

ESTIMATION DE LA MATRICE DE COVARIANCE ET METHODES D'IDENTIFICATION A
HAUTE RESOLUTION

A.OUAMRI* , H.CLERGEOT**

* USTO , INSTITUT D'ELCTRONIQUE B.P 1505 31 ORAN ALGERIE

** ENSET , LESIR 61 Avenue du PRESIDENT WILSON , 94 CACHAN , FRANCE.

Les méthodes courantes d'identification non biaisées, à haute résolution utilisent la décomposition en valeurs singulières de la matrice de covariance.

Cette dernière estimée à partir d'un nombre fini d'échantillons n'a pas une structure de Toeplitz.

Le but de cette communication est de présenter une nouvelle méthode de calcul de la matrice de covariance sous forme Toeplitz qui n'introduit pas de biais sur l'estimation de l'espace signal. Les performances de ces méthodes seront discutées.

1) INTRODUCTION:

La modélisation des observations par des fréquences pures noyées dans un bruit additif constitue une approximation raisonnable pour un certain nombre d'applications utilisant le traitement d'antenne. C'est le cas de la localisation des sources en écoute passive ou des échos en situation des trajets multiples par une antenne linéaire.

Les méthodes de localisation à haute résolution (sans biais) exploitent l'espace propre associé à la matrice de covariance du signal [1] [2]. On rappelle que cet espace propre se décompose en deux sous-espaces orthogonaux: espace source et espace bruit. Un point important qui conditionne en grande partie les performances de ces méthodes est: le critère de séparation et d'exploitation de ces deux sous-espaces. 3. Il apparaît indispensable de disposer d'une méthode adéquate pour l'estimation de la matrice de covariance compte tenu du nombre fini d'échantillons. En fait cette phase d'estimation de la matrice de covariance constitue le premier passage obligé sur lequel s'appuient les méthodes d'identifications.

Il conditionne également la qualité des résultats obtenus. Ainsi une méthode de localisation est caractérisée à la fois par la procédure de calcul de la matrice de

The so-called high resolution methods in spatial signal processing, use the Singular Value Decomposition (SVD) of the covariance matrix. This estimated matrix from a finite number of samples does not present a Toeplitz structure. The purpose of this paper is to present a new method for calculation of this covariance matrix which can have a Toeplitz structure. This method does not introduce any bias on the signal space.

We also discuss the performance of the high resolution method.

covariance et par le critère d'exploitation de la structure propre correspondant (l'aspect complexité n'est pas considéré ici).

Le but de cette communication est de discuter les principales méthodes de calcul de la matrice de covariance. Nous présentons une nouvelle méthode d'estimation de cette matrice sous forme Toeplitz qui n'introduit pas de biais sur l'estimation de l'espace signal. Ensuite nous discutons les performances des méthodes associées à deux critères couramment utilisés: vecteur orthogonal (méthode de Tufts-Kumaresan et variantes) [4] [5] et projecteur orthogonal (goniomètre [6] ou MUSIC 1).

2-MODELE DE L'OBSERVATION ET DEFINITIONS:
Dans cet article on s'intéresse qu'aux signaux à bande étroite. Ainsi, après filtrage sélectif à la fréquence, la sortie $X_n(t)$ de chaque capteur n ($n=1, N$), à l'instant t ($t=1, T$) se présente comme la somme d'une partie signal $Y_n(t)$ et d'une partie bruit $B_n(t)$, soit, en supposant que la propagation s'effectue par onde plane:

$$X_n(t) = Y_n(t) + B_n(t) \quad (1)$$

$$Y_n(t) = \sum_{m=1}^M g_m(t) \cdot \exp(jn\omega_n t)$$



Où $g_m(t)$ est l'amplitude complexe de la source m à la fréquence f_0 et avec une amplitude $a_m(t); w_m = 2\pi d \frac{\sin \theta_m}{\lambda}$ est la fréquence spatiale définie à partir de l'azimut θ_m de la source m , de la longueur d'onde λ et de la distance d séparant deux capteurs adjacents, $B_n(t)$ est un bruit complexe additif supposé blanc, gaussien de variance σ^2 et décorréolé des $Y_n(t)$; M est le nombre total de sources.

Pour identifier des sources corrélées, il est nécessaire d'utiliser le moyennage spatial [7, 8] ce qui nous conduit à définir à chaque instant t , les K vecteurs d'observation de dimension L de la manière suivante:

$$\begin{aligned} Y_k(t) &= [Y_k(t), Y_{k+1}(t), \dots, Y_{k+L-1}(t)]^T \\ B_k(t) &= [B_k(t), B_{k+1}(t), \dots, B_{k+L-1}(t)]^T \\ X_k(t) &= Y_k(t) + B_k(t) \\ k &= 1, K \quad t = 1, T \end{aligned} \quad (2)$$

où $K = N - L + 1$ représente le nombre de sous-antennes (L éléments) formées à partir de l'antenne linéaire à N capteurs; T est la durée d'observation.

A chaque source m on associe un vecteur source S_m défini par:

$$S_m = Z_m^{-\frac{L-1}{2}} [1, Z_m, \dots, Z_m^{L-1}]^T \quad (3)$$

L'espace source E_s est l'espace engendré par l'ensemble des vecteurs source S_m $1 \leq m \leq M$.

Des relations (1) - (3) on déduit que les vecteurs $Y_k(t)$ appartiennent à l'espace source E_s .

Inversement, si l'espace engendré par les vecteurs $Y_k(t)$, $1 \leq k \leq K$ et $1 \leq t \leq T$, est de rang M , il est identique à E_s . L'observation non bruitée permet alors d'identifier globalement l'espace source.

3) IDENTIFICATION DES FREQUENCES A PARTIR DE L'ESPACE SOURCE

Les méthodes qui vont être présentées sont fondées sur l'utilisation d'un vecteur \underline{A} orthogonal à l'espace source E_s . Un tel vecteur vérifie alors, pour tout m entre 1 et M :

$$S_m^+ \underline{A} = 0 \quad 1 \leq m \leq M \quad (4)$$

L'ensemble des vecteurs \underline{A} satisfaisant (4) constitue l'espace orthogonal ou l'espace bruit E_b .

La relation (4) exprime simplement que $Z_m = e^{jw_m}$ est racine du polynôme $A(Z)$ associé à $\underline{A} = [a_0, a_1, \dots, a_{L-1}]^T$

$$\begin{aligned} A(Z) &= \sum_{p=0}^{L-1} a_p Z^{-p} = Z^+ \underline{A} \\ Z &= [1, Z, \dots, Z^{L-1}]^T \end{aligned} \quad (5)$$

L'identification des fréquences caractéristiques de chaque vecteur source sera donc obtenue en cherchant

les zéros du polynôme $A(Z)$. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus la qualité des résultats obtenus dépend à la fois de la méthode d'estimation de l'espace source (calcul de la matrice de covariance) et du critère utilisé pour choisir \underline{A} dans E_b .

4) ESTIMATION DE LA MATRICE DE COVARIANCE

Traditionnellement, on distingue les méthodes dites

de la covariance de celles de la corrélation. La méthode de la corrélation conduit à des algorithmes plus simples du fait de la structure de Toeplitz de la matrice estimée, alors qu'elle engendre un biais sur l'identification de l'espace source. Par la suite nous allons considérer les méthodes de la covariance directe, directe-inverse et de l'autocorrélation.

Enfin, nous présentons une nouvelle méthode de calcul de cette matrice sous forme Toeplitz.

a) Méthode de la covariance directe:

La matrice de covariance du signal non bruité est définie par:

$$R_y = \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T Y_k(t) Y_k^+(t) \quad (6)$$

En présence d'un bruit additif, on peut introduire la matrice de covariance de l'observation:

$$\hat{R}_x = \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T X_k(t) X_k^+(t) \quad (7)$$

Asymptotiquement, pour KT tendant vers l'infini R_x tend vers son espérance. Sous l'hypothèse d'un bruit blanc de variance σ^2 .

$$R_x \triangleq E[\hat{R}_x] = R_y + \sigma^2 I \quad (8)$$

Cette méthode conduit asymptotiquement à une estimation non biaisée de l'espace source. En effet la matrice R_y peut s'exprimer selon:

$$R_y = S P_K S^+ \quad (9)$$

où S est la matrice ayant comme colonnes les vecteurs S_m et où P_K est la matrice de covariance des amplitudes des sources:

$$[P_K]_{mm'} = [P_{mm}] \frac{\sin K(w_m - w_{m'})}{K \sin(w_m - w_{m'})} \quad (10)$$

$$[P]_{mm'} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_m(t) g_{m'}^*(t)$$

La forme (9) garantit que l'espace ligne ou l'espace colonne est bien l'espace signal E_s , si P_K est régulière.

Il est à noter que l'espace propre de R_y se décompose en deux sous-espace orthogonaux de la manière suivante: un espace signal E_s engendré par les vecteurs propres correspondant aux M valeurs propres non nulles, et un espace bruit E_b engendré par les autres vecteurs propres associés aux valeurs propres nulles. La condition d'identifiabilité des sources ou ce qui est équivalent d'avoir P_K régulière, est donné par:

$$K \geq M \quad M < L \leq N - M \quad (11)$$

Un aspect lié à la forme de la matrice P_K est que pour une valeur donnée des éléments diagonaux, qui représentent la puissance des sources, les meilleurs résultats d'estimation sont obtenus si les éléments non diagonaux, traduisant les intercorrélations entre sources, sont nuls [3, 9].

On peut remarquer que dans (10), l'effet du moyennage spatial (sur k) sera de rapprocher P_K d'une forme diagonale. Ce point joue un rôle important dans la discussion de l'optimalité [10].

b) Méthode de la covariance directe- inverse :

Il est bien connu que l'utilisation de la méthode de la covariance directe-inverse conduit à une amélioration de l'estimation, en particulier dans le cas de deux sources proches corrélées.

La matrice de covariance directe-inverse est calculée par:

$$\hat{R}'_x = \frac{1}{2KT} \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T [x_k(t) x_k^+(t) + \tilde{x}_k(t) \tilde{x}_k^+(t)] \quad (12)$$

où $\tilde{x}_k(t)$ est le vecteur "inverse" correspondant à $x_k(t)$. Il est obtenu par renversement de l'ordre des composantes et conjugaison.

La matrice directe-inverse R'_y pour le signal non bruité peut s'exprimer sous une forme analogue à (9), soit:

$$R'_y = S P'_K S^+ \quad (13)$$

Ce qui conduit à une estimation non biaisée de l'espace source; La matrice P'_K est définie par:

$$[P'_K]_{mm'} = |[P_K]_{mm'}| \cdot \cos(\alpha_{mm'}) \quad (14)$$

où $\alpha_{mm'}$ s'interprète comme le déphasage entre les sources m et m' . Ceci conduit donc bien à une diminution des termes non diagonaux de la matrice P'_K , les termes diagonaux restant identiques à ceux de P_K . Ainsi on peut s'attendre à des résultats meilleurs que ceux obtenus par la matrice directe.

Cette fois ci, la condition analogue à (11) devient:

$$M < L \leq N - \frac{M}{2} \quad (15)$$

c) Méthode de l'autocorrelation:

Cette méthode suppose que le nombre d'échantillons est infini en complétant les observations par des zéros. Ainsi, la matrice de covariance est définie

par:

$$\hat{R}^{cor}_x = \frac{1}{KT} \sum_{t=1}^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k(t) x_k^+(t) \quad (16)$$

Cette méthode paraît inacceptable dans la mesure où elle introduit un biais important dans l'estimation de l'espace source, même en l'absence de bruit.

On vérifie que \hat{R}^{cor}_x est une matrice de Toeplitz, ce qui peut conduire à des simplifications au niveau algorithmique dans certaines méthodes d'estimation.

d) Matrice de covariance de Toeplitz non biaisée pour l'estimation de l'espace source:

Etant données les propriétés intéressantes des matrices de Toeplitz (réduction de la complexité mathématique) il semble intéressant de chercher une méthode d'estimation de la matrice de covariance ayant la structure de Toeplitz et engendrant sans erreur l'espace source, ce qui n'était pas le cas des matrices discutées au paragraphe précédent.

Cette matrice est définie à partir de la séquence de covariance:

$$\hat{r}_i = \frac{1}{2KT} \sum_{t=1}^T \sum_{m=L}^K [x_m^*(t) x_{m+i}(t) + x_m(t) x_{m-i}^*(t)] \quad (17)$$

$$K=N-L+1 \quad K=N-2L+1 \quad i=0, L-1$$

$$R_{xt} = \text{Toeplitz}(r_i)$$

En l'absence de bruit on retrouve [9] la forme:

$$R_{yt} = S P_t S^+ \quad (17)$$

avec P_t diagonale.

La forme (18) assure qu'avec cette méthode l'estimation de l'espace source E_s peut être effectuée sans erreur.

On peut montrer qu'elle est définie non positive.

En l'absence de bruit ou dans le cas d'un rapport signal sur bruit, la génération de l'espace source s'effectue sans problème particulier quelque soit le signe des valeurs propres.

Avec cette méthode, la condition d'identifiabilité s'écrit :

$$M < L \leq \frac{N+1}{2} \quad (18)$$

Ce qui limite considérablement le domaine de variation de L par rapport aux méthodes précédentes.

4) METHODES D'IDENTIFICATIONS DE BASE:

On ne s'intéresse qu'aux méthodes non biaisées: méthode du vecteur orthogonal et méthode du projecteur orthogonal.

a) Méthode du vecteur orthogonal:

Comme généralisation de la méthode du Tufts-Kumaresan, on donne un vecteur \underline{E} de longueur L , et on choisit le vecteur \underline{A} de l'espace bruit comme solution du problème de minimisation sous contraintes:

$$\begin{aligned} \underline{A}^+ \underline{A} &= \text{minimum} \\ \underline{A} \underline{E} &\in E_b \\ \underline{A}^+ \underline{E} &= \text{constante} \end{aligned}$$

On obtient la solution

$$\underline{A}_{vo} = \Pi_b \underline{E}$$

où Π_b est le projecteur orthogonal sur E_b .

Pour $\underline{E} = [1, 0, \dots, 0]$, on obtient la méthode de Tufts-Kumaresan. La contrainte de norme minimale a pour effet de rejeter les $L-M-1$ zéros bruit (excédentaires) vers l'intérieur du cercle unité [4] ce qui facilite leur séparation des M zéros signal.

Comme variante de cette méthode il a été proposé [5] dans le vecteur \underline{E} d'utiliser un élément non nul décalé de i positions.

$\underline{E} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots]$. Le calcul montre que les performances se dégradent si la seule composante non nulle n'est pas à une extrémité [9].

b) Méthode du projecteur orthogonal:

Dans cette méthode, au lieu de choisir un vecteur orthogonal \underline{A} particulier, on considère l'ensemble des vecteurs d'une base orthonormée de l'espace bruit [6]. Ainsi la méthode consiste à rechercher les minima de la fonction.

$$f(w) = \underline{S}^+ \Pi_b \underline{S}$$

Une meilleure résolution est obtenue en associant à cette fonction un polynôme $F(Z)$ en Z . Avec cette variante les zéros apparaissent par paires du module inverse l'un de l'autre, les zéros parasites sont rejetés loin du cercle unité.



c) Performances:

Il paraît souhaitable de fixer les paramètres libres de manière à se rapprocher des performances optimales. Ces paramètres sont la méthode de calcul de la matrice de covariance et sa dimension L , et la méthode de calcul des fréquences. Concernant l'optimalité, on peut montrer que 9, 10, pour T suffisamment grand et en présence des sources décorrelées, la méthode du projecteur orthogonal donne les meilleurs résultats pour $L=N$ (sans moyennage spatial, et atteint les bornes de Cramer-Rao à fort rapport signal sur bruit. La matrice de corrélation doit être calculée par la méthode de la covariance directe inverse. La méthode de Tufts-Kumaresan donne dans ces conditions une variance supérieure d'un facteur $\frac{N+1}{6}$. La variance associée à $\underline{E}=[0, \dots, 1, \dots, 0]^T$ dont la i ème composante est non nulle, voit sa variance se dégrader d'un facteur $\frac{N+1}{6} \cdot \frac{(N-1)}{N-1-2i}$; la variance serait maximale pour $i = \frac{N-1}{2}$, choix proposé par Cadzow 5 pour améliorer la résolution dans le cas de la méthode de l'autocorrélation. En présence de sources corrélées et toujours pour $L=N$, l'estimation se dégrade. En présence de deux sources, la variance est augmentée d'un facteur

$$\cos^2 \beta = \frac{1 - \rho^2 \cos^2 \alpha}{1 - \rho^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{P_m}{35 \pi^2 N^2} \quad (22)$$

avec:

- P puissance associée à la source m .
- ρ et α représentant respectivement le coefficient de corrélation et déphasage entre les deux sources.

L'utilisation d'une valeur de L inférieur à N permet de retrouver de meilleurs résultats. Pour L/N de l'ordre de 1/2 la méthode du vecteur orthogonal donne de meilleurs résultats que celle du projecteur orthogonal les sources étant corrélées ou non, la figure 1 illustre ce résultat dans le cas d'une source.

5) CONCLUSION:

Nous avons discuté les principales méthodes d'estimation de la matrice de covariance. A ce propos, une nouvelle méthode de calcul de cette matrice sous forme Toeplitz non biaisée pour l'estimation de l'espace source, qui a été introduite.

Enfin les performances des principales méthodes de localisation à haute résolution ont été discutées. Nous avons montré qu'en l'absence du moyennage spatial (glissant) et dans le cas des sources décorrelées, c'est la méthode du projecteur orthogonal qui est quasi-optimale. Par contre, en présence du moyennage spatial ($L < N$), c'est la méthode de Tufts-Kumaresan direct-inverse qui devient quasi-optimale.

Références:

- (1) R.Schmidt: "Multiple emitter location and signal parameter estimation" Proceed. of RADC Spectral Estimation Workshop, Rome (N.Y) 1979.
- (2) G.Bienvenu, L.Kopp: "Principe de la goniométrie passive adaptative" Colloque GRETSI 1979.
- (3) M.Bouvet, H.Clergeot, A.OUAMRI: "Comparaison de méthodes à hautes résolution pour la detection de raies", Soumis aux annales des Telecom, Janvier 1987.
- (4) D.W.Tufts, R.Kumaresan: "Frequency estimation of multiple sinusoids: making linear prediction perform like maximum likelihood", Proc. IEEE, Vol. 70, Sep. 1982.
- (5) J.A. Cadzow, B; Baseghi: "Singular Value Decomposition approach to times series modeling", IEE Proc. Vol 30, N°3, 1983.
- (6) G.Bienvenu, L.Kopp: "Optimality of high resolution array processing using the eigen structure approach" IEEE ASSP, Vol 31, 1983.
- (7) J.J. Shan, T.Kailath: "New adaptive Processor for coherent signal interference", ICASSP, 1984.
- (8) H.Clergeot, A.OUAMRI, S.Tressens: "High resolution spectral methods for spatial discrimination of closely spaced correlated sources", ICASSP, 1985.
- (9) A.OUAMRI: "Etude des performances des méthodes d'identification à haute résolution et application à l'identification des échos par une antenne lineaire multicapteurs", Thèse d'état, ORSAY, 1986.
- (10) H.Clergeot, A.OUAMRI, S.Tressens: "Performance of high resolution frequencies estimation methods compared to the Cramer-Rao bounds", soumis aux IEEE, ASSP, 1986.

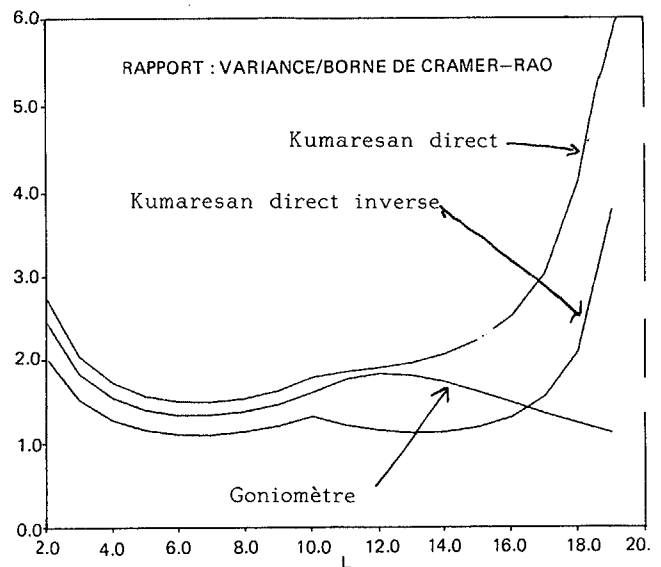


Figure 1 : Une source
N=20