ONZIEME COLLOQUE GRETSI - NICE DU 1er AU 5 JUIN 1987

Inégalité de SCHRÖDINGER en temps et fréquence : Cas des signaux asymptotiques

B. ESCUDIE

Laboratoire Traitement du Signal UA346CNRS
I.C.P.I.
25 rue du Plat 69288 LYON Cédex 02

● L'inégalité de SCHRÖDINGER est une variante de celle de GABOR dite inégalité en temps et fréquence. Elle fournit une borne du produit $\Delta t.\Delta\nu$ directement liée au produit bande durée BT, encore appelée λ_L coéfficient de couplage (t,ν). Ce terme est maximal dans le cas de la Modulation linéaire en Fréquence, et peut être annulé pour diverses classes de signaux. Le taux de concentration d'une représentation conjointe est borné par le facteur de couplage du signal et de la fonction de pondération choisie. Dans la classe des signaux pairs ou à modulations d'amplitude paire et linéaire en fréquence il est possible de définir une "ellipse temps fréquence" analogue à celle utilisée pour les Ambiguités selon les résultats de C.W. HELSTRÖM.

● SCHRÖDINGER's relation is related to the socalled GABOR's uncertainty equation. A bound is defined which describes the lower value of the bande duration product and the time frequency coupling factor. This factor reaches a maximum value for linear frequency modulation, and may have null values for even modulations of signals. Localization for energy in the (t,ν) plane may be described by a second order moment for conjoint representations related to the coupling factor. For even modulated signals an uncertainty ellipse may be defined for (t,ν) conjoint representations as for Ambiguity functions.

Introduction : Un intérêt s'est manifesté récemment pour l'inégalité de SCHRÖDINGER variante de l'inégalité d'HEISENBERG [1] . C'est la Mécanique statistique qui semble profiter principalement de ces résultats. Néanmoins les résultats obtenus permettent d'envisager des interprétations analogues pour le formalisme hilbertien utilisé en Analyse des Signaux. Des résultats intéressants peuvent alors apparaitre pour les représentations conjointes en temps et fréquence ou les fonctions d'Ambiguité.

1) Inégalité de SCHRÖDINGER en temps et fréquence :

Utilisant les résultats de GABOR et le formalisme hilbertien, il est possible d'associer aux grandeurs t et ν des opérateurs par une règle de correspondance [2][3] . En particulier : $t\nu \rightarrow \frac{1}{2}(\hat{t}\hat{\nu}+\hat{\nu}\hat{t})+\frac{1}{2}[\hat{t},\hat{\nu}]$ où $[\hat{t},\hat{\nu}]$ est le commutateur des opérateurs t et ν. En calculant la variance associée aux opérateurs on définit :
VARt $=\langle\hat{t}^2\rangle-\langle\hat{t}\rangle^2$, $\mathrm{Cov}(\hat{t},\hat{\nu})=\frac{1}{2}\langle\hat{t}\hat{\nu}+\hat{\nu}\hat{t}\rangle-\langle\hat{t}\rangle\langle\hat{\nu}\rangle$
L'opérateur centré $\tilde{t}=\hat{t}-\langle\hat{t}\rangle$ et $\tilde{\nu}$ conduisent à l'aide de l'inégalité de SCHWARZ à :
$\langle\tilde{t}^2\rangle\langle\tilde{\nu}^2\rangle\leq|\langle\tilde{t}\tilde{\nu}\rangle|^2$ avec $|\langle\tilde{t}\tilde{\nu}\rangle|^2=1/4(\tilde{t}\tilde{\nu}+\tilde{\nu}\tilde{t})^2+\frac{1}{4}|[\tilde{t},\tilde{\nu}]|^2$
ce qui conduit à l'inégalité de SCHRÖDINGER.

$$\mathrm{VAR}\,\hat{t}.\mathrm{VAR}\,\hat{\nu}\geqslant \mathrm{Cov}^2(t,\nu)+\frac{1}{4}|\hat{t},\hat{\nu}|^2$$

2) Inégalité de SCHRÖDINGER et paramètre de couplage t, ν :

Cette inégalité est plus stricte que celle d'HEISENBERG-GABOR. En effet le premier terme du menbre de droite est absent dans la relation :

$$\Delta t.\Delta\nu\geqslant(4\pi)^{-1}$$

Pour exprimer explicitement la relation (1) calculons les valeurs moyennes sur un signal analytique:
$Z(t) = A(t)e^{i\Phi(t)}$. Il vient :

$$\mathrm{Cov}(\hat{t},\hat{\nu})=\frac{1}{2\pi}\int tA^2\dot{\Phi}\,dt+\frac{1}{i2\pi}\left(\int_R t\dot{A}A\,dt+E_z\right)-\int_R t|z|^2dt\int_R\frac{\dot{z}z^*}{i2\pi}dt$$

où l'on note la présence du terme λ_L défini par B.LEVINE comme terme de couplage en temps et fréquence : $\lambda_L=\int_R tA^2\dot{\Phi}(t)dt$

et: $$\Delta t^2\Delta\nu^2\geqslant\frac{1}{4\pi^2}\left(\lambda_L-\langle\hat{t}\rangle_z\langle\dot{\Phi}\rangle_z\right)^2+\frac{E_z^2}{16\pi^2}\ .../...$$

Si Z(t) est un signal normé et si $\lambda_L=\langle\hat{t}\rangle\langle\dot{\Phi}\rangle$ on obtient l'inégalité de GABOR. Ce résultat nous fournit dans le cas des signaux asymptotiques quelconques une nouvelle inégalité $\Delta t\Delta\nu\geqslant\lambda/2\pi$ $\lambda\gg 1$ où l'on constate que $\lambda_L\simeq BT$, B bande spectrale et T durée du signal étudié. La relation : $\lambda_L=\langle\hat{t}\rangle_z\langle\dot{\Phi}\rangle_z$ traduit la relation de DECOUPLAGE en temps et fréquence définie par B.LEVINE [4] . Rappelons qu'elle permet de rendre diagonale la matrice des erreurs d'estimations de la date d'arrivée et de la fréquence centrale d'un signal d'énergie finie entaché d'un bruit non corrélé [4].

3) Bornes sur les valeurs de λ_L :

a) Condition de découplage :

Une condition suffisante pour obtenir la relation de découplage :

$$\lambda_L-\langle\hat{t}\rangle_z\langle\dot{\Phi}\rangle_z=0$$

est que l'on ait $A(t) = A(-t) = |Z(t)|$
$\dot{\Phi}(t) = \dot{\Phi}(-t) = \arg Z$

Ceci est réalisé dans le cas des signaux modulés en amplitude et fréquence par l'emploi de modulations paires, dont le cas $A(t) = \Pi_T(t)$ et $\nu_i(t) = \dot{\Phi}/2\pi$
$\nu_i=\nu_0+\alpha|t|$ est dit modulation V-FM. Il existe cependant d'autres solutions utilisant des lois de modulations quelconques conduisant à $\lambda_L\equiv 0$.

b) Condition de découplage et décalage temporel:

En utilisant la relation (3) et en décalant Z(t) de la quantité t_0 : $Z(t-t_0)$ il vient :

$$\lambda_L(t_0)=\lambda(0)+t_0\int_R A^2(t')\dot{\Phi}(t')dt'=\lambda_L(0)+t_0\langle\dot{\Phi}\rangle_z$$

Par un décalage correctement choisi on peut ramener la condition de découplage (3) à la forme suivante :

$$\lambda_L=\langle\hat{t}\rangle_z\langle\dot{\Phi}\rangle_z \qquad (4)$$

et même à une expression centrée pour des signaux à modulations paires : $\lambda_L=0$ si $\langle\hat{t}\rangle_z=\langle\dot{\Phi}\rangle_z=0$

c) Borne sur le module de λ_M :

Soit un signal centré tel que : $\langle t\rangle_z = 0$, propriété dûe au fait que $A(t) = A(-t)$ par exemple, on a : $\lambda_L = 0$ comme expression de la condition de découplage. Cherchons la borne portant sur les valeurs $|\lambda_M|$ à l'aide de l'inégalité de SCHWARZ :

$$|\lambda_L|^2 = \left|\int_R t A^2(t)\dot{\Phi}(t)\,dt\right|^2 \leqslant \int_R t^2 A^2(t)\,dt \int_R A^2(t)\dot{\Phi}^2(t)\,dt$$

$$|\lambda_L|^2 = \langle \hat{t}^2\rangle\langle \dot{\Phi}^2\rangle$$

La borne est atteinte si : $\dot{\Phi} = kt$ ce qui correspond à une loi de modulation linéaire en fréquence (MLF).

$$|\lambda_L|^2 \leqslant |\lambda|_M^2 = k^2\langle \hat{t}^2\rangle$$

avec $\dot{\Phi} = kt$, $A(t) = A(-t)$
$\langle \hat{t}\rangle = 0$

Si on porte $\dot{\Phi} = kt$ dans l'expression de λ_L il vient : $\lambda_L(\dot{\Phi} = kt) = k\langle \hat{t}^2\rangle \in \mathbb{R}$

en effet k est une pente de modulation d'expression $\pm B/T$ suivant le caractère croissant ou décroissant de la modulation. Dans ce cas où $\langle \hat{t}\rangle = 0$ on obtient:

$$\Delta t^2 \Delta\nu^2 \geqslant \left(\frac{k}{2\pi}\langle \hat{t}^2\rangle_z\right)^2 + (16\pi^2)^{-1}$$

C'est pour le signal à modulation linéaire de fréquence que $|\lambda_L|$ atteint sa borne supérieure et atteint une valeur extremale. La situation k = 0 correspond au signal dit Fréquence Pure, tel que $\Phi = 2\pi\nu_0 t$, $\dot{\Phi} = \omega_0 = 2\pi\nu_0$. C'est pour ce même signal que $|\langle\nu\rangle_z|^2$ atteint sa valeur maximale définie à l'aide de l'inégalité de SCHWARZ.

d) Signaux analytiques avec découplage (t,ν):

Si on n'envisage pas le cas asymptotique, où le modèle expenentiel est admissible, l'écriture des signaux analytiques est relié aux propriétés des signaux à phase de BLASCHKE, comme l'ont montré W.MARTIN et B.PICINBONO [5] .
Nous avons montré que l'on peut les écrire en utilisant le fait que : $h(-t) \rightleftharpoons H(\nu).\mathcal{U}(\nu)$, $\mathcal{U} = +1, \nu > 0$ où $H(t) \rightleftharpoons h(\nu)$ sont la réponse impulsionnelle H et le gain complexe d'un filtre linéaire stable et à déphasage minimal obéïssant aux conditions de KRAMERS-KÖNIG [6] . Ceci entraine avec l'écriture de la phase de BLASCHKE et la parité de $A^2(t)$ que : $\lambda_L = 0$

Cette propriété n'est pas limitée à cette seule classe de signaux, dits rationnels, car d'autres signaux analytiques la possèdent tel : $Z(t) \rightleftharpoons z(\nu)$
$z(\nu) = \Pi_B(\nu - B/2)$
car: $\lambda_L = -\int_R \nu\dot{\varphi} M(\nu)\,d\nu$, $z = |z|e^{i\varphi} = Me^{i\varphi}$

4) Inégalité de SCHRÖDINGER et Représentation conjointe en t et ν :

Pour appliquer l'inégalité de SCHRÖDINGER aux représentations en temps et fréquence nous utiliserons les résultats obtenus par P.FLANDRIN [7] . Ils traduisent le fait que cette représentation est plus ou moins localisée dans le plan (t,ν). Ceci s'exprime à l'aide d'un moment de second ordre réduit portant sur une durée T arbitraire :

$$\int_{R^2}\left(\frac{t^2}{T^2} + T^2\nu^2\right)\rho_z(t,\nu;f)\,dt\,d\nu = \frac{\Delta t^2}{T^2} + T^2\Delta\nu^2 + \sigma(T,f)$$

où f est la fonction de pondération caractérisant la représentation étudiée. (f = 1 WIGNER VILLE,...).
La quantité s'exprime par :

$$\sigma(T,f) = -\frac{1}{4\pi^2 T^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}(\eta,0)\right]_{\eta=0} + T^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}(0,\tau)\right]_{\tau=0}$$

comme: $\Delta t^2 T^{-2} + T^2\Delta\nu^2 = (\Delta t.T^{-1} - T\Delta\nu)^2 - 2\Delta t\Delta\nu \geqslant 0$

l'inégalité de GABOR conduit à :

$$\int_R\left(\frac{t^2}{T^2} + T^2\nu^2\right)\rho_z(t,\nu;f)\,dt\,d\nu \geqslant \frac{1}{2\pi} + \sigma(T,f)$$

La variante dûe à SCHRÖDINGER indique alors :

$$\int_{R^2}\left(\frac{t^2}{T^2} + T^2\nu^2\right)\rho_z(t,\nu;f)\,dt\,d\nu \geqslant \frac{\lambda_L}{2\pi}\sqrt{1 + \frac{1}{4\lambda_L^2}} + \sigma(T,f)$$

Ce qui fait apparaitre le rôle du coefficient de couplage comme une borne inférieure à la concentration de ρ_z exprimée comme moment de second ordre réduit. Un cas intéressant est celui du spectrogramme ou spectre évolutif, tel que $f(\eta,\tau) = \chi_W^*(\eta,\tau)$ avec χ_W fonction d'Ambiguité symétrique associée à la fonction de pondération W:

$$\rho_z(t,\nu;\chi_W^*) = \left|\int_R z(\eta)\,w(\eta-\nu)\,e^{2i\pi\eta t}\,d\eta\right|^2 = S_z(t,\nu;W)$$

On a $\sigma(T,f) = T^{-2}\Delta t_W^2 + T^2\Delta\nu_W^2$ et si $\langle \hat{t}\rangle_W = 0$, $W(t) = W(-t)$, $\langle W,W\rangle = E_W = 1$ il vient :

$$\sigma(T,f) \geqslant \frac{\lambda_W}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{4\lambda_W^2}\right)^{1/2}$$

soit finalement :

$$\int_{R^2}\left(\frac{t^2}{T^2} + T^2\nu^2\right)S_z(t,\nu;W)\,dt\,d\nu \geqslant \frac{\lambda_L(z)}{2\pi}\left(1 + 4\lambda_L^{-2}(z)\right)^{1/2} + \frac{1}{2\pi}\left(1 + 4\lambda_W^{-2}\right)^{1/2}$$

Ce résultat montre que la concentration du spectrogramme dans le plan (t,ν) dépend des propriétés du signal traduites par le coefficient de couplage $\lambda_L(z)$, mais aussi des propriétés de la fenètre traduites par $\lambda_L(w)$. Il faut remarquer que le premier terme correspond au taux de concentration de la distribution de WIGNER VILLE, telle que f = 1 et $\sigma(T,f) = 0$. Il y a donc tout intérêt à choisir W(t) donnant une valeur $\lambda_L(w)$ aussi faible que possible. Une remarque s'impose tout naturellement à propos de la relation (5) : elle n'est valable que dans le cadre des définitions de $\rho_z(t,\nu,f)$ à l'aide d'une forme quadritique symétrique et d'une fonction de pondération indépendante de Z. Il n'en serait pas exactement de même pour les représentations affines dues à P.BERTRAND ou aux variantes dues à GROSSMANN-MORLET ou d'autres auteurs [8] .

5) Inégalité de SCHRÖDINGER et fonction d'Ambiguité:

La fonction d'Ambiguité symétrique étant liée par transformation de FOURIER avec $\rho_z(t,\nu;f)$:

$$\rho_z(t,\nu;f) \underset{\nu\ \ \theta}{\overset{t\ \ \phi}{\rightleftharpoons}} f(\theta,\phi).\chi_z^*(\theta,\Phi)$$

il existe des propriétés remarquables pour ces deux fonctions. Il faut dès l'abord bien en marquer les différences : [9] .

- $\chi_z^*(\theta,\phi) = \int_R Z\left(u+\frac{\theta}{2}\right)Z^*\left(u-\frac{\theta}{2}\right)e^{-2i\pi\phi u}\,du$ possède un statut de fonction d'intercorrélation entre Z et une décalée temporelle et fréquentielle de Z. On a la propriété : $\chi_z = \chi_z^{\#}$, $|\chi_z| \leqslant \chi_z(0,0)$

Il apparait une arête dans le plan (θ,Φ) pour la représentation de $|\chi_z|$. De plus les termes d'interaction entre composantes du signal Z se manifestent à l'extérieur de cette trace principale [9][10] .

- $\rho(t,\nu;f)$ ne possède nullement ces propriétés et la géométrie de formation des termes d'interférences est totalement différente [10] .

Il existe cependant un cas où l'expression des deux quantités coincide . C'est le cas où Z(t) possède la parité, ou le cas $Z(t) = A(t)e^{i\pi\alpha t^2}$ avec A(t) pair. Si $Z(t) = Z(-t)$ on a :

$$\rho_z(t,\nu;1) = W_z(t,\nu) = 2\chi_z^*(t,2\nu)$$

de même si on envisage le cas $Z(t) = A(t)e^{i\pi\alpha t^2}$, $A(t) = A(-t)$ il vient :

$$W_z(t,\nu) = \left(\int_R A\left(t+\frac{\tau'}{2}\right)A\left(t-\frac{\tau'}{2}\right)e^{-2i\pi\nu'\tau'}\,d\tau' *_{\nu'} \delta(\nu'-\alpha t)\right)(t,\nu)$$

Dans ces deux cas il y a égalité à des translations près ou à un changement d'échelle près. Il est donc possible d'envisager des propriétés communes quant à la concentration dans le plan (t,ν).

a) Inégalité de SCHRÖDINGER pour la fonction d'Ambiguité : Inégalité d'HELSTRÖM.

Divers auteurs dont A.W.RIHACZEK utilisent le comportement quadratique de $|\chi_z(\theta,\Phi)|^2$ au voisinage de l'origine pour traduire le caractère elliptique des courbes de niveau. A l'aide des dérivées partielles de $|\chi_z|^2$ en θ et Φ calculées au point origine ils obtiennent une inégalité : [11]

$$\frac{\pi}{4}(\delta_0^2\beta_0^2 - \alpha_0^2)^{-1/2} \geqslant \frac{1}{4}$$

.../...

avec $2\delta_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}|\chi_z|^2_{0,0}$, $2\beta_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}|\chi_z|^2_{0,0}$, $2\alpha_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}|\chi_z|^2_{0,0}$

Ce résultat est en fait une variante de l'inégalité temps-fréquence obtenue dès 1960 par C.W. HELSTRÖM : [12]

$$\overline{\omega^2}.\overline{t^2} - \overline{\omega t}^2 \geq \frac{1}{4} \quad \begin{cases} \overline{\omega} = \overline{t} = 0 & , \overline{\omega^2} = \int_R \omega^2 |z(\omega)|^2 d\omega \\ \overline{t^2} = \int_R t^2 |z|^2 dt \\ \overline{\omega t} = \int_R t\dot{\phi} |z|^2 dt \end{cases}$$

L'obtention de cette inégalité par C.W.HELSTRÖM utilise une règle de correspondance qui se ramène à celle proposée par S.GOLIN [1] .

b) <u>Transformations dans le plan (t,ν) ou le plan (θ,ϕ)</u>:

Puisque $W_Z(t,\nu)$ et $\chi_z^*(\theta,\phi)$ sont transformées de FOURIER l'une de l'autre on peut étudier les transformations dans le plan (t,ν) ou le plan (ϕ,θ) [3][13] . Considérant le cas $Z_1(t) = Z(t)e^{i\pi\alpha t^2}$ qui est une modulation par un signal modulé linéairement en fréquence on a :

$$W_{Z_1}(t,\nu) = W_Z(t, \nu - \alpha t)$$

de même $z_2(\nu) = z(\nu)e^{-i\beta\nu^2}$ entraine :

$$W_{Z_2}(t,\nu) = W_Z(t-\beta\nu, \nu)$$

Il ne faut pas en conclure rapidement que ceci correspond à une rotation de la surface de la distribution de WIGNER ou de la surface d'Ambiguité ! Ces opérations se représentent par des matrices de transformation des coordonnées [14].

$$\begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & -\eta\beta \\ \alpha/\eta & \frac{1-\alpha\beta}{\eta} \end{bmatrix}$$

qui ne correspondent à une rotation que pour certaines valeurs de α, β et η : $\eta = \sqrt{1-\alpha\beta}$, $\beta = tg\varphi$, $\alpha = \sin\varphi\cos\varphi$.

La transformation simple $\begin{bmatrix} t' \\ \nu' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \nu \end{bmatrix}$ ne peut donc correspondre à une rotation. L'aire de la surface délimitée par une courbe de niveau elliptique varie. Cette variation reste en général faible comme l'a noté C.W.HELSTRÖM, tout en montrant qu'elle peut être nulle pour les signaux à modulation linéaire [12] .

c) <u>Ellipse temps-fréquence pour un signal gaussien modulé en fréquence</u> :

Si nous considérons le signal $Z(t) = e^{-\pi t^2/\tau_0^2} . e^{i\pi\alpha_M t^2} . e^{i2\pi\nu_0 t}$ d'enveloppe gaussien et de loi de modulation de fréquence linéaire de pente $\alpha_M = \frac{B}{T}$ autour de la fréquence centrale ν_0, le caractère analytique n'est assuré que pour une fréquence centrale ν_0 suffisamment haute. Tenant compte de l'invariance par translation de $W_Z(t,\nu)$ et vu le fait que :

$$W_A(t,\nu) = e^{-\pi(\tau_0^2\nu^2 + t^2/\tau_0^2)}$$

il vient:

$$W_Z(t,\nu) = \left[e^{-\pi\left(\tau_0^2(\nu - \nu_M(t))^2 + \frac{t^2}{\tau_0^2}\right)} \right]_{\nu \to \nu - \nu_0}$$

Le module de $W_Z(t,\nu)$ correspond à des courbes de niveau du type elliptique : $\tau_0^2(\nu - \alpha_M t)^2 + t^2/\tau_0^2 = K$, analogues à celle de la fonction d'Ambiguité du même signal. Dans ce cas particulier, et dans ce cas uniquement, on pourra utiliser l'inégalité de SCHRÖDINGER-HELSTRÖM liant par une forme quadratique les moments de second ordre du signal [12] .

<u>CONCLUSION</u> :

L'inégalité de SCHRÖDINGER en temps et fréquence procure une borne plus adaptée que celle de GABOR pour les signaux asymptotiques. Celle-ci dépend du produit BT bande durée et du coéfficient de couplage λ_L entre temps et fréquence. Ce terme traduit le taux de concentration de la représentation conjointe de WIGNER-VILLE dans le plan temps fréquence. Dans le cas de signaux à modulations paires ou linéaires en fréquence, il est possible de définir une "ellipse temps fréquence" analogue aux définitions de C.W. HELSTRÖM [12]

.../...

<u>Remerciements</u> :

L'auteur tient à remercier ses collègues du LTS pour leurs suggestions et notamment P. FLANDRIN et M.E. BOUHIER.

---

[1] S. GOLIN Journ. Math. Phys. Vol 26 (11) P 2781 - 83 Nov. 1985

[2] G. BONNET Annales Télécommunications t. 23 N° 3 - 4 Mars 1968

[3] P. FLANDRIN Thèse doct. Ing. Inst. Nat. Polytechn. Grenoble 1987

[4] B. LEVINE Fondements de Radiotechnique Statistique Vol II Editions MIR (Moscou) P 346 - 349 197

[5] W. MARTIN, B. PICINBONO Annales Télécomm. t 38 N°5_6 Mai 1983

[6] B. ESCUDIE, W. MARTIN 10ième Colloque GRETSI P 25-29 tome I. 1985

[7] P. FLANDRIN Thèse doct es. Sc. Phys. I. Nat. Polyt. Grenoble Mai 1987

[8] P et J. BERTRAND Recherche Aérospatiale N° 5 (sept. Oct) P 277 - 283 1985

[9] F. HLLWATSCH (Congrès IASTED PARIS 1985)

[10] P. FLANDRIN 8ième Colloque GRETSI P 69 - 74 tome I 1981

[11] A.W. RIHACZEK Principles of high resolution Radar Mac Grawhilled 1969

[12] C.W. HELSTRÖM Statistical Detection of Signals 1960

[13] A. PAPOULIS Journ. Opt. Soc. Am. Vol 64 N° 6 P 779-788 1974

[14] B. ESCUDIE, P. FLANDRIN Rapport ICPI TS 8207 1982