DETECTION OPTIMALE DANS LE PLAN TEMPS-FREQUENCE

Patrick Flandrin

Laboratoire de Traitement du Signal (UA 346 CNRS)
ICPI 25 rue du Plat 69288 Lyon Cedex 02
et GRECO 69 CNRS SARTA

Résumé

On considère le problème classique de la détection d'un signal gaussien non-stationnaire dans un bruit blanc gaussien stationnaire et on montre que le récepteur localement optimal associé admet une formulation particulièrement simple dans le plan temps-fréquence si l'on utilise la distribution de Wigner-Ville. Ceci permet de concilier les avantages de l'optimalité avec ceux d'une interprétation physique intuitive en termes de corrélation de structures temps-fréquence.

Summary

The classical problem of detecting a non-stationary Gaussian signal in stationary Gaussian white noise is addressed, and it is shown that the corresponding locally optimum receiver admits a straightforward time-frequency formulation if we make use of the Wigner-Ville distribution. This allows to match optimality with an intuitive and physically meaningful interpretation in terms of correlations in the time-frequency plane.

1. Introduction

Lorsque l'on s'intéresse à la détection d'un signal non-stationnaire (comme ce peut être le cas en radar, sonar,...), l'intuition suggère de construire des récepteurs utilisant explicitement le caractère non-stationnaire du signal à détecter, par exemple en réalisant des corrélations de structures dans le plan temps-fréquence. Cette approche se heurte à deux difficultés : la première est de choisir une représentation temps-fréquence décrivant de manière satisfaisante les "structures" à corréler ; la deuxième est d'assurer à de telles procédures l'équivalence avec les solutions optimales classiques. Ainsi, on trouvera dans [12] une formulation temps-fréquence optimale, mais travaillant sur une représentation (la distribution de Rihaczek) physiquement peu satisfaisante. A l'inverse, l'utilisation dans [1] de représentations d'interprétation physique facile (les spectrogrammes) conduit à une formulation sous-optimale. Ce n'est qu'après avoir réalisé l'importance tenue en analyse temps-fréquence par la distribution de Wigner-Ville (DWV) [6] [11] que des solutions conciliant les avantages de l'interprétation et de l'optimalité ont pu être proposées [13-14].
L'intérêt d'une telle formulation est surtout dû à l'interprétation nouvelle qu'elle permet de récepteurs traditionnels, fournissant en particulier une alternative d'implantation aux récepteurs optimaux dans des domaines où la formulation classique est inadaptée [2-3] [10].

On se propose dans cet article de donner un cadre théorique cohérent et unifié aux procédures de détection optimale dans le plan temps-fréquence. Les résultats présentés englobent et étendent des travaux antérieurs [3] [8-10] [13].

2. Problème

On considère le problème de détection binaire :

$$\left.\begin{aligned} H_0 &: r(t) = b(t) \\ H_1 &: r(t) = b(t) + x(t) \end{aligned}\right\} t \in (T)$$

dans lequel $r(t)$ est l'observation connue sur le support temporel (T), $x(t)$ le signal (supposé gaussien centré et non-stationnaire de covariance $r_x(t, t')$) à détecter et $b(t)$ un bruit additif supposé lui aussi gaussien et centré mais stationnaire de densité spectrale de puissance N_0.

3. Solution classique

La solution classique du problème posé, telle qu'on peut la trouver par exemple dans [16], repose sur la décomposition de Karhunen-Loève de $x(t)$. Si l'on appelle λ_n et $\phi_n(t)$ les valeurs propres et fonctions propres de la covariance $r_x(t, t')$ satisfaisant à l'équation :

$$\int_{(T)} r_x(t, t')\, \phi_n(t')\, dt' = \lambda_n\, \phi_n(t) \; ; \; t \in (T)$$

on peut en effet décomposer x(t) selon :

(1) $x(t) = \sum_n x_n \phi_n(t)$

La décomposition (de Karhunen-Loève) ainsi obtenue a l'avantage d'être doublement orthogonale en ce sens que :

$$E\left[x_n x_m^*\right] = \lambda_n \delta_{nm}$$

et :

$$\int_{(T)} \phi_n(t) \phi_m^*(t)\, dt = \delta_{nm}$$

Le récepteur optimal (au sens du maximum de vraisemblance) revient alors simplement à comparer la quantité :

(2) $$L = \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n + N_0} \left| \int_{(T)} r(t) \phi_n^*(t)\, dt \right|^2$$

à un seuil, et à choisir H_1 (resp. H_0) lorsque cette quantité est supérieure (resp. inférieure) à ce seuil.

4. Formulation temps-fréquence

Puisque le récepteur optimal utilise essentiellement les projections de l'observation sur les fonctions propres de la covariance (par l'intermédiaire d'une somme pondérée de leurs modules carrés), une formulation temps-fréquence est possible pour toutes les représentations temps-fréquence assurant une équivalence entre les produits scalaires dans le domaine temporel et dans le plan temps-fréquence. C'est en particulier le cas de la distribution de Wigner-Ville (DWV) [6] [11] :

$$W_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi\nu\tau}\, d\tau.$$

pour laquelle cette équivalence porte le nom de "formule de Moyal" [6] et s'écrit :

(3) $$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t)\, dt \right|^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \nu) W_y(t, \nu)\, dt\, d\nu$$

C'est en fait aussi le cas de toutes les représentations de la forme :

(4) $$C_x(t, \nu : \Pi) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t - t', \nu - \nu') W_x(t', \nu')\, dt'\, d\nu'$$

caractérisées par une fonction $\Pi(t, \nu)$ dont la transformée de Fourier bidimensionnelle est unimodulaire [8]. On se restreindra cependant à la seule DWV pour l'ensemble de ses autres bonnes propriétés [11]. On notera en outre que les spectrogrammes n'entrent pas dans la catégorie concernée, ce qui justifie la nécessité de déconvolution lorsqu'on veut les utiliser à des fins de détection optimale [1]. Utilisant alors (3) et le fait que la DWV conserve les supports temporels, (2) peut s'écrire [3] :

(5) $$L = \iint_{(T)} W_r(t, \nu) \left[\sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n + N_0} W_{\phi_n}(t, \nu) \right] dt\, d\nu$$

Le récepteur optimal possède donc une structure de corrélation temps-fréquence comparant la DWV de l'observation à une référence fournie par une somme pondérée des DWV des fonctions propres de la covariance.

5. Récepteur localement optimal

Si l'on suppose maintenant que le rapport signal/bruit est faible, on est conduit à la notion de récepteur localement optimal [4] (pouvant naturellement être sous-optimal à fort rapport signal/bruit, situation pour laquelle cependant la notion d'optimalité est moins critique). La formulation temps-fréquence du récepteur localement optimal prend alors une forme particulièrement simple. En effet, l'hypothèse de faible rapport signal/bruit peut s'écrire [16] :

$$\lambda_{max} \ll N_0$$

si λ_{max} est la plus grande des valeurs propres de la covariance du signal x(t) et, par suite, (5) admet comme terme prépondérant de son développement en puissances de λ_n/N_0 la quantité :

(6) $$L_1 = \frac{1}{N_0} \iint_{(T)} W_r(t, \nu)\, E[W_x(t, \nu)]\, dt\, d\nu$$

Ceci provient de la double orthogonalité du développement (1), assurant que [7] :

$$\sum_n \lambda_n W_{\phi_n}(t, \nu) = E[W_x(t, \nu)]$$

Le récepteur localement optimal est donc celui qui corrèle dans le plan temps-fréquence la DWV de l'observation avec une référence qui n'est autre que le spectre de Wigner-Ville [15] du signal à détecter, fournissant ainsi un support théorique à ce que l'intuition suggérait. Ce résultat fondamental recèle en outre une grande richesse d'interprétation et peut être illustré sur deux exemples typiques.

5.1. Exemple 1 : gigue en temps et fréquence

On supose que le signal $x(t)$ à détecter est en fait un signal certain $x_0(t)$ rendu aléatoire par deux phénomènes distincts :

- il est connu à une phase pure près ϕ, équipartie sur $[-\pi, +\pi]$;
- il est affecté d'une gigue en temps et fréquence.

On a donc le modèle :

$$x(t) = \left[x_0(t-t')\, e^{i2\pi\nu' t}\right] e^{i\phi}$$

où t' et ν' sont deux variables aléatoires de densité de probabilité conjointe $\Pi(t', \nu')$.

En utilisant la compatibilité de la DWV vis-à-vis des translations dans le plan temps-fréquence, on obtient :

$$W_x(t, \nu) = W_{x_0}(t-t', \nu-\nu')$$

et, par suite :

$$E[W_x(t, \nu)] = C_{x_0}(t, \nu : \Pi)$$

Le récepteur localement optimal correspondant possède alors la structure :

$$L_1 = \frac{1}{N_0} \iint_{(T)} W_r(t, \nu)\, C_{x_0}(t, \nu : \Pi)\, dt\, d\nu$$

Un des intérêts de ce résultat est de permettre une interprétation simple des récepteurs temps-fréquence envisageables, basés sur la DWV. En effet, pour des raisons pratiques d'estimation et de visualisation [15], on est généralement amené à travailler, non sur la DWV $W_r(t, \nu)$ de l'observation, mais sur une version convenablement lissée $C_r(t, \nu ; \Pi)$ de celle-ci. D'après (4), il suffit que $\Pi(t, \nu)$ soit une fonction symétrique pour que l'on puisse écrire :

$$(7) \qquad L_1 = \frac{1}{N_0} \iint_{(T)} C_r(t, \nu ; \Pi)\, W_{x_0}(t, \nu)\, dt\, d\nu$$

On voit donc qu'il y a équivalence, au point de vue de la structure du récepteur, entre utiliser une DWV non lissée de l'observation pour détecter un signal dont la localisation temps-fréquence n'est connue qu'à un retard et un décalage fréquentiel aléatoires près, ou utiliser une DWV lissée de l'observation pour détecter un signal de structure temps-fréquence parfaitement connue. La même fonction $\Pi(t', \nu')$ s'interprète dans le premier cas comme une densité de probabilité propre au signal (incertitude a priori) et dans le deuxième cas comme un lissage propre au traitement (flou a posteriori).

Dans la seconde interprétation, pour laquelle le choix du lissage est d'une certaine manière arbitraire, l'intérêt de la formulation (7) est de fournir une classe générale de récepteurs, intermédiaires entre des cas limites conventionnels. Ces cas limites sont résumés dans le tableau I, regroupant, pour différents lissages, les récepteurs associés.

$\Pi(t, \nu)$	L_1
$\delta(t)\,\delta(\nu)$	$\left\lvert \int_{(T)} r(t)\, x_0^*(t)\, dt \right\rvert^2$
$\delta(t)$	$\int_{(T)} \lvert r(t)\rvert^2 \lvert x_0(t)\rvert^2\, dt$
$\delta(\nu)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert R(\nu)\rvert^2 \lvert X_0(\nu)\rvert^2\, d\nu$
1	$\int_{(T)} \lvert r(t)\rvert^2\, dt \int_{(T)} \lvert x_0(t)\rvert^2\, dt$

Tableau I

On constate que la structure générale (7) permet, en augmentant le degré de lissage, de passer d'un récepteur semi-cohérent (corrélateur ou filtre adapté, suivi d'une détection d'enveloppe) à un récepteur parfaitement incohérent (détection purement énergétique), en passant par des corrélateurs de puissance instantanée ou de densité spectrale énergétique. Pour un lissage quelconque, le récepteur associé se situe entre ces cas limites, tout en satisfaisant, par la formulation unique (7), à une interprétation physique satisfaisante de corrélation temps-fréquence. Ceci est particulièrement apparent si l'on considère des signaux modulés en amplitude et en fréquence (tels qu'on peut les rencontrer en radar, sonar ou contrôle non-destructif) pour lesquels on a :

$$(8) \qquad W_{x_0}(t, \nu) \approx a_0^2(t)\, \delta(\nu - \nu_0(t))$$

Portant (8) dans (7), on obtient simplement :

$$L_1 \approx \int_{(T)} a_0^2(t)\, C_r(t, \nu_0(t) ; \Pi)\, dt$$

Dans ce cas, la double intégration de la corrélation temps-fréquence se trouve réduite à une simple intégration sur la loi de fréquence instantanée "épaissie" par la fonction de lissage. Deux exemples de la mise en oeuvre d'une telle procédure peuvent être trouvés dans [13] et [8].

5.2. Exemple 2 : signature temps-fréquence

On suppose maintenant que le signal à détecter x(t) est connu par N réalisations indépendantes $x_1(t)...x_N(t)$. Le spectre de Wigner-Ville apparaissant dans (6) peut alors être estimé par la quantité moyennée :

$$\overline{W_x}(t,\nu) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} W_{x_n}(t,\nu) \tag{9}$$

La procédure de détection consiste ainsi à comparer la corrélation :

$$\iint_{(T)} W_r(t,\nu)\, \overline{W_x}(t,\nu)\, dt\, d\nu$$

à un seuil, dépendant naturellement de la dispersion de l'estimée (9). On trouvera dans [5] un exemple d'application de cette approche à un problème de détection passive de défauts, la référence (9) étant construite par apprentissage sur des situations sans défauts.

6. Conclusion

Les résultats qui ont été présentés montrent qu'il est possible de donner une formulation temps-fréquence à des problèmes classiques de détection. Ceci présente l'avantage de concilier l'optimalité théorique avec l'interprétation physique intuitive, puisque les récepteurs envisagés sont du type corrélation de structures temps-fréquence. L'outil de base sur lequel repose cette approche est une fois de plus la transformation de Wigner-Ville, renforçant ainsi l'importance qu'on lui connaissait dans des problèmes d'analyse ou de synthèse de signaux par des dispositions naturelles à aborder des problèmes de décision (détection, estimation, classification).

7. Références

[1] R.A. Altes, "Detection, Estimation and Classification with Spectrograms", J. Acoust. Soc. Am., **67** (4), pp. 1232-1246, 1980.

[2] R.A. Altes, "Echolocation as seen from the Viewpoint of Radar/Sonar Theory", in : Localization and Orientation in Biology and Engineering (D. Varjù, H.U. Schnitzler, eds.), pp. 234-244, Springer, Berlin, 1984.

[3] R.A. Altes, "Some Theoretical Concepts for Echolocation", NATO ASI on Animal Sonar Systems, Helsingør, 1986.

[4] J. Capon, "On the Asymptotic Efficiency of Locally Optimum Detectors", IRE Trans. on IT, **IT-7**, pp. 67-71, 1961.

[5] M. Chiollaz, P. Flandrin, N. Gache, "Utilisation de la Représentation de Wigner-Ville comme Outil de Diagnostic des Défauts de Fonctionnement des Moteurs Thermiques", 11ème Coll. GRETSI, Nice, 1987.

[6] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbraüker, "The Wigner Distribution. A Tool for Time-Frequency Signal Analysis", Philips J. Res., **35** (3), pp. 217-250, 1980.

[7] P. Flandrin, "Représentations des Signaux dans le Plan Temps-Fréquence", Thèse Doct. Ing., INPG, Grenoble, 1982.

[8] P. Flandrin, "On Detection-Estimation Procedures in the Time-Frequency Plane", IEEE ICASSP-86, pp. 2331-2334, Tokyo, 1986.

[9] P. Flandrin, "Time-Frequency Interpretation of Matched Filtering", IEEE WASSP-86, pp. 287-290, Pékin, 1986.

[10] P. Flandrin, "Time-Frequency Processing of Bat Sonar Signals", NATO ASI on Animal Sonar Systems, Helsingør, 1986.

[11] P. Flandrin, B. Escudié, "Principe et Mise en Oeuvre de l'Analyse Temps-Fréquence par Transformation de Wigner-Ville", Traitement du Signal, **2** (2), pp. 143-151, 1985.

[12] M.D. Flaska, "Cross-Correlation of Short-Time Spectral Histories", J. Acoust. Soc. Am., **59** (2), pp. 381-388, 1976.

[13] S. Kay, G.F. Boudreaux-Bartels, "On the Optimality of the Wigner Distribution for Detection", IEEE ICASSP-85, pp. 1017-1020, Tampa (FL), 1985.

[14] B.V.K.V. Kumar, C.W. Carroll, "Performance of Wigner Distribution Function Based Detection Methods", Opt. Eng., **23** (6), pp. 732-737, 1984.

[15] W. Martin, P. Flandrin, "Wigner-Ville Spectral Analysis of Non-stationary Processes", IEEE Trans. on ASSP, **ASSP-33** (6), pp. 1461-1470, 1985.

[16] H.L. Van Trees, Detection, Estimation and Modulation Theory, J. Wiley and Sons, New-York, 1971.