QUANTIFICATION VECTORIELLE OPTIMALE POUR LA DETECTION

B. PICINBONO et P. DUVAUT

L2S*, ESE, Plateau du Moulon, 91190, Gif sur Yvette, France

Résumé. La quantification vectorielle revient à diviser l'espace d'observation en domaines disjoints dont le nombre q est donné a priori. A chacun de ces domaines on associe une valeur numérique et le problème consiste donc à trouver les valeurs et les frontières des domaines de sorte que soit rendu maximum un critère d'efficacité de détection.

Dans la première partie on utilise le critère de déflexion introduit depuis longtemps dans les problèmes de détection. Pour calculer la quantification optimale on montre d'abord comment calculer les valeurs optimales pour une partition donnée de l'espace d'observation. On déduit dans un second temps la partition optimale et on montre qu'elle correspond à une quantification du rapport de vraisemblance.

Dans la seconde partie on reprend le problème dans le cadre de la théorie statistique de la détection. On montre alors que les valeurs optimales sont celles trouvées à partir du critère de deflexion. Par contre la partition optimale de l'espace d'observation est un problème plus complexe n'ayant pas de solution générale et ceci est discuté en détails.

Abstract. Vectorial quantization consists in a division of the observation space in distinct domains the number of which is a priori given. To each of these domains is associated a numerical value and the problem is to find the values and the boudaries of the domains in order to optimize a detection criterion.

In the first part the deflection criterion introduced long time ago in detection problems is used. In order to calculate the optimal quantization it is first showed how it is possible to calculate the optimal values for a given partition of the observation space. Afterwards the optimum partition is calculated and it is shown that this partition is deduced from a quantization of the likelihood ratio.

In the second part the problem is studied in the framework of the statistical decision theory. The optimal values are the same that those obtained with the deflection criterion. On the other hand the optimal partition of the observation space is a more complex problem without general solution and this point is discussed in details.

1.INTRODUCTION

La quantification est une opération couramment utilisée en traitement du signal ayant en principe pour but de transformer un signal à valeurs continues en un autre à valeurs discrètes. Elle est dite instantanée ou scalaire ou sans mémoire si le quantificateur Q associe à un signal x(t) à valeurs continues un autre signal y(t) = Q[x(t)] à valeurs discrètes, y(t) ne dépendant que de la valeur de x à l'instant t. Dans beaucoup de problèmes il est préférable d'utiliser une quantification avec mémoire, ce qui conduit au concept de **quantification vectorielle.** Considérons un vecteur observation **x** de dimension n dont les composantes sont, par exemple, les valeurs d'un signal à temps discret x[k] à n instants arbitraires ou également n valeurs de sa transformée de Fourier. Le vecteur **x** est un élément de R^n, espace d'observation. La quantification vectorielle consiste à diviser R^n en q domaines disjoints Δ_i et à associer à chacun de ces domaines Δ_i une valeur v_i bien définie. L'information contenue dans **x** est donc réduite à q valeurs, ce qui peut être très avantageux lorsque l'on veut par exemple faire un traitement numérique sur le vecteur **x** ou le transmettre d'un point à un autre. La quantification vectorielle peut évidemment s'opérer par une quantification scalaire sur chacune des composantes. Dans le cas où n = 2 ceci revient à diviser le plan en domaines rectangulaires et par extension on parlera de **quantification rectangulaire** dans le cas général. En particulier la quantification scalaire d'un signal conduit à une quantification rectangulaire lorsque l'on considère un vecteur observation issu de ce signal.

On peut enfin noter qu'il existe des situations mixtes ou l'on mélange quantifications vectorielle et rectangulaire. Supposons que l'observation provienne de n capteurs distincts et que le vecteur observation soit composé de l'ensemble des vecteurs observations provenant des n capteurs. Il est alors possible de faire une quantification vectorielle au niveau de chaque capteur et rectangulaire lorsque l'on réunit les informations de tous les capteurs. Il y a donc une très grande généralité de situations possibles, mais la quantification vectorielle est la plus générale et c'est donc elle qui est étudiée dans la suite.

Il résulte de ces considérations que la quantification vectorielle est complètement définie par la donnée des domaines Δ_i et des valeurs associées v_i.

On peut alors se poser divers problèmes d'optimisation selon le traitement que l'on désire faire à partir du vecteur **x**. Dans cet exposé nous nous intéressons particulièrement au problème de base de la détection d'un signal dans un bruit, qui se réduit en principe au choix optimal entre deux hypothèses H_0 (bruit seul) ou H_1 (signal plus bruit). Les problèmes de détection optimale en présence de quantification ont déjà été abordés par certains auteurs (voir références [1] à [5]), mais toujours avec des hypothèses très restrictives que nous nous proposons d'abandonner. En particulier ces travaux utilisent toujours la quantification rectangulaire, admettent que les composantes du vecteur observation sont des variables aléatoires indépendantes et se limitent à l'usage d'un critère d'efficacité asymptotique. Dans la suite nous nous proposons de résoudre le problème sans ces restrictions et d'étudier la quantification optimale soit au sens du critère de déflexion soit en utilisant la théorie statistique de la détection.

2. QUANTIFICATION OPTIMALE POUR LE CRITERE DE DEFLEXION

Considérons un vecteur observation **x** et soit $p_0(\mathbf{x})$ et $p_1(\mathbf{x})$ ses densités de probabilité sous les deux hypothèses possibles H_0 et H_1.Considérons aussi un système quelconque associant à ce vecteur **x** une sortie scalaire S(**x**). La déflexion associée à ce système est définie par

$$D(S) = [E_1(S) - E_0(S)]^2 \;/\; V_0(S) \quad , \quad (1)$$

où E_0 et E_1 sont les espérances mathématiques respectivement sous H_0 et H_1, tandis que V_0 est la variance sous H_0. La déflexion est parfois appelée rapport signal sur bruit à la sortie du système S et a été étudiée depuis longtemps par de nombreux auteurs {[6] à [10]}. Considérons maintenant le cas d'un quantificateur vectoriel défini par

$$Q(\mathbf{x}) = v_i \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{x} \in \Delta_i \; . \qquad (2)$$

Pour simplifier les notations on appellera **v** et Δ l'ensemble des v_i et des Δ_i. Posant alors

$$p(i) = \Pr[\mathbf{x} \in \Delta_i] \; , \qquad (3)$$

où ces probabilités peuvent se calculer aussi bien sous H_0 que sous H_1 et sont alors notées p_0 ou p_1, on obtient alors la valeur de la deflexion associée au quantificateur Q par l'expression $D(\Delta,\mathbf{v}) = N/D$, où N et D valent

$$N = \{\sum v_i \;\; [p_1(i) - p_0(i)]^2 , 1 \le i \le q \qquad (4)$$

$$D = \sum (v_i)^2 \; p_0(i) - [\sum v_i \, p_0(i)]^2 . \qquad (5)$$

Le problème consiste donc maintenant à trouver la partition et les valeurs optimales rendant maximum la deflexion définie par (4) et (5).

Il n'est pas possible dans ce court exposé de donner tous les détails du calcul développés dans [11]. On se limite donc aux principes généraux et au résultat obtenu.

On commence d'abord à supposer que la partition définie par Δ est donnée et on cherche les valeurs v_i qui rendent D maximum. Ce problème se résoud aisément car il n'est que la forme discrétisée du problème de la maximisation de la déflexion résolu dans le cas continu [12][13]. On sait alors que le filtre donnant la déflexion maximum est le rapport de vraisemblance L (**x**). En conséquence les valeurs v_i rendant D maximum dans notre cas discret sont

$$v_i = p_1(i) \;/\; p_0(i) \; . \qquad (6)$$

La déflexion associée à ces valeurs est alors égale à

$$D(\Delta) = l(\Delta) - 1, \qquad (7)$$

où $l(\Delta)$ vaut

$$l(\Delta) = \Sigma \{[p_1(i)]^2 \; [p_0(i)]^{-1} \}. \qquad (8)$$

Cette quantité dépend évidemment de la partition Δ et on est donc maintenant conduit à calculer la partition Δ^* optimale rendant $l(\Delta)$ maximum. C'est ce calcul qui est le plus compliqué et dont nous ne donnerons que le principe général.

On commence d'abord par résoudre le problème pour le cas particulier où q = 2. Dans ce cas on constate que le problème de la quantification optimale a une grande analogie avec celui de la détection optimale puisque l'espace d'observation est divisée simplement en deux domaines disjoints. Posant alors $\alpha = p_0(1)$ et $\beta = p_1(1)$, on trouve que la déflexion maximum définie par (6), (7) et (8), prend la forme

$$D = (\beta - \alpha)^2 \;/\; \alpha\,(1 - \alpha) \; . \qquad (9)$$

On voit alors que lorsque $\beta > \alpha$, ce que l'on peut toujours admettre au besoin en changeant les numéros des domaines et lorsque α est fixé, D est maximum si β est aussi maximum. Or ceci est exactement la formulation de Neyman-Pearson des problèmes de détection et la partition de l'espace d'observation se fait alors grâce au rapport de vraisemblance L (**x**). Cette procédure se généralise lorsque q>2 et conduit alors au concept de **quantification par rapport de vraisemblance (RDV).** Une telle quantification est définie de la manière suivante. Soit q − 1 nombres réels a_i tels que $a_0 = -\infty$ et $a_1 = +\infty$. Introduisons alors les domaines Δ_i de R^n définis par

$$\Delta_i = \{ x \mid a_{i-1} < L(x) \leq a_i \} . \qquad (10)$$

On dit alors que la partition de R^n est une partition par le rapport de vraisemblance définie par les nombres a_i qui peuvent être considérées comme les composantes du vecteur **a** qui possède donc $q-1$ composantes finies. On appelle alors **quantification par rapport de vraisemblance** définie par le vecteur **a** une partition de R^n définie par (10), les valeurs associées aux domaines Δ_i étant données par (6). La déflexion devient alors une fonction uniquement du vecteur **a**.

En généralisant ce qui a été fait pour q = 2, on montre alors que la quantification optimale pour le critère de déflexion est une quantification par R D V , le vecteur **a** étant obtenu en cherchant le maximum de l(D) défini par (8).

Ce dernier problème ne peut être résolu de manière générale sans spécifier la nature des lois de probabilté du vecteur **x** sous H_0 et sous H_1. Des exemples correspondant à la détection d'un signal déterministe dans un bruit gaussien sont examinés dans [11].

On peut toutefois faire quelques commentaires sur le résultat obtenu.

Il est tout d'abord évident que la quantification optimale pour le critère de déflexion n'est pas en général une quantification rectangulaire. En effet les surfaces de séparation entre les domaines sont telles que L (**x**) est constant et n'ont donc aucune raison d'être des frontières de pavés de R^n. On peut également noter que si q est grand et si les valeurs des a_i apparaissant dans (10) sont proches, la quantification optimale pour la déflexion réalise en fait une **approximation du rapport de vraisemblance.** En effet la valeur associée au domaine D_i défini par (10) est donnée par (6) qui est égale à une valeur de L(**x**) proche de a_i. Ce résultat n'est pas surprenant puisque l'on sait que L(**x**) est le filtre rendant maximum la déflexion [12]-[13].

Il est important au terme de ce paragraphe de bien comprendre la nature de ce résultat en comparaison avec la quantification rectangulaire utilisée dans d'autre approches.Il est clair que la procédure de quantification par R D V nécessite qu'un système calcule L (**x**) au préalable. Pour ce calcul il faut utiliser un vecteur **x** non quantifié, ou pour le moins numérisé avec une très bonne approximation. Le principe de la quantification rectangulaire consiste au contraire à quantifier **x** avant tout autre calcul et en agissant uniquement sur les composantes de ce vecteur. Cela peut répondre à un impératif technologique mais fait en général perdre l'optimalité au sens de la déflexion.

3. QUANTIFICATION OPTIMALE ET THEORIE STATISTIQUE DE LA DETECTION

Si le but ultime de la détection d'un signal dans un bruit consiste à décider de manière optimale entre deux hypothèses, il est clair que le problème n'est pas résolu par la recherche de la déflexion maximum. Il faut finalement que le système comporte une **règle de décision** symbolisée par exemple par un seuil situé à la sortie et fixant en particulier la probabilité de fausse alarme (P F A). Il est alors bien connu dans la théorie de Neyman-Pearson que le système qui pour une PFA arbitraire donne la probabilité de détection maximum calcule le RDV et le compare à un seuil. Les performances d'un système à seuil sont caractérisées par la courbe caractéristique opérationnelle de réception (COR) donnant la probabilité de détection β en fonction de la PFA α.

Reprenons les mêmes idées en présence de quantification vectorielle. La partition de l'espace d'observation étant réalisée il ne reste plus qu'à associer des valeurs v_i à chacun de ces domaines. Supposons que ces valeurs soient classées dans un ordre décroissant ($v_i > v_{i+1}$) et soit $p_0(j)$ et $p_1(j)$ les probabilités associées au domaine Δ_j respectivement sous H_0 et sous H_1. Considérons alors un seuil s compris entre v_i et v_{i+1} . Il est clair que la PFA $\pi_a(i)$ liée à ce seuil est

$$\pi_a(i) = p_0(1) + p_0(2) + \cdots + p_0(i) , \qquad (11)$$

et la probabilité de détection $\pi_d(i)$ s'obtient par une formule similaire en remplaçant les p_0 par p_1.On voit que la courbe COR se compose de $q-1$ points de coordonnées $[\pi_a(i), \pi_d(i)]$, $1 \leq i \leq q-1$. De plus ces points ont des coordonnées croissantes si aucune des probabilités p n'est nulle.

Pour obtenir une véritable courbe COR il est d'usage de relier tous ces points par des segments de droites, ce qui s'interprête aisément en terme de stratégie aléatoire (randomized strategy) , [14] p. 41. On obtient alors une courbe continue représentant q_d en fonction de q_a.

Il est important de noter que cette courbe est **indépendante des valeurs de départ v_i** à condition que leur ordre soit conservé. Ceci est une manifestation de l'invariance des courbes COR par transformation monotone [13] et il en résulte que la quantification pour la théorie statistique de la décision se réduit donc à une partition de l'espace d'observation en q domaines. On fixe alors les probabilités p(i) sous H_0 et H_1 et une relation d'ordre entre ces domaines.

A partir de ces remarques il est possible de reprendre le problème de la quantification optimale .On commence d'abord par supposer que les domaines Δ_i sont donnés.Comme il y a q tels domaines, il y a q! manières différentes de les ordonner, et il y a donc q! courbes COR distinctes. Toutefois, il en existe une qui est au dessus de toutes les autres et doit donc être considérée comme la courbe optimale.

Pour la déterminer, on associe à chaque domaine Δ_i la valeur

$$l(i)=p_1(i)/p_0(i) \quad , \quad 1 \leq i \leq q \quad . \qquad (12)$$

Il est alors facile de voir que les domaines Δ_i doivent être numérotés dans l'ordre qui correspond à

$$l(1) > l(2) > \ldots\ldots\ldots > l(q) \quad . \qquad (13)$$

La propriété est évidente pour q=2, et se généralise sans peine ensuite. On peut aussi noter que la concavité de la courbe COR définie par (13) est toujours négative et que tout autre ordre que (13) aurait donné une concavité n'ayant pas un signe constant. L'ordre (13) est en particuler garanti si on prend des v_i décroissants et tels que (6) est satisfait, tout en notant qu'à la différence du critère de déflexion, seul , ici, l'ordre des v_i compte et non leur valeur exacte. Quoi qu'il en soit, il importe de noter que lorsque les domaines Δ_i sont fixés le critère de déflexion et la théorie statistique conduisent au même résultat.

La recherche de la partition optimale de l'espace d'observation est par contre beaucoup plus compliquée que dans le cas de l'optimisation de la déflexion. Pour le voir il convient tout d'abord d'étudier le cas particulier de la quantification par rapport de vraisemblance définie par (10). Soit C la courbe COR correspondant à la stratégie optimale donnant la probabilité de détection β en fonction de la probabilité de fausse alarme du récepteur

$$L(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} s \qquad (14)$$

En raison de son optimalité, aucune courbe COR de récepteur ne peut croiser cette courbe. Toutefois, il est clair que les q – 1 points P_i associés à (10) sont tous sur C. En conséquence, la courbe COR liée à la quantification par rapport de vraisemblance est formée de segments de droite joignant les points situés sur C.

On peut dire que cette quantification est optimale en ces points. Par contre il est évident que d'autres quantifications peuvent donner de meilleures performances pour d'autres valeurs de la PFA. Ceci signifie que la meilleure quantification en théorie statistique n'a pas de solution générale.

Par contre il est clair que si on se fixe une PFA, alors la quantification avec rapport de vraisemblance donne la meilleure probabilité de détection.

On peut d'ailleurs noter que dès que q est assez élevé la quantification par RDV donne une courbe COR qui est une approximation par des segments de droite de la courbe C qui donne l'optimum absolu.

REFERENCES

[1] S.A. KASSAM, " Optimum quantization for signal detection" IEEE Trans. Comm. 25, pp. 479-484, 1977.

[2] H.POOR and J.THOMAS, "Optimum quantization for local decision based on independant samples" J. Franklin Inst. 303 pp. 549-561, 1977.

[3] H.POOR and D. ALEXANDROU, "A general relationship between two quantizers design criteria" IEEE Trans. Inf. Theory, 26, pp. 210-212, 1980.

[4] D. ALEXANDROU an H. POOR, "The analysis and design of data quantization schemes for stochastic signal detection systems" IEEE Trans. Comm. 28, pp.983-991, 1980.

[5] B. AAZHANG and H. POOR, " On optimum and nearly optimum data quantization for signal detection" IEEE Trans. Comm. 32, pp. 745-751, 1984.

[6] W.A. GARDNER, " A unifying view of second order measures of quality for signal classification" IEEE Trans. Comm. 28, pp.807-816, 1980.

[7] J. LAWSON and G. UHLENBECK, Threshold signals, New-York, Mc Graw-Hill, 1950.

[8] P. RUDNICK, " Likelihood detection of small signals in stationary noise"J. Appl. Physics, 32, pp. 140-143, 1961.

[9] P. RUDNICK," A signal to noise property of binary decision", Nature, 193, pp. 604-605, 1962.

[10] H. POOR, "Robust decision design using a distance criterion", IEEE Trans. Inf. Theory, 26, p. 575-587, 1980.

[11] B. PICINBONO and P. DUVAUT, " A general theory of optimum quantization for detection" Int. report L2S.

[12] B. PICINBONO and P. DUVAUT, " Nouvelle approche de la détection par seuil" 9° Colloque GRETSI, 1983, pp. 87-91.

[13] B. PICINBONO and P. DUVAUT, "Detection and contrast" in stochastic processes in underwater acoustics, Edited by C. Baker, Springer Verlag, Lecture notes in control and information sciences, 85, 1986.

[14] H. VAN TREES, Statistical theory of signal detection, part 1, New-York, Wiley, 1968.

Ce travail a été soutenu par la convention d'études du GERDSM n° C. 86. 48. 826.220.000.

*L2S : Laboratoire des Signaux et Systèmes, Laboratoire mixte du CNRS et de l'ESE, associé à l'université de Paris-Sud