ESTIMATION DU NOMBRE DE SINUSOÏDES DANS DU BRUIT COLORÉ

J.J. FUCHS

IRISA - UNIVERSITE DE RENNES I et GRECO SARTA - Campus de Beaulieu, 35042 RENNES CEDEX

RÉSUMÉ

On considère un signal scalaire constitué de la somme de L sinusoïdes réelles et d'un bruit modélisable par une moyenne glissante d'ordre M. Les méthodes à haute résolution pour estimer les fréquences des sinusoïdes donnent alors des résultats biaisés à moins d'identifier au préalable les covariances du bruit coloré afin de pouvoir se ramener au cas de bruit blanc. Dans une première étape il peut alors être intéressant d'estimer le nombre de sinusoïdes L présentes dans le signal. En utilisant des résultats de perturbation de matrice, nous développons un test basé sur les éléments propres d'une matrice de Hankel construite sur les covariances estimées du processus.

SUMMARY

Let us consider a signal composed of the sum of L real sinusoïds and noise generated by an M-th order moving average process. High resolution techniques, such as the Pisarenko harmonic retrieval method, will give biased estimates of the frequencies when applied to such signals. One way to achieve unbiasedness is then to identify the model of the background noise. As a firt step it might then be of interest to estimate the number of sinusoïds present in the signal We propose a test allowing to obtain such an estimate.

INTRODUCTION

Les tests proposés pour estimer le nombre de sinusoïdes présentes dans un signal scalaire perturbé par du bruit supposent en général que ce bruit est blanc [4]. La situation est identique en écoute passive en acoustique sous-marine. Les tests permettant de détecter le nombre de sources reçues par un réseau de capteurs supposent en général que la matrice de densité spectrale du bruit de fond est connue ou proportionnelle à la matrice identité [1,2]. Dans ce contexte, une première manière de s'affranchir de ce type d'hypothèse consiste à modéliser explicitement le bruit de fond à l'aide d'un petit nombre de paramètres et à estimer simultanément ces paramètres et le nombre de sources [1] ou la localisation des sources [3]. Une autre manière consiste à partitionner l'antenne en sous-antennes, à former des voies avec chacunes de ces sous-antennes et à suposer que dans chacun des secteurs ainsi isolés, le bruit de fond est isotrope [1]. Dans cette étude nous considérons une situation analogue sur un signal temporel. Nous proposons un test permettant d'estimer le nombre de sinusoïdes présentes dans un signal perturbé par un bruit coloré admettant un modèle à moyenne glissante. Le test que nous proposons est transposable au traitement d'antenne dans le cas d'un bruit de fond spatialement corrélé sur un petit nombre de capteurs voisins.

MODÉLISATION DU PROBLÈME

Soit un processus y_n constitué de la somme de L sinusoïdes réelles et d'une perturbation additive admettant pour modèle une moyenne glissante d'ordre M (noté MA(M)) :

$$\begin{aligned} y_n &= s_n + v_n \\ v_n &= e_n + c_1 e_{n-1} + \dots + c_M e_{n-M} \\ &= C(q^{-1})\, e_n \\ s_n &= \sum_1^L A_k \sin(\omega_k n + \theta_k) \end{aligned} \tag{1}$$

où e_n est un bruit blanc de variance σ_e^2. On peut alors écrire

$$A(q^{-1})\, s_n = 0$$
$$\underline{a}^T = [1\, a_1 \dots a_{2L}] \quad ; \qquad a_k = a_{2L-k} \tag{2}$$

où $A(q^{-1})$ est un polynôme dont les coefficients a_i, regroupés dans le vecteur $\underline{a}$ sont symétriques. Il existe alors plusieurs manières de percevoir l'effet du bruit coloré. Une première consiste à noter que y_n satisfait $A(q^{-1})\, y_n = A(q^{-1})\, C(q^{-1})\, e_n$ et peut donc être vu comme un processus ARMA (2L, 2L + M). On sait alors que pour identifier la partie AR (autorégressive) uniquement, il suffit de résoudre les équations normales (de Yule-Walker) suffisamment décalées. Ce même point de vue nous indique que l'ordre 2L de la partie AR -la quantité que nous voulons estimer- est égal au rang des matrices de Hankel construites sur la suite des covariances r_k de y_n à condition de ne pas utiliser les M+1 premiers termes de cette suite, contaminés par la présence de v_n. En effet, en notant ρ_k la suite des covariances du processus MA(M) v_n on a

$$\rho_k = E(v_n\, v_{n+k})$$
$$\rho_k = 0 \qquad \forall\, |k| > M \tag{3}$$

et $$r_k = \rho_k + \frac{1}{2} \sum_j A_j^2 \cos(\omega_j k) \quad .$$

Mais une autre manière, peut être plus directe, de retrouver ces résultats consiste à s'intéresser aux matrices de covariance de ces processus. Notons R_y (respectivement R_v, R_s) la matrice de covariance de y_n (resp. v_n, s_n) d'ordre $N \gg 2L + M$. R_v est alors une matrice définie positive bande. R_s est une matrice semi-définie positive de rang 2L et R_y :

$$R_y = R_s + R_v \tag{4}$$

est une matrice définie positive de rang plein dont les éléments propres (valeurs et vecteurs propres) sont sans relation évidente avec ceux de R_s. Néanmoins vue la forme bande de R_v, pour des ordres N suffisamment grand il est possible d'extraire -par exemple- du "coin inférieur gauche" de R_y des matrices (non contaminées par R_v) qui partage la propriété de rang (fini) de R_s.

C'est cette seconde approche -certainement plus naturelle dans un contexte de traitement d'antenne où la donnée de base est la matrice de densité spectrale estimée- que nous conservons dans la suite. Nous allons donc développer une procédure, permettant d'estimer le nombre L de sinusoïdes présentes dans y_n, basée sur la détermination du rang de matrices carrées extraites du "coin inférieur gauche" de R_y. Les matrices symétriques étant réputées être moins sensibles à l'effet des perturbations, nous permutons l'ordre des colonnes de ces matrices extraites ce qui va transformer leur structure Toeplitz non-symétrique en Hankel symétrique. Nous noterons N l'ordre de la matrice (toeplitz symétrique) R_y, P l'ordre de la matrice extraite et H_p la matrice de Hankel qui en résulte :

$$H_p = \begin{bmatrix} r_{N-2P+1} & & r_{N-P} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & r_{N-2} \\ r_{N-P} & r_{N-2} & r_{N-1} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Des observations précédentes, ils découlent donc que si

$$N-2P+1 > M \qquad\qquad (6)$$
$$\mathrm{rg}\, H_p = \min(P,\ 2L)$$

l'inégalité garantissant qu'aucune des composantes de H_p n'est contaminée par le bruit. Dans la suite nous supposerons cette inégalité systématiquement vérifiée.

On peut alors envisager essentiellement deux stratégies pour déterminer L. Une première consiste à extraire de R_y des matrices $H_{\hat{P}}$ (5) d'ordre croissant $\hat{P} = 1, 3, 5, \ldots$ et à s'arrêter pour $\hat{P} = p$ avec H_p la première matrice singulière dans la suite, pour en déduire $L = (p-1)/2$. Une seconde consiste à extraire une matrice $H_{\hat{P}}$ unique avec $\hat{P}$ suffisamment grand (> 2L) et à en évaluer le nombre de valeurs propres nulles pour en déduire L.

Dans la pratique, les covariances exactes étant inconnues, ces stratégies seront appliquées aux matrices $\hat{H}_.$ définies de manière analogue à $H_.$ (5) avec les covariances empiriques remplaçant les covariances exactes. La propriété de rang (6) n'est alors vérifiée qu'asymptotiquement en T, le nombre de données utilisées pour estimer les covariances. Asymptotiquement tous les estimateurs de covariances possèdent les mêmes propriétés, au premier ordre. Principalement pour fixer les idées et les notations nous proposons d'utiliser l'estimateur suivant pour la matrice de covariance d'ordre N

$$\hat{R}_y = \frac{1}{T-N+1} \sum_n \phi_y(n)\, \phi_y(n)^T \qquad (7)$$
$$\phi_y(n-1)^T = [y_{n-1}\ y_{n-2}\ \cdots\ y_{n-N}]$$

la matrice $\hat{H}_p$ extraite d'ordre P vérifie alors

$$\hat{H}_p = \frac{1}{T-N+1} \sum_n \phi_y^2(n)\, \phi_y^1(n)^T\, J$$

$$\phi_y^1(n-1)^T = [y_{n-1}\ y_{n-2}\ \cdots\ y_{n-P}] \qquad (8)$$

$$\phi_y^2(n-1)^T = [y_{n-N+P-1}\ \cdots\ y_{n-N+1}\ y_{n-N}]$$

avec J la matrice carrée d'ordre P, dont l'élément i,j est égal à $\delta_{i,P+1-j}$ (qui permute les colonnes). On peut noter que la matrice $\hat{H}_p$ (8) ainsi estimée n'est pas symétrique contrairement à la matrice que l'on obtiendrait en remplaçant dans (5) les covariances r_k par leurs estimées

$$\hat{r}_k = \frac{1}{T-k} \sum_{k+1}^{T} y_n\, y_{n-k} \qquad k > M \qquad (9)$$

et qui serait symétrique par construction. Mais ce type de différence n'est pas perceptible dans la théorie qui suit. Dans les deux cas, on considérera $\hat{H}_.$ comme la somme d'une matrice $H_.$ (5) exact, symétrique (de rang fini) et d'une matrice $\delta H_.$ aléatoire perturbante, "petite" que nous n'aurons pas vraiment à expliciter

$$\hat{H}_p = H_p + \delta H_p \qquad (10)$$

PERTURBATION DE MATRICE

Notre but est de déterminer le rang de H_p en observant $\hat{H}_p$. Nous allons donc étudier les propriétés des valeurs propres de $\hat{H}_p$ afin d'en déduire un test permettant d'estimer le nombre d'entre elles qui sont "nulles". Pour P > 2L, nous introduisons les notations suivantes pour la décomposition en éléments propres de H_p, une matrice symétrique et donc diagonalisable par une matrice orthogonale :

$$H_p = U D U^T = U_1 D_1 U_1^T$$
$$U = [u_1\ u_2\ \ldots\ u_p] = [U_1\ U_2]$$
$$D = \mathrm{diag}(D_1, D_2) \quad ; \qquad D_2 = 0_{P-2L} \qquad (11)$$
$$D_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2L})$$

avec $\qquad |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_{2L}| > 0$.

On imagine que pour δH_p (10) petit, les éléments propres de $\hat{H}_p$, notés $\hat{U}$, $\hat{D}$, $\hat{\lambda}_i$ ..., soient proches de ceux de H_p. Les résultas (déterministes) de perturbation de matrice permettent de préciser cette notion.

Avant de présenter ces résultats, regardons de plus près δH_p pour en évaluer l'ordre de grandeur. Comme $\hat{r}_k$ (9) est une estimée convergente et asymptotiquement normale de r_k, on peut écrire

$$\hat{r}_k = r_k + \delta r_k$$

où δr_k est pour T grand une réalisation d'une variable aléatoire gaussienne, centrée dont la variance est d'ordre 1/T. Les composantes de δH_p sont toutes de la forme δr_k, il en découle que δH_p est une observation d'une matrice aléatoire dont les composantes sont des variables aléatoires gaussiennes centrées (non indépendantes entre elles) et de variance en 1/T. Le terme dominant de δH_p est donc d'ordre $T^{-1/2}$, noté :

$$\delta H_p = O(T^{-1/2}) \quad .$$

On peut alors établir les résultats suivants entre les valeurs propres des matrices $\hat{H}_p$ et H_p, liés par la relation (10).

Proposition : Pour T suffisamment grand, les valeurs propres simples et isolées vérifient

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_i + u_i^T\, \delta H_p\, u_i + O(T^{-1}) \qquad (12)$$

et la valeur propre nulle de multiplicité P-2L de H_p est perturbée en P-2L valeurs propres égales au premier ordre aux valeurs propres de la matrice

$$\Omega = U_2^T\, \delta H_p\, U_2 \qquad (13)$$

avec U_2 (11) une base orthogonale (quelconque) du noyau de H_p ▲

Cette proposition indique notamment que les différences entre valeurs propres correspondantes sont d'ordre $T^{-1/2}$, même dans le cas des valeurs propres multiples. Ce sont des résultats déterministes valident pour un triplet ($\hat{H}_p$, H_p, δH_p) fixé qui quand on considère δH_p et donc $\hat{H}_p$ comme des matrices aléatoires nous renseignent sur la loi des valeurs propres perturbées. Nous allons exploiter cet aspect dans la suite. De la relation (12) on déduit ainsi que pour λ_i une valeur propre, simple et isolée (la distance à la valeur propre la plus proche est d'un ordre de grandeur supérieur à $T^{-1/2}$), la perturbée $\hat{\lambda}_i$ est une variable aléatoire gaussienne centrée en λ_i et de variance en 1/T. Pour λ_i différent de zéro ce résultat est guère exploitable puisque d'une part λ_i, la valeur de la moyenne est inconnue et d'autre part le calcul de la variance nécessite notamment la connaissance de $\delta \mathbf{H}_P$. Pour une valeur propre nulle simple la situation est plus favorable puisque la moyenne est connue et dans le calcul de la variance on peut remplacer δH_P par $\hat{H}_P$. La situation se complique cependant pour une valeur propre nulle multiple. Les perturbées sont, au premier ordre, les valeurs propres d'une matrice aléatoire (13) que l'on peut réécrire :

$$\Omega = U_2^T \hat{H}_P U_2 \tag{14}$$

puisque $H_P U_2 = \underline{0}$. Et il est bien sûr impossible d'obtenir la loi des valeurs propres d'une matrice aléatoire si son ordre dépasse l'unité. Rien ne semble même indiquer que les valeurs propres perturbées soient de moyenne nulle.

Dans la suite nous allons néanmoins préciser ces deux derniers cas, valeur propre nulle simple et multiple, qui correspondent aux deux types de stratégies possibles pour déterminer L. Rappelons que ces résultats ne devront être utilisés que pour T grand, afin de garantir d'une part que les termes d'ordres supérieurs sont bien négligeables devant celui du premier d'ordre et d'autre part que la valeur propre nulle simple ou multiple est bien isolée de la valeur propre non nulle la plus petite λ_{2L}.

PROPRIÉTÉS STATISTIQUES

VALEUR PROPRE NULLE SIMPLE

L'ordre P de la matrice estimée (extraite) $\hat{H}_P$ est donc égal à 2L+1 et nous notons $\hat{\lambda}_{min}$ la valeur propre de plus petite valeur absolue, la perturbée de la valeur propre nulle unique de la matrice exacte correspondante H_{2L+1}. On vérifie que cette dernière admet comme vecteur propre "nul" unique le vecteur $\underline{a}$ (2) des coefficients du polynôme $A(q^{-1})$. De la proposition qui précède on déduit alors :

$$\hat{\lambda}_{min} \cong \bar{\underline{a}}^T \hat{H}_{2L+1} \bar{\underline{a}} \qquad \bar{\underline{a}} = \underline{a}/||\underline{a}|| \quad . \tag{15}$$

Si l'on remplace maintenant $\hat{H}_{2L+1}$ par son expression (8) on obtient

$$\hat{\lambda}_{min} \cong \frac{1}{T-N+1} \sum u_n w_n$$

avec

$$u_n = \bar{\underline{a}}^T \phi_y^2(n) \tag{16}$$

$$w_n = \phi_y^1(n)^T J \bar{\underline{a}} \quad .$$

Comme par ailleurs $J \underline{a} = \underline{a}$ et $A(q^{-1}) s_n = 0$ on a successivement

$$w_n = \phi_y^1(n)^T \bar{\underline{a}} = \frac{1}{||\underline{a}||} A(q^{-1}) y_n$$

$$= \frac{1}{||\underline{a}||} A(q^{-1}) v_n = \frac{1}{||\underline{a}||} A(q^{-1}) C(q^{-1}) e_n \tag{17}$$

et $\quad u_n = w_{n-N+2L+1}$

en posant alors :

$$\gamma_w(i) = E(w_n w_{n-i}) \tag{18}$$

la valeur propre nulle perturbée $\hat{\lambda}_{min}$ (16) apparaît comme une estimée de $\gamma_w(N-2L-1)$ avec w_n un processus (17) MA d'ordre 2L+M. Comme N-2L-1 > 2L+M (à comparer à l'inégalité (6)) cette estimée est de moyenne nulle. Elle est également asymptotiquement normale et on vérifie que sa variance est donnée par

$$E(\hat{\lambda}^2_{min}) \cong \frac{1}{T} \left\{ \sum_{-(M+2L)}^{M+2L} \gamma_w(i)^2 \right\} \tag{19}$$

Pour évaluer $\gamma_w(i)$ (18) on pourrait utiliser la définition de w_n (17), mais il est, dans notre cas, plus simple de noter que

$$w_n = \phi_y^1(n)^T \bar{\underline{a}}$$

d'où il vient directement que

$$\gamma_w(i) = \bar{\underline{a}}^T \mathbf{M_P}(i) \bar{\underline{a}} \tag{20}$$

avec $\quad M_P(i) = E(\phi_y^1(n) \, \phi_y^1(n+i)^T) \qquad i = 0,1,\ldots$

une matrice d'ordre P = 2L+1 extraite de $\mathbf{R}_y$. $M_P(o)$ est ainsi égale à la matrice de covariance de y_n d'ordre 2L+1. Cette manière d'évaluer $\gamma_w(i)$ évite l'estimation des coefficients du polynôme $C(q^{-1})$ (1,17).

Nous avons donc complètement défini la loi de $\hat{\lambda}_{min}$, la valeur propre minimale de $\hat{H}_{2L+1}$. Le test de Chi-deux que nous proposons d'utiliser plus loin consiste alors à former la quantité

$$\mu = \frac{\hat{\lambda}^2_{min}}{E(\hat{\lambda}^2_{min})} \tag{21}$$

qui est une variable aléatoire de Chi-deux à un degré de liberté si $\hat{\lambda}_{min}$ est effectivement une valeur propre nulle simple perturbée, et à comparer μ à un seuil t fixé de manière à réaliser une certaine probabilité de fausse alarme (déclarer de manière erronée $\hat{\lambda}_{min}$ non nulle). Pour pouvoir déduire de ces résultats un test utilisable dans la pratique il reste à préciser une façon d'obtenir une estimée -notée $\hat{\sigma}^2_{min}$- de la variance (19). On peut vérifier qu'en remplaçant dans les expressions (19,20) les quantités exactes par leurs estimées l'erreur introduite est cohérente / négligeable devant les ordres de grandeur retenus.

Une première manière d'obtenir une estimée de L est alors la suivante :

- extraire de $\hat{R}_y$ une suite de matrices $\hat{H}_{\hat{P}}$ (5) d'ordre impair croissant $\hat{P}$ = 1,3,5,...

- calculer pour chacune de ces matrices $\hat{\lambda}_{min}$, la valeur propre minimale (en valeur absolue) et $\hat{u}_{min}$, le vecteur propre normé associé.

- calculer la variance -notée $\hat{\sigma}^2_{min}$- de $\hat{\lambda}_{min}$ (sous l'hypothèse que $\hat{\lambda}_{min}$ est effectivement une valeur propre nulle perturbée) en remplaçant dans (20) $\bar{\underline{a}}$ par $\hat{u}_{min}$, les matrices M_i par les matrices $\hat{M}_i$ extraite de $\hat{R}_y$ et dans (19) la borne de la sommation M+2L par $\mathbf{N}$-$\hat{P}$

- former la quantité

$$\mu = \hat{\lambda}^2_{min} \; / \; \hat{\sigma}^2_{min} \tag{22}$$

et la comparer au seuil t ; si μ > t recommencer avec l'ordre $\hat{P}$ suivant sinon prendre pour estimée de L la quantité $(\hat{P}-1)/2$.

VALEUR PROPRE NULLE MULTIPLE

Quand l'ordre P de la matrice extraite $\hat{H}_P$ est grand (> 2L), elle possède Q = P-2L valeurs propres nulles perturbées qui -au premier ordre- sont égales aux valeurs propres de la matrice (14)

$$\Omega = U_2^T \hat{H}_P U_2$$

où U_2 est une base orthogonale quelconque du noyau de la matrice exacte H_P (11). On vérifie aisément que ces valeurs propres ne dépendent pas de la base U_2 choisit mais principalement de la matrice de perturbation $\delta \mathbf{H}_P$ (10,13). On peut alors s'assurer que U_2 de dimension (P,Q) admet la décomposition

$$U_2 = A\,B$$

avec

$$A^T = \begin{bmatrix} a^T & & 0 \\ & a^T & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a^T \end{bmatrix} \qquad (23)$$

où a est le vecteur de dimension (2L+1) défini en (2) et B est une matrice inversible d'ordre Q = P-2L. En remplaçant alors U_2 par AB dans (14), on voit apparaître une matrice $A^T \hat{H}_P A$ qui est à rapprocher de (15). Et par un raisonnement analogue à celui faisant passer de (15) à (18) on obtient :

$$A^T \hat{H}_P A = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_w(N-P-Q+1) & \dots & \hat{\gamma}_w(N-P) \\ \dots & & \dots \\ \hat{\gamma}_w(N-P) & \dots & \hat{\gamma}_w(N-P+Q-1) \end{bmatrix} \qquad (24)$$

une matrice de Hankel d'ordre Q = 2P-L construite sur les covariances empiriques du processus MA(M+2L) w_n (17). Si l'inégalité (6) est satisfaite cette matrice est d'espérance nulle et ces composantes sont asymptotiquement normales et corrélées entre elles. Mais il faut surtout noter que cela signifie que cette matrice symétrique d'ordre Q ne dépend que de 2Q-1 paramètres. Il en est alors de même pour les composantes ω_{ij} de Ω (14) qui sont combinaisons linéaires de ces mêmes (2Q-1) covariances empiriques du processus w_n : $\{\gamma_w(j),\ j = N-P-Q+1 \text{ à } N-P+Q-1\}$.

Pour tester Ω il sera suffisant de tester un vecteur de dimension 2Q-1 construit à l'aide de (2Q-1) composantes "indépendantes" de Ω. Dans la suite nous noterons V_{2Q-1} ce vecteur pour lequel un grand choix est possible. On peut notamment prendre le vecteur V. construit à l'aide de la première ligne et de la diagonale de Ω, ou à l'aide de la diagonale et de la surdiagonale. Cette liberté de choix semble notamment pouvoir être utilisée pour augmenter le "pouvoir discriminant" du test.

Afin de préciser la loi de ce vecteur V., notons que ω_{ij}, composantes de Ω, s'écrit

$$\omega_{ij} = u_i^T \hat{H}_P u_j$$

où nous désignons par u_k le k^e vecteur colonne de U_2. Les observations qui précédent, indiquent que ω_{ij} est une covariance empirique (cf. (16)) entre deux processus MA d'ordre 2L+M+Q-1 = P+M-1 dont l'espérance est nulle. Asymptotiquement en T, le nombre d'observations, toutes ces composantes sont gaussiennes, centrées, de variance en 1/T. Le vecteur V. est donc lui même un vecteur gaussien, centré donc nous noterons Σ. la matrice de covariance :

$$\Sigma_{2Q-1} = E(V_{2Q-1}\, V_{2Q-1}^T) \quad . \qquad (25)$$

Tous les processus qui interviennent, étant des processus MA, un élément quelconque de la matrice Σ. peut s'obtenir comme une somme d'un nombre fini de termes. Un calcul simple mais fastidieux donne le résultat suivant

$$E(\omega_{ij}\, \omega_{k\ell}) = \frac{1}{T} \{\gamma_{ki}(o)\, \gamma_{j\ell}(o) + \sum_{s=1}^{P+M-1} (\gamma_{ki}(s)\, \gamma_{j\ell}(s) + \gamma_{ik}(s)\, \gamma_{\ell j}(s))\} \qquad (26)$$

avec

$$\gamma_{ij}(s) = u_i^T M_P(s)\, u_j$$

avec $M_P(s)$ une matrice Toeplitz d'ordre P extraite de R_y, définie en (20).

Ayant ainsi définie la loi de V., on sait que

$$\mu_{2Q-1} = V_{2Q-1}^T\, \Sigma_{2Q-1}^{-1}\, V_{2Q-1} \qquad (27)$$

est une variable du Chi-deux à 2Q-1 degrés de liberté. Il reste à préciser comment construire en pratique Ω, V., Σ. . Il est alors important de vérifier que si ces quantités (Ω, V., Σ.) dépendent du choix de la base U_2, il n'en est pas de même pour μ. (27). On peut donc remplacer la base arbitraire, quelconque U_2 par la base qui dépend de la réalisation, des données, $\hat{U}_2$ dont on peut montrer [4] qu'elle est suffisamment proche d'une base exacte pour que l'erreur ainsi introduite dans l'évaluation de μ. soit négligeable. En notant alors $\hat{\Omega}$, $\hat{V}$. , $\hat{\Sigma}$. et $\hat{\mu}$. les quantités qui découlent de cette approximation, on observe notamment que $\hat{\Omega} = \hat{U}_2^T \hat{H}_P \hat{U}_2$ est égale à la matrice $\hat{D}_2$ (11) des valeurs propres estimées. Le vecteur $\hat{V}_{2Q-1}$ (25) qui doit être représentatif des 2Q-1 paramètres indépendants de $A^T \hat{H}_P A$ (24) contient alors les Q plus petites valeurs propres de $\hat{H}_P$ et Q-1 composantes nulles. Une estimée cohérente $\hat{\mu}$. de μ. (27) s'obtient alors comme précédemment en remplacant dans (26,27) les quantités exactes par leurs estimées.

Une seconde manière d'obtenir une estimée de L est : la suivante :

- extraire de R_y une matrice H_P (5) avec P grand mais vérifiant l'inégalité (6)
- décomposer cette matrice en éléments propres et ordonner ces derniers par valeurs propres décroissantes (11)
- construire $\hat{\Omega}$, $\hat{V}_k$, $\hat{\Sigma}_k$ et $\hat{\mu}_k$ pour k = 2P-1, 2P-3 , 2P-5 ... et s'arrêter dès que $\hat{\mu}_k < t_k$ un seuil correspondant à une variable du Chi-deux à k degrés de liberté, fixé de manière à réaliser une certaine probabilité de surestimer l'ordre.

CONCLUSION

Des résultats de simulation seront proposés lors de la présentation. Les performances des deux approches seront comparées. Le même développement permet également d'envisager et de justifier d'autres tests. On présentera également les résultats de cette approche appliquée aux matrices de densité spectrale en traitement d'antenne.

RÉFÉRENCES

[1] Passerieux J.M., Kopp L. : "Detection par valeurs propres : performances théoriques et essais sur signaux réels", 10e Colloque GRETSI, pp. 357-362, 1985.

[2] Zhao L.C., Krishnaiah P.R., Bai Z.D. : " On detection of the number of signals in presence of white noise", J. of Multivariate Analysis, vol. 20, pp. 1-25 et pp. 26-49, 1986.

[3] Lecadre J.P. : "High resolution methods in presence of noise correlated sensors outputs, .." Soumis à IEEE-ASSP, 1986.

[4] Fuchs J.J. : "Estimating the number of sinusoïds in additive white noise", Proceedings ICASSP, 1987.

(Etude réalisée dans le cadre d'une convention avec la DCAN-TOULON).