



ALGORITHMES DE POURSUITE MULTISENSEUR EN PRESENCE DE FAUSSES ALARMES

A.HOULES (1) , Y.BAR-SHALOM (2)

(1) Service Technique des Constructions et Armes Navales, 8 Bd Victor 75732 PARIS CEDEX 15
 (2) E.E. Dept. University of Connecticut, Storrs, CT06268 USA

RESUME

Dans cet article, on présente et compare plusieurs algorithmes de poursuite multisenseur en présence de fausses alarmes. Ce problème est abordé en examinant différentes organisations de traitement permettant d'associer des mesures en provenance d'un senseur 1 (un radar donnant des informations en distance et azimuth) et d'un senseur 2 (un capteur infrarouge fournissant des mesures en site et azimuth).

Les différents algorithmes présentés correspondent à des adaptations du filtre à association probabiliste des données [1]. Ce filtre tient compte des fausses alarmes et de la probabilité a priori que la cible soit vue par le senseur et soit dans une fenêtre de validation des mesures calculée par le filtre. Les différentes adaptations concernent le problème non-linéaire (l'état de la cible est estimé en coordonnées cartésiennes alors que les mesures sont faites en coordonnées polaires) et les différentes organisations (parallèle ou séquentielle) retenues pour associer les mesures en provenance de plusieurs senseurs[2].

Après avoir décrit les différents algorithmes, on compare les erreurs d'estimation résultant d'une simulation de type Monte-Carlo, et enfin on évalue leur complexité.

1. INTRODUCTION

Le but de cet article est de présenter différents algorithmes multisenseur afin de poursuivre une cible dans un environnement riche en fausses alarmes. A titre d'illustration, on traite le cas de l'association d'un senseur 1 de type radar (fournissant des mesures en distance et azimuth) et d'un senseur 2 de type infra-rouge (fournissant des informations angulaires en azimuth et site). On suppose que les deux senseurs sont situés en un même lieu, qu'ils ont tous les deux détectés la cible, et la voient de façon synchrone.

Bien que les mesures soient en coordonnées polaires, on préfère généralement représenter la cinématique de la cible en coordonnées cartésiennes. On obtient alors un système à équation d'état linéaire et équation de mesure non linéaire (la non linéarité provenant du changement de coordonnées). La poursuite est effectuée à l'aide d'un filtre de Kalman étendu ou d'une de ses variantes, le filtre de Kalman non linéaire proposée par K.S.Miller et D.M.Leskiw [3]. Le modèle proposé par R.A.Singer [4] a été retenu pour représenter la cinématique de la cible.

A chaque itération, on calcule une mesure prédite ainsi qu'une ellipsoïde d'incertitude, adaptée à chaque senseur, centrée sur la mesure prédite et dépendant de sa covariance. A l'itération suivante, les mesures contenues dans cette ellipsoïde appelée "fenêtre de validation" sont retenues pour calculer une nouvelle estimation de la cible.

Chaque senseur fournit ainsi un ensemble de mesures dont une au plus peut provenir de la cible (si elle a été détectée, et si la mesure correspondante est dans la fenêtre de validation). L'estimation de la cinématique de la cible est faite en pondérant l'ensemble des mesures validées suivant l'algorithme à association probabiliste des données dans le cas non-paramétrique proposé par Y.Bar-Shalom et T.Tse[1].

Bien qu'il existe deux équations de mesures (une pour chaque senseur), il n'existe qu'une seule équation d'état caractérisant la cinématique de la cible poursuivie. L'adaptation du filtre à association probabiliste des données au cas multisenseur, conduit à évaluer la probabilité a posteriori que chaque association de mesures (une fournie par le senseur 1, l'autre par le senseur 2) proviennent de la cible (en tenant compte, pour chaque senseur, de la probabilité que la cible soit vue par le senseur et qu'elle soit dans la fenêtre de validation). Ceci conduit à une organisation parallèle du filtre.

Etant donné la nature des mesures, on peut décomposer les vecteurs de mesure et en utilisant le filtre de Kalman non-linéaire, effectuer une estimation multisenseur sur la seule coordonnée

SUMMARY

In this paper, we present and compare several multisensor tracking algorithms in presence of clutter. We discuss this problem with an exemple which is an association of two dimensionnal measurements (range and azimuth angle) given by sensor 1 (a radar) and two dimensionnal measurements (both elevation and azimuth angles) given by sensor 2(an infrared sensor).

We give some adaptations of the Probabilistic Data Association Filter [1]. This filter is designed for tracking target in a cluttered environment and with an a priori detection probability not equal to 1. The adaptations concern the non-linear problem (the target state is in Cartesian coordinates but the measurements are in polar coordinates) and several organizations (sequential and parallel) for the associations of measurements given by the two sensors [2].

After the description of each algorithm, some results of Monte-Carlo simulation are given, and a comparaison of the complexity is accomplished.

d'azimut comme précédemment, puis effectuer une estimation sur les coordonnées de site et de distance comme dans le cas du filtre mono-senseur. On obtient un filtre à organisation parallèle en azimuth.

Plus simplement, afin de diminuer la charge de calcul, on peut effectuer une estimation avec les mesures provenant d'un senseur puis calculer une nouvelle estimation prenant en compte les mesures validées par l'autre senseur.

On donne une description et une comparaison des trois algorithmes correspondant.

2. POSITION DU PROBLEME

Soit un système représenté par son équation d'état:

$$x(k) = F x(k-1) + w(k) \quad k=0,1,\dots \quad (2.1)$$

où

-x(k) représente l'état de la cible à l'instant k

-F est la matrice de transition du système

-w(k) est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance connue Q

et des équations de mesure (une pour chaque senseur):

$$z_i(k) = h_i[x(k)] + v_i(k) \quad k=0,1,\dots \quad (2.2)$$

où:

-z_i(k) représente la valeur de la mesure faite par le senseur i à l'instant k.

-h_i représente la transformée de l'état en coordonnées cartésiennes en un état en coordonnées polaires adapté à chaque senseur.

-v_i(k) est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance R_i connue.

A l'itération k, on crée une fenêtre de validation

$$V_i(k) = g^2 \pi |S_i(k)|^{1/2} \quad i=1,2 \quad (2.3)$$

pour chaque senseur i, qui conduit à valider m_i(k) mesures notées:

$$z_i^j(k) \quad i=1,2 \quad j=1,\dots,m_i(k) \quad k=0,1,\dots \quad (2.4)$$

Les mesures sont validées en utilisant la formule suivante:

$$[z_i^j(k) - \hat{z}_i(k|k-1)]' S_i^{-1}(k) [z_i^j(k) - \hat{z}_i(k|k-1)] < g^2 \quad (2.5)$$

où z_i(k|k-1) est la mesure prédite et S_i(k) sa covariance associée.

On note l'ensemble des mesures validées à l'instant k pour le senseur i



$$Z_i^k(k) = \{z_j^i(k)\}_{j=1}^{m_i(k)} \quad (2.6)$$

L'ensemble des mesures validées par le senseur i depuis l'instant initial est :

$$Z_i^k = \{Z_i(k)\}_{k=1}^k \quad (2.7)$$

L'estimée locale (relative au senseur i) à variance minimale de la cible est :

$$\hat{x}_i(k|k) = \int x(k) p[x(k) | Z_i^k] dx(k) \quad (2.8)$$

En utilisant l'approche sous optimale du filtre à association probabiliste de données [1] cette estimée est donnée par (en supprimant l'indice i) :

$$\hat{x}(k|k) = E\{x(k) | Z^k\} = \sum_{j=0}^{m(k)} E\{x(k) | \theta_j(k), Z^k\} P\{\theta_j(k) | Z^k\} \quad (2.9)$$

où :

-m(k) est le nombre de mesures validées provenant du senseur donné à l'instant k

- $\theta_j(k)$ représente l'évènement tel que $z_j(k)$ soit la mesure correcte (c'est à dire provient de la cible) et $\theta_0(k)$ représente l'évènement "aucune mesure n'est correcte".

$$P\{\theta_j(k) | Z^k\} = \beta_j(k) \quad (2.10)$$

est la probabilité pour que la mesure $z_j(k)$ provienne de la cible.

Dans le cas non paramétrique, ces probabilités se calculent comme suit :

$$\beta_j(k) = e_j(k) [b(k) + \sum_{i=1}^{m(k)} e_i(k)]^{-1} \quad j=1, \dots, m(k) \quad (2.11)$$

$$\beta_0(k) = b(k) [b(k) + \sum_{i=1}^{m(k)} e_i(k)]^{-1} \quad j=0 \quad (2.12)$$

où :

$$-e_j(k) = (P_G)^{-1} N[v_j; 0, S(k)] \quad (2.13)$$

$$-b(k) = m(k) (1 - P_D P_G) [P_D P_G V(k)]^{-1} \quad (2.14)$$

P_D est la probabilité à priori que le senseur voit la cible

P_G est la probabilité à priori que la cible soit dans la fenêtre de validation

$N[a; 0, S(k)]$ est la densité de probabilité normale d'argument a, de moyenne nulle et de variance S(k)

L'estimée locale (pour un senseur) peut alors s'écrire :

$$\hat{x}(k|k) = E\{x(k) | Z^k\} = \sum_{j=0}^{m(k)} \beta_j(k) \hat{x}_j(k|k) \quad (2.15)$$

où pour $j \neq 0$

$$\hat{x}_j(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + W(k) [z_j(k) - \hat{z}_j(k|k-1)] \quad (2.16)$$

où W(k) est le gain du filtre de Kalman

A partir des estimées locales calculées avec (2.8), le problème consiste à savoir les associer pour former une estimée globale

$$\hat{x}(k|k) = \int x(k) p[x(k) | Z_1^k, Z_2^k] dx(k) \quad (2.17)$$

3. FILTRE A ASSOCIATION PARALLELE DES MESURES

De façon similaire au cas monosenseur (equation 2-9), l'estimée dans le cas multisenseur peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|k) &= E\{x(k) | Z_1^k, Z_2^k\} \\ &= \sum_{j=0}^{m_1(k)} \sum_{l=0}^{m_2(k)} E\{x(k) | \theta_1^j(k), \theta_2^l(k), Z_1^k, Z_2^k\} P\{\theta_1^j(k), \theta_2^l(k) | Z_1^k, Z_2^k\} \end{aligned}$$

Le calcul de cette estimée est réalisé en adaptant au cas traité (deux senseurs synchrones poursuivant une cible) l'algorithme présenté par K.C. Chang, C.Y. Chong, Y. Bar-Shalom [4].

Le premier terme de la double sommation s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{x}^{\wedge, j, l}(k|k) &= E\{x(k) | \theta_1^j(k), \theta_2^l(k), Z_1^k, Z_2^k\} \\ &= \hat{x}(k|k-1) + P^{j, l}(k|k) \{H_1(k) R_1^{-1} [z_1^j(k) - \hat{z}_1^j(k|k-1)] \\ &\quad + H_2(k) R_2^{-1} [z_2^l(k) - \hat{z}_2^l(k|k-1)]\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $P^{j, l}(k|k)$ est la matrice de covariance de l'estimée obtenue par :

$$P^{j, l}(k|k)^{-1} = P(k|k-1)^{-1} + \sum_{i=1}^2 H_i(k) R_i^{-1} H_i(k) \quad (3.3)$$

Le deuxième terme de la double sommation s'écrit :

$$\begin{aligned} \beta^{j, l}(k) &= P\{\theta_1^j(k), \theta_2^l(k) | Z_1^k, Z_2^k\} \\ &= \beta_1^j(k) \beta_2^l(k) \gamma(\theta_1^j(k), \theta_2^l(k)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

les deux premiers termes étant calculés comme indiqué en (2.11); le troisième terme est un terme de corrélation entre les mesures et est donné en Annexe.

L'estimée multisenseur s'écrit donc :

$$\hat{x}(k|k) = \sum_{j=0}^{m_1(k)} \sum_{l=0}^{m_2(k)} \beta^{j, l}(k) \hat{x}^{\wedge, j, l}(k|k) \quad (3.5)$$

et sa covariance est :

$$P(k|k) = \sum_{j=0}^{m_1(k)} \sum_{l=0}^{m_2(k)} \beta^{j, l}(k) \{P^{j, l}(k|k) + [x^{\wedge, j, l}(k|k) x^{\wedge, j, l}(k|k)]\} \quad (3.6)$$

Une itération de l'algorithme se déroule comme suit :

1. Etape de prédiction de l'état

Connaissant $\hat{x}(k-1|k-1)$ et sa covariance $P(k-1|k-1)$ on calcule

$$\hat{x}(k|k-1) = F \hat{x}(k-1|k-1) \quad (3.7)$$

et sa covariance

$$P(k|k-1) = F P(k-1|k-1) F' + Q \quad (3.8)$$

2. Etape de prédiction des mesures et validation.

A partir de $\hat{x}(k|k-1)$ et $P(k|k-1)$ on calcule une prédiction de la mesure au niveau de chaque senseur i

$$\hat{z}_i(k|k-1) = h_i[\hat{x}(k|k-1)] \quad i=1, 2 \quad (3.9)$$

et sa covariance :

$$S_i(k) = H_i(k) P(k|k-1) H_i(k)' + R_i \quad i=1, 2 \quad (3.10)$$

où H_i est la matrice Jacobienne de la fonction de mesure pour le senseur i

La validation des mesures s'effectue en utilisant (2.5)

3. Calcul des pseudo-innovations

On calcule au niveau de chaque senseur les probabilités β_1^j et β_2^l ainsi que les pseudo-innovations :

$$\begin{aligned} v_1^j(k) &= H_1 R_1^{-1} [z_1^j(k) - \hat{z}_1^j(k|k-1)] \\ v_2^l(k) &= H_2 R_2^{-1} [z_2^l(k) - \hat{z}_2^l(k|k-1)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

4. Corrélation des pseudo-innovations

On calcule la matrice $P^{i,j}(k|k)$, les coefficients $\beta^{i,j}(k)$ en utilisant (3.3) et (3.4) et les estimées

$$x^{i,j}(k|k) = x^{i,j}(k|k-1) + P^{i,j}(k|k) [v_j^i(k) + v_2^j(k)] \quad (3.12)$$

5. Calcul de l'estimée globale

On calcule alors l'estimée globale en utilisant (3.5) et (3.6)

4. FILTRE A ASSOCIATION PARALLELE EN AZIMUTH.

On peut réaliser une variante de l'organisation décrite au paragraphe précédent. K.S.Miller et D.M.Leskiw [3] ont montré que dans certaines configurations de cible et pour certaines classes de bruit de mesure, plutôt que de considérer le filtre de Kalman étendu, il valait mieux traiter une coordonnée de mesure après l'autre dans un ordre pré-établi, soit dans l'ordre l'azimuth, le site et la distance. Le filtre retenu permet de diminuer les erreurs de linéarisation. Dans l'exemple choisi, le filtre non-linéaire n'apporte pas d'amélioration par rapport au filtre de Kalman étendu classique, mais permet de traiter l'aspect multisenseur uniquement sur la coordonnée azimuth.

Une itération de l'algorithme se déroule comme suit:

1. Etape de prédiction de l'état

Les équations sont identiques à (3.7) et (3.8)

2. Etape de prédiction de la mesure et validation

On utilise les équations (3.9), (3.10) et (2.5) comme dans l'algorithme précédent

3. Calcul de l'estimée en azimuth.

Cette étape reprend les étapes 3,4 et 5 de l'algorithme décrit au paragraphe précédent en n'utilisant que la coordonnée azimuth de l'ensemble des mesures. On remarque alors que les vecteurs z_i, z_i et les matrices R_i deviennent des scalaires et que les matrices H_i sont des vecteurs.

On obtient une estimée partielle $\hat{x}_a(k|k)$ et sa covariance $P_a(k|k)$

4. Calcul de l'estimée en site.

En exploitant la coordonnée site des mesures validées par le senseur 2, on calcule une nouvelle estimée comme dans le cas mono-senseur en utilisant (2.14).

La covariance associée à cette estimée $\hat{x}_s(k|k)$ est :

$$P_s(k|k) = \beta_2^0(k) P_a(k|k) + [1 - \beta_2^0(k)] P_s^*(k|k) + [\sum_{l=1}^{m_2(k)} \beta_2^l(k) x_{s_2}^l(k|k) x_{s_2}^l(k|k)' - x_s^l(k|k) x_s^l(k|k)'] \quad (4.1)$$

où

$$P_s^*(k|k) = P_a(k|k) - W_s(k) S_s(k) W_s(k)' \quad (4.2)$$

avec $S_s(k)$ la covariance de la mesure en site

$W_s(k)$ le gain de Kalman.

5. Calcul de l'estimée en distance.

On calcule alors l'estimée globale en exploitant la coordonnée **distance**.

Les équations utilisées sont identiques à celles de l'étape précédente.

5. FILTRE A ORGANISATION SEQUENTIELLE.

Dans un but de simplifier l'ensemble des calculs on peut réaliser une estimation séquentielle en utilisant l'ensemble des mesures validées par un senseur après l'autre. L'estimation est faite comme suit:

1. Etape de prediction

Cette étape est identique pour tous les algorithmes. Les formules (3.7) et (3.8) sont utilisées.

2. Etape de validation des mesures par le senseur 1.

On utilise les formules (3.9) et (3.10) avec $i=1$. La validation des mesures s'effectue en utilisant (2.5)

3. Estimation de l'état avec les mesures en provenance du senseur 1.

On calcule une estimée $\hat{x}_1(k|k)$ par (2.15) et sa covariance $P_1(k|k)$ par (4.1).

4. Etape de validation des mesures pour le senseur 2.

A partir des résultats de l'étape précédente on calcule une mesure "prédite" pour le senseur 2 par (3.9) et (3.10) avec $i=2$. La validation des mesures s'effectue en utilisant (2.5).

5. Estimation de l'état avec les mesures en provenance du senseur 2.

A partir des résultats des étapes 3 et 4, on calcule l'estimée globale en utilisant les formules (2.15) et (4.1).

Remarques

Lorsque les senseurs sont asynchrones, il suffit d'introduire une étape de prédiction entre les étapes 3 et 4 identique à l'étape 1.

Lorsque les senseurs sont synchrones, dans le cas pratique il faudra calculer une fenêtre de validation pour le senseur 2 avant de connaître le résultat de la phase 3. Dans ce cas on peut calculer une fenêtre de validation pour le senseur 2 suite à l'étape 1 comme dans le cas d'une organisation parallèle. Toutefois les coefficients de pondérations calculés dans l'étape 5 exploiteront toujours la mesure "prédite" et sa covariance calculée suite à l'estimation réalisée dans l'étape 3.

6. COMPARAISON DES ALGORITHMES.

6.1 Résultats de simulation.

Les bruits de mesure du radar (senseur 1) sont gaussiens à moyenne nulle et écart type de 20 m pour la distance et de 7 mrd pour l'azimuth. Les bruits de mesure du senseur infrarouge (senseur 2) sont gaussiens à moyenne nulle et écart type de 2 mrd pour chaque angle. Les deux senseurs sont supposés être à l'origine des coordonnées.

La cible se déplace dans l'espace et part du point [11996,9747,40] en coordonnée cartésienne. Elle a une vitesse constante de 300 m/s. Sa trajectoire est :

- une route rectiligne entre 0 et 10 s
- une manoeuvre à accélération constante de 30 m/s² entre 11 et 25 s
- une route rectiligne entre 26 et 35 s
- une manoeuvre à accélération constante de 15 m/s² entre 36 et 50 s
- une route rectiligne entre 51 et 60 s, fin de la trajectoire à l'origine des coordonnées.

Les fausses alarmes ont une distribution poissonnienne. L'espérance du nombre de fausses alarmes est de 78 10⁻⁶/m.mrd pour le senseur 1 et de 3,5 10⁻⁴/mrd² pour le senseur 2.

Le modèle du filtre est un modèle de Singer du deuxième ordre. La durée moyenne de manoeuvre (paramètre peu sensible) est prise égale à 10 s. L'incrément d'accélération intervenant dans la matrice Q est de 20 m/s² sur les trois axes cartésiens.

Les résultats sont présentés pour une simulation de type Monte-Carlo de 20 runs.

Le nombre moyen de fausses alarmes par fenêtre de validation est de :

- 0,192 pour le senseur 1 et de 1,14 pour le senseur 2 avec le filtre à organisation parallèle
- 0,185 pour le senseur 1 et de 0,75 pour le senseur 2 avec le filtre à organisation parallèle en azimuth
- 0,18 pour le senseur 1 et de 0,94 pour le senseur 2 avec le filtre à organisation séquentielle

La figure 1 présente la valeur de la racine de l'erreur quadratique obtenue en position pour les trois filtres. La figure 2 est similaire à la précédente pour l'erreur vitesse.

D'une manière générale les résultats que nous avons obtenus sur des trajectoires de ce type ne permettent pas de départager les algorithmes sur le plan de leur performances.

6.2 Comparaison de la complexité des algorithmes.

Nous avons évalué les algorithmes pour l'exemple traité. Le vecteur d'état est d'ordre 9, les vecteurs de mesures sont d'ordre 2. Le nombre d'opérations ainsi que leur nature sont indiqués dans le tableau 1. L'étape de prédiction est une étape commune à tous les algorithmes. F1 correspond à l'estimation faite avec le filtre à organisation parallèle, F2 à l'estimation faite avec le filtre parallèle en azimuth et F3 à l'estimation faite avec le filtre à organisation séquentielle.

En conclusion, pour le type d'exemple traité, le filtre à organisation séquentielle est le plus simple du point de vue temps de calcul et ne dégrade pas les performances de poursuite. De plus il peut facilement s'adapter au cas de senseurs asynchrones, cas le plus souvent rencontré dans la pratique.



BIBLIOGRAPHIE

[1] Y.Bar-Shalom and E.Tse,"Tracking in a Cluttered Environment with Probabilistic Data Association",Proc. 4th Symp. Nonlinear Estimation, San Diego, CA, Sept 1973
 [2] D.Willner,C.B.Chang,K.P.Dunn,"Kalman Filter Algorithms for a Multisensor System",Proc.IEEE Conf. Decision and Control,Clearwater Beach,FL,Dec. 1976
 [3] K.S.Miller and D.M.Leskiw,"Nonlinear Estimation With Radar Observations",IEEEon Aero.and Electr.Systems,AES-18, March 1982
 [4] K.C.CHANG,C.Y.Chong,Y.Bar-Shalom,"Joint Probabilistic Data Association in Distributed Sensor Networks",Proc.1985 American Control Conf.,Boston, MA,June 1985

ANNEXE. Calcul du coefficient de pondération

Après quelques calculs on trouve:

$$\beta^{j,l}(k) = \frac{1}{c_1} P\{\theta_1^j(k), Z_1^k\} P\{\theta_2^l(k), Z_2^k\}$$

$$\int \frac{p[x(k)|\theta_1^j(k), Z_1^k] p[x(k)|\theta_2^l(k), Z_2^k]}{p[x(k)|Z_1^{k-1}, Z_2^{k-1}]} dx(k)$$

$$= \frac{1}{c_2} P\{\theta_1^j(k)|Z_1^k\} P\{\theta_2^l(k)|Z_2^k\} \gamma\{\theta_1^j(k), \theta_2^l(k)\}$$

$$= \frac{1}{c_2} \beta_1^j(k) \beta_2^l(k) \gamma\{\theta_1^j(k), \theta_2^l(k)\}$$

où c, c₁, c₂ sont des constantes de normalisation.

$$\gamma\{\theta_1^j(k), \theta_2^l(k)\} = \frac{[\det P(k|k-1)]^{1/2} [\det P^{j,l}(k|k)]^{1/2}}{[\det P_1^j(k|k)]^{1/2} [\det P_2^l(k|k)]^{1/2}}$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1(k|k) \\ x_2(k|k) \end{bmatrix} P_1^j(k|k)^{-1} \begin{bmatrix} x_1(k|k) \\ x_2(k|k) \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1(k|k) \\ x_2(k|k) \end{bmatrix} P_2^l(k|k)^{-1} \begin{bmatrix} x_1(k|k) \\ x_2(k|k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(k|k) \\ x_2(k|k) \end{bmatrix} P^{j,l}(k|k)^{-1} \begin{bmatrix} x_1(k|k) \\ x_2(k|k) \end{bmatrix}\right)$$

Sachant que la somme de tous les coefficients de pondération doit être égale à l'unité, on peut supprimer le calcul des déterminants. Après quelques calculs, le terme sous l'exponentielle se simplifie par l'introduction des innovations et pseudo-innovations. On obtient alors :

$$\beta^{j,l}(k) = \begin{cases} \beta_1^j(k) \beta_2^l(k) & \text{pour } j,l=0 \\ (1-b_1)(1-b_2) \frac{\beta_1^j(k) \beta_2^l(k) e_{j,l}}{m_1(k) m_2(k)} & \text{pour } j,l \neq 0 \\ \sum_{n_1=1}^{n_1} \sum_{n_2=1}^{n_2} \beta_1^{j,n_1}(k) \beta_2^{l,n_2}(k) e_{n_1,n_2} & \end{cases}$$

où

$$e_{j,l} = \exp\left(-\frac{1}{2} \{v_1^j(k)' R_1^{-1} v_1^j(k) + v_2^l(k)' R_2^{-1} v_2^l(k) - v^{j,l}(k)' P^{j,l}(k|k) v^{j,l}(k)\}\right)$$

avec $v^{j,l}(k) = H_1(k) R_1^{-1} v_1^j(k) + H_2(k) R_2^{-1} v_2^l(k)$

Les autres termes ont été définis dans le cas monosenseur dans les équations (2.11) à (2.14).

opération	pred.	F1	F2	F3
+	339	681	642	640
		33 k1	6 k1	13 k1
		33 k2	6 k2	13 k2
		148 k1 k2	63 k1 k2	
*	588	1318	1068	1274
		37 k1	22 k1	16 k1
		37 k2	22 k2	16 k2
		192 k1 k2	103 k1 k2	
√	2	2	4	7
Arctg	2		1	2
Exp		k1+k2	2k1+2k2	k1+k2
		+k1 k2	+k1 k2	

Tableau 1 Nombre d'opération par algorithme

