volume de calculs proportionnel au carré de l'ordre du filtre.

Les résultats de simulation apparaissent encourageants pour la rapidité de convergence et la précision d'adaptation. Il reste à approfondir l'étude de l'incidence des approximations faites dans la linéarisation du problème.

La possibilité de disposer de filtres adaptatifs de hautes performances, en cellules du second ordre, ouvre des perspectives intéressantes dans le domaine de l'analyse des signaux en temps réel.

Bibliographie

[1] M. BELLANGER, "Adaptive Digital Filtering and Signal Analysis", Ed. Marcel Dekker Inc., New York, 1987. (Edition française: Masson).

[2] L.B. JACKSON and S.L. WOOD, "Linear prediction in cascade form", IEEE Trans., vol.ASSP-26, n°6, Dec. 1978.

[3] J.M. RAULIN, G. BONNEROT, J.L. JEANDOT and R. LACROIX, "A 60-channel PCM-ADPCM converter", IEEE Trans., vol.COM-30, n°4, April 1982.

[4] W.K. JENKINS and M. NAYERI, "Adaptive filters realized with second order sections", Proc. ICASSP-86, Tokyo, April 1986, pp.2103-2106.

[5] G. CARAYANNIS, D. MANOLAKIS and N. KALOUPSIDIS, "A unified view of parametric processing algorithms for prewindowed signals", Signal Processing, vol.10, n°4, 1986, pp.335-368.

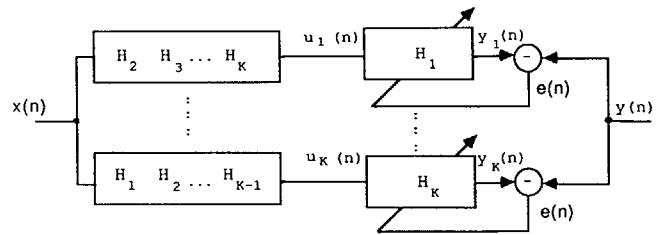


Fig.1: Principe du filtre adaptatif par gradient, en structure cascade avec un ensemble de N/2 cellules du second ordre.

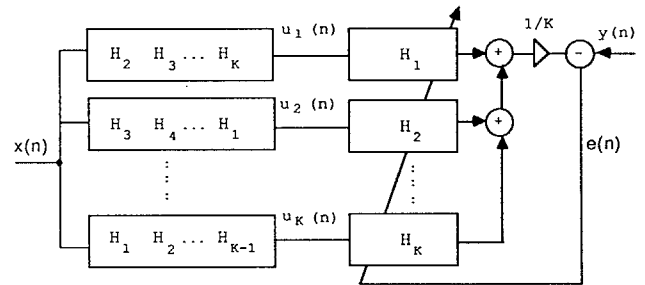


Fig.2: Filtre adaptatif en structure cascade avec algorithme MCR multidimensionnel.

1- Quantités disponibles à l'indice n :

- .Vecteur des coefficients du filtre adaptatif : $H(n)$ (KN éléments)
- .Matrice de prédiction avant : $A_K(n)$ (KN lignes, K colonnes)
- .Matrice de prédiction arrière : $B_K(n)$ (KN lignes, K colonnes)
- .Vecteur de données à KN éléments : $U(n)$
- .Vecteur gain d'adaptation : $G(n)$ (KN éléments)
- .Matrice d'erreur de prédiction quadratique : $E_{Ka}(n)$ (dimension K)

2- Nouvelles données à l'indice (n+1) :

- .Signal d'entrée : $x(n+1)$
- .Signal de référence : $y(n+1)$
- .Entrée multidimensionnelle : $x(n+1) = [u_1(n+1), \dots, u_K(n+1)]^t$

3- Calcul du nouveau gain d'adaptation :

- .Erreur de prédiction avant (K élém.) : $e_a(n+1) = x(n+1) - A^t(n) \cdot U(n)$
- .Matrice de prédiction avant : $A_K(n+1) = A_K(n) + G(n) \cdot e_a^t(n+1)$
- .Erreur de préd. à posteriori (K élém.) : $e_a(n+1) = x(n+1) - A^t(n+1) \cdot U(n)$
- .Matrice d'erreur quadratique : $E_{Ka}(n+1) = W E_{Ka}(n) + e_a(n+1) \cdot e_a^t(n+1)$
- .Gain d'adaptation intermédiaire (KN+K éléments) :

$$G_1(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ G(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_K \\ -A_K(n+1) \end{bmatrix} E_{Ka}^{-1}(n+1) \cdot e_a(n+1) = \begin{bmatrix} m(n+1) \\ M(n+1) \end{bmatrix}$$

- .Erreur de préd. arrière (K élém.) : $e_b(n+1) = x(n+1-N) - B^t(n) \cdot U(n+1)$
- .Vecteur gain : $G(n+1) = [1 - e_b^t(n+1) \cdot m(n+1)]^{-1} [M(n+1) + B_K(n) \cdot m(n+1)]$
- .Matrice de prédiction arrière : $B_K(n+1) = B_K(n) + G(n+1) \cdot e_b^t(n+1)$

4- Obtention des coefficients du filtre en cascade :

- Filtrage adaptatif :
 - .Erreur en sortie : $e(n+1) = y(n+1) - (1/K) \cdot [H^t(n) \cdot U(n+1)]$
 - .Coefficients : $H(n+1) = H(n) + G(n+1) \cdot e(n+1)$
- Prédiction linéaire :
 - .Coefficients de prédiction : $H(n+1) = \sum A_i(n+1) ; i=1, \dots, K$

Fig. 3: Algorithme MCR multidimensionnel.

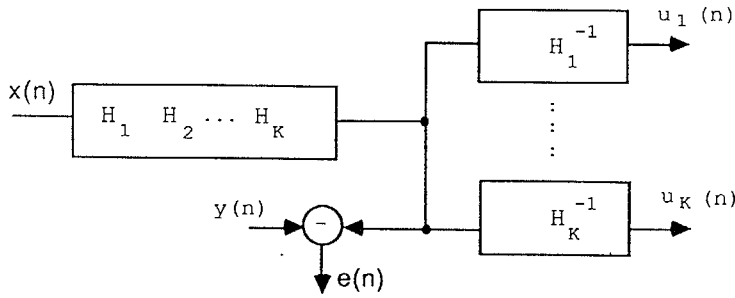


Fig.4: Schéma simplifié pour le calcul des signaux intermédiaires.

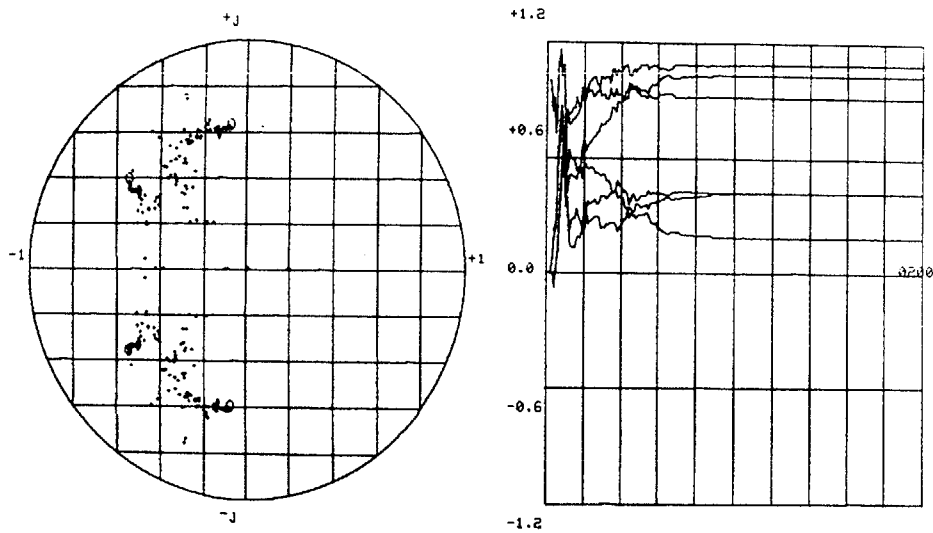


Fig. 5: Evolution des zéros et coefficients d'un filtre adaptatif décomposé en deux cellules du second ordre.

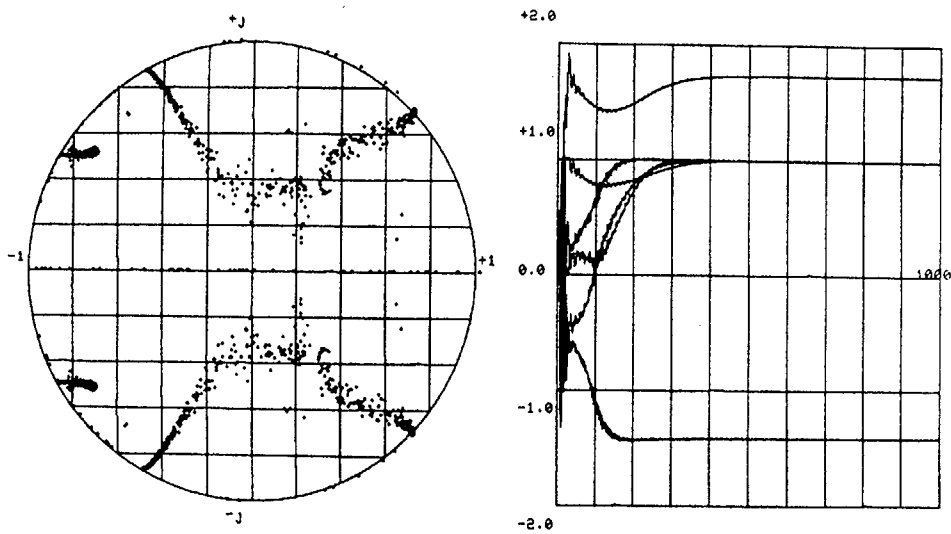


Fig. 6: Evolution des zéros et coefficients d'un filtre de prédiction linéaire décomposé en trois cellules du second ordre.