FONCTIONS D'AMBIGUITE GENERALISEES ET SYNTHESE DE SIGNAUX D'AMBIGUITE DONNEE

André BERTHON

Société AERO - 3 avenue de l'Opéra - 75001 PARIS

RESUME

La fonction d'ambiguïté croisée classique est de la forme $\langle f_1 | U(g) | f_2 \rangle$, c'est-à-dire un élément de matrice d'une représentation unitaire U du groupe G engendré par les translations en temps et en fréquence. Pour la fonction d'ambiguïté en compression, qui a également été introduite, G est le produit semi-direct des translations et des compressions temporelles. Une question importante est de savoir si, et comment, la connaissance de la G - fonction d'ambiguïté permet de remonter au signal, comme c'est le cas pour les translations.

On donne ici des conditions nécessaires que doit vérifier la représentation du groupe et on démontre une formule générale qui détermine deux signaux f_1 et f_2 à partir de leur G - fonction d'ambiguïté.

SUMMARY

The classical relative ambiguity functions takes the form $\langle f_1 | U(g) | f_2 \rangle$, that is, a matrix element of a unitary representation U of the group G generated by time and frequency translations. For time-compression ambiguity functions, G is the semi-direct product of time translations and compressions. We adress the questions whether and how the knowledge of the G - ambiguity function enables to recover the signal, as is the case for translations.

We give necessary conditions in terms of the group representation and we prove a general formula which determines two signals f_1 and f_2 from their G - ambiguity function.

L'importance de la fonction d'ambiguïté introduite par WOODWARD vient de ce qu'elle caractérise l'information qu'on peut acquérir sur une cible en recevant l'écho, renvoyé par elle, du signal considéré [1]. Cela, dans l'hypothèse où la cible est ponctuelle et animée d'un mouvement de translation uniforme, et pour des signaux à bande étroite ; le signal reçu se déduit alors du signal émis, à l'atténuation près, par des translations en temps et en fréquence.

Il est naturel de définir, de manière analogue, des fonctions d'ambiguïté pour d'autres situations ; cela a été fait, notamment, pour le cas d'un signal à large bande avec une cible en translation uniforme où l'effet Doppler se traduit par une compression du signal, qui se combine à la translation liée à la distance émetteur-cible. On définit une fonction d'ambiguïté en compression [2].

Un problème qui se pose est celui de la reconstitution d'un signal dont on connait la fonction d'ambiguïté. On sait que cette synthèse est possible pour la fonction d'ambiguïté temps-fréquence de WOODWARD. Elle le demeure, sous certaincès conditions, avec la fonction d'ambiguïté en compression [2]. On cherche ici à généraliser ces résultats. On montre qu'ils dépendent des propriétés de groupe des transformations qui sont supposées faire passer du signal émis au signal reçu.

1.- SYNTHESE D'UN SIGNAL A PARTIR D'UNE FONCTION D'AMBIGUITE

1.1 Méthode formelle

Le signal émis est modélisé par une fonction de carré sommable $f \in L_2(\mathbb{R})$, l'écho reçu est alors de la forme Uf , où U est un opérateur linéaire borné de l'espace L_2 . La norme $\|f\|^2$ correspond à l'énergie ; on peut supposer que l'atténuation du signal ne dépend pas de sa forme (i.e. l'éloignement de la cible ne varie pas pendant la durée effective de l'illumination) et se ramener, en multipliant par ce facteur constant, à des opérateurs U unitaires. On suppose enfin que les hypothèses faites sur la cible sont telles que la transformation U dépend de paramètres réels sous la forme $U(g)$, où g décrit un groupe de LIE G. La correspondance $g \rightsquigarrow U(g)$ est une représentation unitaire du groupe dans l'espace de HILBERT L_2 .

La fonction d'ambiguïté de f est donc définie sur le groupe G , c'est le produit hermitique de f et de sa transformée par $U(g)$; plus généralement, pour la fonction d'ambiguïté croisée de f_1 et f_2 :

$$(1) \quad \chi_{f_1 f_2}(g) = (f_1, U(g) f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)}\,[U(g)f_2](t)\,dt$$

Si μ est une mesure de HAAR invariante à gauche sur le groupe, et $\mathcal{B}$ un opérateur linéaire borné sur $L_2(\mathbb{R})$, considérons l'opérateur défini, sous réserve que cette intégrale converge, par :

$$K = \int_G U(g)\, B\, U(g^{-1})\, d\mu(g)$$

On vérifie que K commute avec tous les opérateurs de la représentation :

$$U(h) K U(h^{-1}) = \int_G U(hg)\, B\, U((hg)^{-1})\, d\mu(g) = K$$

Si on peut en conclure que K est multiple de l'unité, la solution du problème consiste, étant donné quatre fonctions f_i , i = 1,2,3,4 à prendre pour $\mathcal{B}$ l'opérateur de projection sur f_2 parallèlement à f_3 . Il vient alors :

$$(f_1, K f_4) = \int_G (f_1, U(g) f_2)\,(f_3, U(g^{-1}) f_4)\, d\mu(g)$$

$$= \int_G \chi_{f_1 f_2}(g)\, \overline{\chi_{f_4 f_3}}(g)\, d\mu(g)$$

et le premier membre est proportionnel à (f_1, f_4). En échangeant les rôles des quatre fonctions on voit que le coefficient de proportionalité est proportionnel à (f_3, f_2), d'où finalement la relation de fermeture :

$$(2) \int_G \chi_{f_1 f_2}(g) \overline{\chi_{f_4 f_3}}(g)\, d\mu(g) = (f_1, f_4)(f_3, f_2) \times c^{te}$$

Posons maintenant $f_1 = f_2 = f$. Si on fait tendre f_4, au sens des distributions, vers une distribution de DIRAC en x_1 et f_3 de même vers $\delta(x - x_2)$, formellement, en supposant que $\chi_{f_4 f_3}(g)$ tend alors vers un noyau $K_{x_1 x_2}(g)$ et que l'intégrale a un sens, on peut écrire :

$$(3) \int_G \chi_{ff}(g)\, K_{x_1, x_2}(g)\, d\mu(g) = f(x_1) \times \overline{f(x_2)} \times c^k$$

formule qui permet de retrouver f à partir de sa fonction d'ambiguïté. Naturellement ce calcul est purement formel et pour lui donner un sens il faut faire appel à des espaces de distributions appropriées. Mais la formule (2) implique bien, dans tous les cas, que la synthèse du signal est possible à partir de sa fonction d'ambiguïté ; par exemple, en posant toujours $f_1 = f_2 = f$ et en prenant pour f_3 et f_4 les signaux gaussiens de la représentation de BARGMANN [3], on obtient au second membre de (2) le produit $F(z_1)\overline{F(z_2)}$, où F est la représentation de BARGMANN de f, fonction entière, et z_1, et z_2, les nombres complexes associés aux signaux gaussiens [4]. Ainsi de la fonction d'ambiguïté χ_{ff} on tire $F(z)$, d'où l'on peut déduire f de manière unique.

1.2 Conditions de possibilité

On établit facilement le lemme suivant (voir [5], ch. XIV). Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) La représentation U du groupe G est irréductible.

b) Pour toute fonction f les $U(g)f$ forment une famille dense dans l'espace de HILBERT.

c) Tout opérateur borné qui commute avec tous les $U(g)$ est multiple scalaire de l'identité.

Nous avons vu que c) pouvait être une condition suffisante pour que la synthèse soit possible. Montrons qu'elle nécessaire. Si elle n'est pas vérifiée la représentation est réductible d'après l'équivalence entre a) et c), autrement dit il existe deux sous-espaces de HILBERT H_1, H_2 orthogonaux et supplémentaires, que laissent invariants tous les opérateurs $U(g)$. Toute fonction f se décompose de manière unique en $f_1 + f_2$ avec $f_1 \in H_1$, $f_2 \in H_2$ et on a, d'après les hypothèses :

$$(4) \quad \chi_{ff}(g) = (f_1, U(g) f_1) + (f_2, U(g) f_2)$$

Donc, on peut multiplier f_1 et f_2 par des phases arbitraires sans modifier la fonction d'ambiguïté de $f_1 + f_2$. Ainsi une fonction d'ambiguïté ne peut déterminer le signal (à une phase près) que dans chaque sous-espace où la représentation est irréductible.

Peut-on conclure que les conditions équivalentes du lemme sont nécessaires et suffisantes pour que la synthèse soit possible ?

Oui si le groupe G est compact, non dans le cas général ; il faut encore que les intégrations que nous avons manipulées formellement aient un sens. Une condition évidemment nécessaire est :

$$(5) \quad \int_G |\chi_{ff}(g)|^2 d\mu(g) = k_f \|f\|^2 < \infty$$

pour le voir il suffit de prendre les quatre fonctions égales à f dans (2).

1.3 Caractérisations des fonctions d'ambiguïté croisées

Supposons maintenant que la fonction f varie dans un sous-espace de HILBERT de $L_2(\mathbb{R})$ où la représentation est irréductible. On appellera admissible [6] une fonction f_0 qui vérifie la condition (5). Alors pour toute fonction f on définit une application C_f du groupe G dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par :

$$(6) \quad C_f(g) = (U(g) f_0, f) / \sqrt{k_{f_0}} = \chi_{f_0 f}(g^{-1}) / \sqrt{k_{f_0}}$$

Les applications C_f vérifient les identités suivantes :

$$(7) \quad \int_G |C_f(g)|^2 d\mu(g) = \|f\|^2$$

$$(8) \quad \int_G \overline{C_{f_1}(g)}\, C_{f_2}(g)\, d\mu(g) = (f_1, f_2)$$

Ce résultat n'est qu'une réécriture de l'équation (2). On peut l'obtenir directement en utilisant la condition b) [6]. En effet, l'équation (7) est valable pour $f = f_0$ par hypothèse, donc, si $h \in G$ pour $f = U(h) f_0$ à cause de l'invariance de μ, car dans ce cas :

$$C_f(g) = (U(g) f_0, U(h) f_0) / \sqrt{k_{f_0}} = C_{f_0}(h^{-1} g)$$

et enfin pour toute fonction f par densité. L'équation (8) se déduit de (7) par polarisation.

Les fonctions C_f appartiennent donc à l'espace $L_2(G)$ des fonctions de carré sommable pour la mesure μ sur le groupe et la correspondance $f \to C_f$ de $L_2(\mathbb{R})$ dans $L_2(G)$ est isométrique d'après (8) ; elles forment donc un sous-espace de HILBERT de $L_2(G)$. Ce sous-espace admet un noyau reproduisant $K(g, h)$ défini par :

$$K(g, h) = (U(g) f_0, U(h) f_0) / k_{f_0} = \chi_{f_0 f_0}(h^{-1} g) / k_{f_0}$$

On a en effet, d'après (8) :

$$(9) \quad \begin{aligned} C_f(g) &= (U(g) f_0, f) / \sqrt{k_{f_0}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k_{f_0}}} \int_G \overline{C_{U(g) f_0}(h)}\, C_f(h)\, d\mu(h) \\ &= \frac{1}{k_{f_0}} \int_G \chi_{f_0 f_0}(h^{-1} g)\, C_f(h)\, d\mu(h) \end{aligned}$$

2.- APPLICATION AUX TRANSLATIONS TEMPS-FREQUENCE

Rappelons la définition de la fonction d'ambiguïté de WOODWARD :

$$(10)\quad \chi_{f_1 f_2}(x_0,y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i y_0 x}\, \bar f_1\!\left(x-\frac{x_0}{2}\right) f_2\!\left(x+\frac{x_0}{2}\right) dx = (f_1, A_{x_0,y_0} f_2)$$

où l'opérateur A_{x_0,y_0} représente une translation de x_0 suivie d'un décalage en fréquence angulaire de y_0 et d'un déphasage. En introduisant les opérateurs non bornés $\mathcal{D}$ (dérivation) et X (multiplication par la variable), on voit que A_{x_0,y_0} s'écrit :

$$(11)\quad A_{x_0,y_0} = e^{\frac{i}{2}x_0 y_0} e^{-i y_0 X} e^{x_0 \mathcal{D}} = e^{-i y_0 X + x_0 \mathcal{D}}$$

on passe d'une forme à l'autre en utilisant le fait que le commutateur $[\mathcal{D}, X]$ est égal à l'identité.

Première constatation, ces opérateurs ne forment pas un groupe. Mais il s'en faut de peu. On trouve en effet :

$$(12)\quad A_{x_0,y_0} A_{x_0',y_0'} = e^{\frac{i}{2}(x_0 y_0' - x_0' y_0)} A_{x_0+x_0',\, y_0+y_0'}$$

Autrement dit, à une phase près, on a la loi du groupe des translations de $\mathbb{R}^2$; mais ce groupe est commutatif et ne peut être isomorphe à celui des transformations que nous considérons, dont les générateurs infinitésimaux $\mathcal{D}$ et X ne commutent pas.

Le groupe G à considérer est celui des triplets (x_0, y_0, α), où x_0 s'interprète comme translation en temps, y_0 comme décalage en fréquence et α comme facteur de phase multiplicatif, la loi de composition étant :

$$(13)\quad (x_0,y_0,\alpha)(x_0',y_0',\alpha') = \left(x_0+x_0',\, y_0+y_0',\, \alpha+\alpha'+\tfrac{1}{2}(x_0 y_0' - x_0' y_0)\right)$$

Ce groupe (de HEISENBERG-WEYL) possède une mesure de HAAR invariante à gauche et à droite qui est simplement $dx_0\, dy_0\, d\alpha$ (la phase α est un réel modulo 2π). L'opérateur $U(g)$ correspondant au triplet (x_0, y_0, α) est simplement $e^{i\alpha} A_{x_0,y_0}$. Les fonctions d'ambiguïté $\chi_{f_1 f_2}(g)$ sont données par la formule (6) à une phase près et cette phase disparaît dans une formule telle que (2), en sorte que l'intégration sur α donne un trivial facteur 2π.

Il faut montrer que la formule (2) a toujours un sens ; c'est dire que les fonctions d'ambiguïté croisées sont de carré intégrable dans $\mathbb{R}^2$. Or, $\chi_{f_1 f_2}$ a pour transformée de FOURIER par rapport à la variable y_0 le produit $\bar f_1(x-\frac{x_0}{2})\, f_2(x+\frac{x_0}{2})$, qui est évidemment de carré intégrable en x et x_0, avec pour résultat $\|f_1\|^2 \|f_2\|^2$ [7].

Il faut enfin vérifier que la représentation est irréductible. Pour cela il suffit que tout opérateur linéaire borné qui commute avec les générateurs infinitésimaux $\mathcal{D}$ et X soit multiple de l'identité. Pour le montrer, plutôt que d'utiliser la théorie de la transformation de FOURIER, introduisons la base hilbertienne orthonormale de $L_2(\mathbb{R})$ formée par les fonctions de HERMITE $h_n(x)$, et les opérateurs non bornés :

$$a = (X+\mathcal{D})/\sqrt{2} \qquad a^* = (X-\mathcal{D})/\sqrt{2}$$

où l'étoile désigne le conjugué hermitique.

Les relations bien connues :

$$a h_n = \sqrt{n}\, h_{n-1} \qquad a^* h_n = \sqrt{n+1}\, h_{n+1} \qquad a^* a\, h_n = n h_n$$

montrent qu'un opérateur K qui commute avec a et a^* admet h_n pour fonction propre, pour tout n, et que la valeur propre est indépendante de n.

Nous sommes donc dans les conditions du paragraphe précédent, de plus toutes les fonctions sont admissibles. Choisissons la fonction h_0, qui est le signal gaussien minimal centré, réel, de norme unité :

$$h_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

et considérons les fonctions G_f définies plus haut, qui sont proportionnelles $(R_{h_0} = 2\pi)$ aux fonctions d'ambiguïté croisées $\chi_{h_0 f}$ à une phase près :

$$G_f(x_0,y_0,\alpha) = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{2}x_0 y_0 + i y_0 x - \frac{1}{2}(x-x_0)^2} f(x)\, dx$$

Si l'on pose $z = (x_0 + i y_0)/\sqrt{2}$, cela peut s'écrire :

$$(14)\quad G_f(x_0,y_0,\alpha) = \frac{e^{-i\alpha}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} F(z)$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{-1/4} e^{-\frac{1}{2}z^2 + \sqrt{2}zx - \frac{1}{2}x^2} f(x)\, dx$$

La fonction entière $F(z)$ est la représentation de BARGMANN de f [3]. Les formules (8) et (14) montrent que ces fonctions appartiennent à un espace de HILBERT $L_2(\mathbb{C}, \mu)$ pour la mesure $d\mu(z) = e^{-|z|^2} d^2 z$. Dans cet espace la formule (9) se traduit par la propriété de noyau reproduisant :

$$(15)\quad F(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{\bar w z} F(w)\, d\mu(w)$$

3.- APPLICATIONS AUX TRANSLATIONS ET COMPRESSIONS

On considère maintenant le groupe engendré par les translations et les compressions du temps. Ses éléments sont des couples de réels (u,v), où v mesure une translation et e^u est un rapport de compression ; la loi de composition est :

$$(16)\quad (u_1,v_1)(u_2,v_2) = (u_1+u_2,\, v_1 e^{u_2} + v_2)$$

Ce groupe admet pour mesure de HAAR à gauche $du\,dv$, à une constante près. Les mesures de HAAR à droite sont différentes, proportionnelles à $e^u du\,dv$: le groupe n'est pas unimodulaire.

Dans un espace de fonctions de carré sommable les opérateurs unitaires de la représentation sont définis par :

$$U(g) f(t) = e^{u/2} f(e^u t - v) \qquad g = (u,v)$$

d'où les fonctions d'ambiguïté en compression [2] :

$$(17)\quad \psi_{f_1 f_2}(g) = e^{u/2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar f_1(t)\, f_2(e^u t - v)\, dt$$

Désignant par $\hat{f}(\omega)$ la transformée de FOURIER de f on exprime facilement la transformée de $U(g)f$:

$$\widehat{U(g)f}\,(\omega) = e^{-u/2} e^{-ive^{-u}\omega} \hat{f}(e^{-u}\omega) \tag{18}$$

Cette formule montre que l'espace H_2 des fonctions dont la transformée de FOURIER s'annule pour $\omega < 0$ (espace de HARDY) est invariant pour tous les opérateurs $U(g)$. La représentation U n'est donc pas irréductible dans $L_2(\mathbb{R})$.

L'espace H_2 correspond aux signaux analytiques [8]. Le projecteur sur cette espace est l'opérateur qui, dans l'espace de FOURIER, consiste à multiplier $\hat{f}(\omega)$ par la fonction de HEAVISIDE $\theta(\omega)$. Or, les générateurs infinitésimaux du groupe sont l'opérateur de dérivation $\mathcal{D}$ pour les translations et pour les compressions $\frac{1}{2}(1+X\mathcal{D})$. En effet :

$$e^{\varepsilon/2} f(e^{\varepsilon/2}t) - f(t) = \frac{\varepsilon}{2} f(t) + \frac{\varepsilon}{2} t f'(t) + o(\varepsilon)$$

Un opérateur borné qui commute avec $\mathcal{D}$ consiste à multiplier $\hat{f}(\omega)$ par une fonction $A(\omega)$, si de plus il commute avec $X\mathcal{D}$ cela implique $\omega \frac{dA}{d\omega} = 0$ au sens des distributions, de sorte que $A(\omega)$ est une combinaison linéaire de $\theta(\omega)$ et $\theta(-\omega)$; l'opérateur correspondant est donc une combinaison du projecteur sur H_2 et du projecteur orthogonal. Donc la restriction de la représentation U à l'espace H_2 vérifie la condition c) et est par conséquent irréductible.

Il reste que dans H_2 toutes les fonctions ne sont pas admissibles. On montre [6] qu'en introduisant la transformée de FOURIER de f on peut mettre la condition (5) sous la forme :

$$k_f = \frac{1}{\|f\|^2} \iint_{-\infty}^{\infty} |\psi_{ff}(u,v)|^2 \, du\, dv = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \tag{19}$$

Parmi les fonctions qui ne sont pas admissibles figurent les projections sur H_2 (signaux analytiques associés) de fonctions usuelles telles que les gaussiennes et les fonctions caractéristiques d'intervalles ; plus généralement les fonctions admissibles sont de moyenne nulle ($\hat{f}(0) = 0$).

Remarquons que pour u fixé, la fonction d'ambiguïté est la transformée de FOURIER d'une fonction de carré sommable :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{ff}(u,v) e^{i\eta v} dv = \sqrt{2\pi}\, e^{u} \hat{f}(\eta) \overline{\hat{f}}(\eta e^{u}) \tag{20}$$

Ceci permet en principe de retrouver f, à une phase près, à partir de sa fonction d'ambiguïté, et plus généralement toute fonction h à partir de la fonction d'ambiguïté croisée ψ_{fh}. Il vient :

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-u}}{\hat{f}(\eta)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{fh}\left(\log \frac{\omega}{\eta}, v\right) e^{-i\eta v} dv \tag{21}$$

pour toute valeur de η telle que le spectre de f ne s'annule pas. En pratique une telle procédure est numériquement instable, tandis que si la fonction f est admissible, on obtient la valeur $h(t)$ presque partout par une formule intégrale [6] :

$$h(t) = \frac{1}{k_f} \iint e^{u/2} f(e^{u}t - v)\, \psi_{fh}(u,v)\, du\, dv \tag{22}$$

4.- UN GROUPE DE TRANSFORMATIONS PLUS GENERAL

Les considérations précédentes peuvent être appliquées aux autres sous-groupes d'un groupe G englobant toutes les opérations classiques sur les signaux [4], produit semi-direct du groupe de HEISENBERG-WEYL par $SL(2,\mathbb{R})$. Faute de place, les détails sont reportés à une future publication.

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUES

[1] WOODWARD (P). Probability and Information Theory With Applications to Radar. Pergamon, 1953.

[2] JOURDAIN (G). Synthèse de signaux certains dont on connait la fonction d'ambiguïté de type WOODWARD ou de type en compression. Ann. Télécomm. 32, 1977, pp. 19-23.

[3] BARGMANN (V). On a HILBERT Space of Analytic Functions and an Associed Integral Transform. Commun. Pure en Appl. Math. 14, 1967, pp 187-214.

[4] BERTHON (A). Nouvelle application de la représentation de BARGMANN à la théorie du signal. 10ème colloque GRETSI, 1985.

[5] DIEUDONNE (J). Eléments d'analyse, vol. 2, Gauthier-Villars, 1975.

[6] GROSSMANN (A), MORLET (J). Decomposition of HARDY Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape. SIAM J. MATH. ANAL., vol. 15, n° 4, juillet 1984.

[7] PAPOULIS (A). Signal Analysis. Mc Graw Hill, 1977.

[8] VILLE (J). Théorie et application de la notion du signal analytique. Câble et transmission, 1948, vol. 2, n° 1, pp 61-74.
