ESTIMATION DE LA FREQUENCE DE SIGNAUX SINUSOIDAUX NON-STATIONNAIRES DANS DU BRUIT COLORE

M. BARLAUD, G. ALENGRIN, J. MENEZ

Laboratoire de Signaux et Systèmes UA 814 du CNRS Université de Nice
41 Bd Napoléon III - 06041 NICE Cedex

RESUME

Des modèles paramètriques à coefficients dépendant du temps ont été récemment développés pour représenter des signaux non-stationnaires. Lorsque les observations sont bruitées, des méthodes récursives ou globales permettent d'estimer les paramètres non biaisés dans le cas où le bruit est blanc. On en déduit alors une représentation temps, fréquence, amplitude du signal, et l'évolution des fréquences de résonance du signal.

Malheureusement, dans le cas de signaux réels, l'hypothèse d'un bruit perturbateur blanc n'est pas très réaliste. Une hypothèse permettant de se rapprocher un peu plus de la réalité consiste à considérer le bruit comme coloré. Parmi les différentes représentations d'un bruit coloré, on retiendra celle d'un modèle M.A.

Le but de cette communication est de présenter une nouvelle méthode d' estimation des paramétres d'un signal non-stationnaire perturbé par un bruit coloré avec comme application l' estimation des fréquences instantanées de signaux sinusoidaux non-stationnaires.

ABSTRACT

Autoregressive time varying parametric modeling is a powerful approach to represent non-stationary signals or processes. If the signal is disturbed by white noise, the least squares estimator leads to biased parameters . Global or recursive methods have been developped in order to reduce the bias of the parameters in this case.

This paper presents a new method to estimate time varying parameters of a non stationary process corrupted by an M.A. noise.

The main results are briefly stated hereafter :

-We first give an expression for the bias compensation of the parameters.

-An estimator of the M.A. noise autocorrelation is given as a function of the parameters .

-Then a fast iterative method is proposed in order to solve this non linear equation system.

This method is applied to the estimation of the frequencies of time varying frequencies sinusoïds.

1- Modélisation.

Soit un signal représenté par le modèle A.R. suivant :

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} a_i(t)\, x_{t-i} \tag{1}$$

L' observation bruitée du signal est donnée par :

$$y_t = x_t + n_t$$

$$n_t = b_0 e_t + b_1 e_{t-1} + \ldots\ldots b_q e_{t-q} \tag{2}$$

où e_t est un bruit blanc gaussien stationnaire de variance σ^2, et $n(t)$ un bruit coloré ayant pour fonction d'autocorrélation

$$R(k) = E[\, n_t \, n_{t+k} \,]$$

Les paramètres variables $a_i(t)$ sont supposés être une combinaison linéaire de fonctions de base tels que :

$$a_i(t) = \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\, f_j(t) \tag{3}$$

De façon à simplifier le problème, nous prendrons le même ordre pour la partie M.A. et la partie A.R. ; ce qui revient à surdimensionner l'ordre du processus ou du bruit.

Soit n le sup. de p et q.

$$x_t = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, x_{t-i} \tag{4}$$

$$n_t = \sum_{i=0}^{n} b_i\, e_{t-i} \tag{5}$$

D' après les équations (1) ,(2) and (3) le modèle observé est representé par le modèle ARMA spécial :

$$y_t - Y_{t-1}^T \underline{a} = n_t - E_{t-1}^T \underline{a} \tag{6}$$

avec:

$$\underline{a}^T = (a_{10} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{nm})$$

$$Y_{t-1}^T = (y_{t-1} f_0(t) \ldots\ldots y_{t-n} f_m(t))$$

$$E_{t-1}^T = (n_{t-1} f_0(t) \ldots\ldots n_{t-n} f_m(t))$$

Soit $\hat{\underline{\alpha}}$ l' estimateur de $\underline{a}$ au sens des moindres carrés

$$\mathbf{A}_N \hat{\underline{\alpha}}_N = \mathbf{B}_N \tag{7}$$

avec :

$$\underline{B}_N = \left(\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}\, y_t\right)$$

et

$$A_N = (\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1} Y_{t-1}^T)$$

Cet estimateur est asymptotiquement biaisé, et l'estimateur non biaisé s'obtient à partir de l'équation (7) et de l'autocorrélation inconnue R(k) du bruit coloré.

$$\lim_{N\to\infty} (A_N - X_N) \hat{\underline{a}} = A_N \hat{\underline{\alpha}}_N - \underline{r}_N \qquad (8)$$

avec

$$X = \begin{vmatrix} F_N R(0) & F_N R(1) & .. & F_N R(n) \\ & & & \\ F_N R(n) & & & F_N R(0) \end{vmatrix}$$

où R(k) est l'autocorrélation du bruit coloré

$$\underline{r}_N = \begin{vmatrix} \underline{H}_N R(1) \\ \\ \underline{H}_N R(n) \end{vmatrix}$$

$$F_N = \sum_{t=1}^{N} \begin{vmatrix} f_0(t) \\ . \\ f_m(t) \end{vmatrix} [f_0(t) .... f_m(t)]$$

$$\underline{H}_N = \sum_{t=1}^{N} \begin{vmatrix} f_0(t) \\ . \\ f_m(t) \end{vmatrix}$$

Parmi les différentes fonctions de base, les polynômes de Legendre modifiés, dont l'expression est donnée par :

$$f_m(t) = (2m+1)^{1/2} * P_m(t)$$

sont particulièrement intéressants pour le calcul de F_N qui est alors égale à

$$F_N = N * I$$

I étant la matrice identité.

Pour calculer cette fonction d'autocorrélation du bruit coloré, nous proposons une méthode basée sur le calcul de l'innovation .

2- Estimation de l'autocorrélation du bruit coloré.

Soit l'erreur de prédiction à un pas définie par :

$$\mu_t = y_t - Y_{t-1}^T \underline{a} \qquad (9)$$

$$\mu_t = e_t - E_{t-1}^T \underline{a} \qquad (10)$$

qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\mu_t = E_t^{*T} \underline{a}^* \qquad (11)$$

avec

$$\underline{a}^{*T} = (1\ 0\ ....\ 0\ a_{10}\ .....a_{1m}\ ......a_{nm})$$

$$E_t^{*T} = (e_t\ f_0(t) .....e_{t-n}\ f_m(t))$$

Considérons à présent la somme des produits des erreurs de prédiction donnée par

$$R_\mu(k) = \sum_{t=1}^{N-n} \mu_t \mu_{t+k} \qquad (12)$$

$$R_\mu(n-1) = \underline{a}^{*T} \begin{vmatrix} R(n-1) & R(n) & 0..0 \\ & .\ . & .\ . \\ & .\ . & 0 \\ & . & R(n) \\ R(1) & & R(n-1) \end{vmatrix} \underline{a}^*$$

$$R_\mu(0) = \underline{a}^{*T} \begin{vmatrix} R(0) & . & R(n) \\ & . & \\ & . & \\ R(n) & & R(0) \end{vmatrix} \underline{a}^*$$

Nous obtenons ainsi (n+1) équations à (n+1) inconnues : R(k).

$$\begin{vmatrix} R_\mu(0) \\ R_\mu(k) \\ \\ R_\mu(n) \end{vmatrix} = G \begin{vmatrix} R(0) \\ R(k) \\ \\ R(n) \end{vmatrix} \qquad (13)$$

où les coefficients de la matrice G sont fonction du vecteur paramètre $\underline{a}^*$.

Soit I_o la matrice identité, et

$$I_{k+1} = Z * I_k \qquad k = 1 ....n$$

avec

$$Z = \begin{vmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & 0 & \\ & 1 & . & & & \\ & & 1 & . & & \\ 0 & & & 1 & . & \\ & & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Définissons, pour k variant de 0 à n,

$$\beta(k) = \underline{a}^{*T} I_k \underline{a}^*$$

La matrice G(n+1)*(n+1) peut alors être calculée avec les formules suivantes :

$$G = G_1 + G_2$$

$$G_1 = \begin{vmatrix} \beta(0) & \beta(1) & \cdots\cdots\cdots & \beta(n) \\ \beta(1) & \beta(0) & & \\ & & \ddots & \\ \beta(n) & & & \beta(0) \end{vmatrix}$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} 0 & \beta(1) & \beta(2) \cdots\cdots & & \beta(n) \\ 0 & \beta(2) & & \beta(n) & 0 \\ 0 & \cdot & \beta(n) & & \cdot \\ & & \cdot & 0 & \\ & \beta(n) & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{vmatrix}$$

Le problème est alors de résoudre le système non linéaire formé par les equations (8) et (13), dans lequel l' équation (8) est un système linéaire d'ordre $n*(m+1)$, et l' équation (13) un système d'ordre $(n+1)$.

Ce système non linéaire peut être résolu par une méthode itérative comme la méthode du gradient ou la méthode de Newton-Raphson.

3- Estimation simultanée de la fonction d' autocorrélation et des paramètres par une méthode itérative.

La méthode consiste à

-calculer l'estimateur $\hat{\alpha}_N$ sur l 'intervalle [1,N]

- prendre comme conditions initiales :

$\underline{a}(i=0) = \underline{\alpha}_N$

-calculer les résiduels définis par :

$$\mu_t = y_t - Y^T_{t-1}\,\underline{a}$$

et la somme des produits des résiduels décalés :

$$R_\mu(k) = \sum_{t=1}^{N-n} \mu_t \, \mu_{t-k}$$

-résoudre le système linéaire (13) pour calculer R(k),

-résoudre le système linéaire (8) pour obtenir un estimateur de â,

-répéter cette procédure jusqu' à ce que â converge .

4- Simulation.

Un signal constitué par une somme de sinusoides :

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} A_i \,\mathrm{Sin}(2\pi f_i\, t + \emptyset_i)$$

où les fréquences instantanées f_i sont fonction du temps, peut être représenté par un modèle A.R. d'ordre 2P.

De façon à montrer les performances de l'algorithme proposé, nous l'avons testé sur des signaux sinusoïdaux à fréquence variable. La fréquence croit linéairement de 200 à 400 Hz. La période d'échantillonnage est de 1000 Hz.

$$x_t = A \sin 2\pi f_i\, t$$

Le signal peut donc être représenté par un modèle AR du second ordre.

$$x_t = \sum_{i=1}^{2} a_i(t)\, x_{t-i}$$

Le bruit perturbateur est modélisé par un processus MA d'ordre 2.

$$n_t = e_t + b_1 e_{t-1} + b_2 e_{t-2}$$

avec $b_1 = -0{,}5$ et $b_2 = 0{,}6$.

La fig 1 montre le spectre de ce bruit coloré.

Soit σ^2 la variance du bruit blanc e_t.

Le rapport signal sur bruit est alors défini par :

$$SNR = 10 \log \frac{\frac{1}{N-n}\sum_{t=1}^{N-n} x_t^2}{\sigma^2(1 + b_1^2 + b_2^2)}$$

Le spectre instantané est calculé au temps t par

$$S(t,w) = \frac{1}{\left| 1 + a_1(t)\, e^{-jw} + a_2(t) e^{-2jw} \right|^2}$$

Cette fonction du temps et de la fréquence w est représentée en trois dimensions en pseudo 3D. L'axe horizontal représente la fréquence de 0 à fe/2 , et l'axe vertical représente le spectre instantanné. Ce spectre est représenté toutes les 25 périodes d'échantillonnage.

Le spectre obtenu par une méthode de moindres carrés est très aplati [fig (2)]. L'utilisation d'une méthode de compensation du biais, avec l'hypothèse d'un bruit blanc perturbateur améliore peu ce spectre [fig (3)]. Par contre l'utilisation de la méthode proposée donne un spectre très satisfaisant [fig (4)].

4- Conclusions.

Dans cet article nous avons proposé un nouvel estimateur des paramètres d'un signal non stationnaire perturbé par un bruit coloré. L'estimateur proposé pour la fonction d' autocorrélation du bruit coloré étant fonction des paramètres, le problème à résoudre est alors non linéaire.

Nous avons proposé une méthode itérative originale pour résoudre ce problème non linéaire.

Les simulations ont montré que cette méthode était particulièrement performante pour l'analyse spectrale. D'autre part cette méthode peut être extrapolée au cas de signaux stochastiques, en augmentant l'ordre du système [10].

Références.

[1] Y. GRENIER - "Time-dependent ARMA model of non-stationary signals", IEEE Trans. on ASSP, Vol 31, n° 4, pp 899-911, Aug. 1983.

[2] T. SUBBA RAO - " The fitting of non-stationary time series models with time dependant parameters", Journ. of the Royal statis. Soc., series B, vol 32, n°2, pp 312-322, 1970.

[3] M. HALL, A.V. OPPENHEIM, A. WILLSKY - "Time varying parametric modeling of speech" IEEE CDC, pp 1085-1091, New Orleans, 1977.

[4] H. SAKAI - " Statistical analysis of Pisarenko's method for sinusoidal frequency estimation", IEEE Trans. on ASSP, Vol 32, n°1, Feb. 1984.

[5] K.C. SHARMAN, B. FRIEDLANDER - " Time-varying autoregressive modeling of a class of non-stationary signals", IEEE ICASSP 84 pp 22.2.1/22.2.4.

[6] R. CHARBONNIER , M .BARLAUD, G. ALENGRIN , J. MENEZ " Results on A.R. modelling of non-stationary signals ", SIGNAL PROCESSING (March 1987)

[7] G. ALENGRIN, M. BARLAUD, J. MENEZ - " Unbiased estimation of non-stationary signals in noise", IEEE Trans. on ASSP, vol 34, n°5, pp 1319-1322., October 1986.

[8] H.SAKAI, M. ARASE - "Recursive parameter estimation of an autoregressive process disturbed by white noise", INT. Journ. of CONTROL, vol 32, n°6, pp 949-966, 1979.

[9] M. BARLAUD, G. ALENGRIN, J. MENEZ - "Recursive parameter estimation of non-stationary A.R. signals disturbed by white noise", EUSIPCO 86, The HAGUE, Sept. 1986.

[10] H.SAKAI " Estimation of frequencies of sinusoids in colored noise ", ICASSP 86 , TOKYO, 1986.

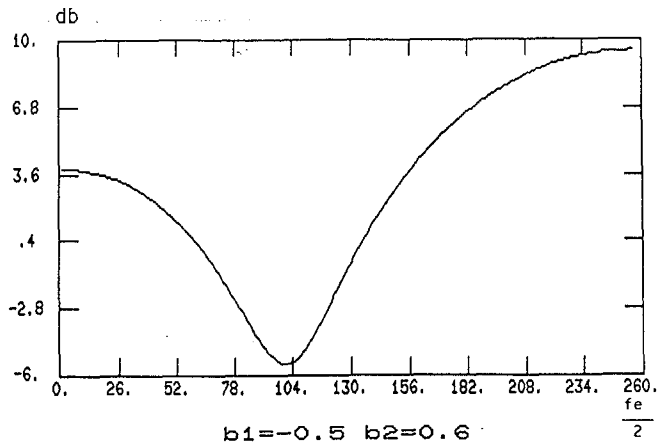

Figure 1

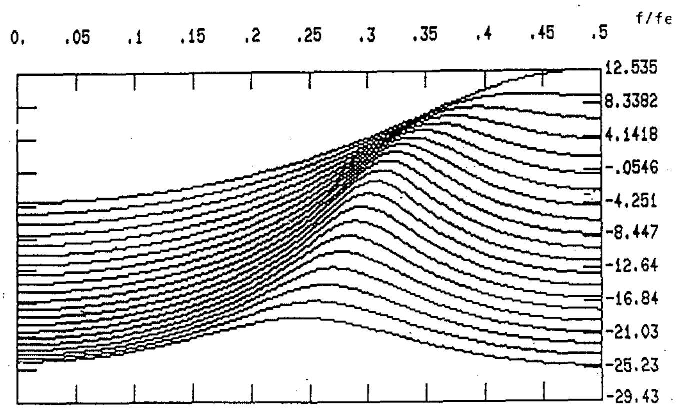

Figure 2

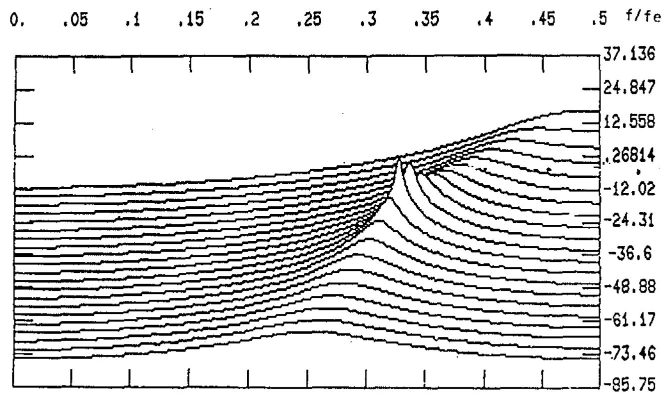

Figure 3

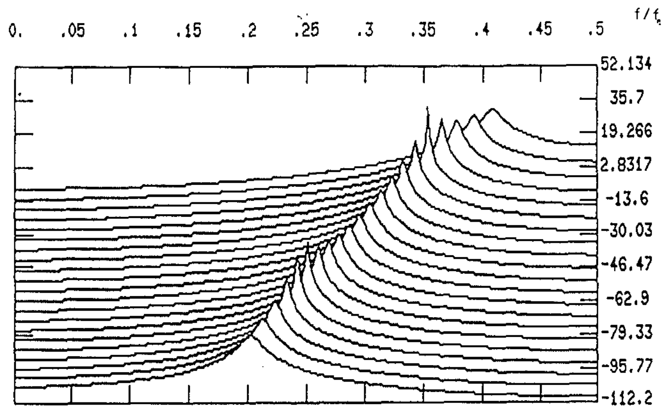

Figure 4