ONZIEME COLLOQUE GRETSI - NICE DU 1er AU 5 JUIN 1987

# Algorithme de Lissage Rapide pour des Systèmes Linéaires et Non-linéaires. Définition d'un Opérateur de Lissage Rapide (O.L.R).

# A Fast Smoothing Algorithm for Linear and Nonlinear Systems. Application to a Fast Smoothing Operator (F.S.O).

A. GIULIERI - G. NOLIBE

Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Appliquées de TOULON
Avenue de l'Université 83 130 LA GARDE - FRANCE

RESUME : Dans le domaine de l'estimation numérique de l'état discret d'un système, les différents algorithmes de lissages utilisés sont complexes et coûteux en temps de calcul. L'intérêt de cet article est de proposer un algorithme de lissage à retard fixe pour des applications en temps réel, présentant un parallélisme intrinsèque de calcul, et permettant d'estimer le bruit de commande agissant sur le système. Cette formulation permet de définir un opérateur spécialisé de lissage, qui s'insère dans une chaîne d'estimation et qui réduit considérablement le temps affecté à ce calcul.

SUMMARY : The different smoothing algorithms used for discrete state system estimation are complicated and expensive in computation time. So the interest of this paper is to present a fast fixed lag smoothing algorithm for real time applications. This algorithm has an intrinsic parallelism and allows to estimate the command noise which acts on the modelled system. This formulation allows to define a specialized fast smoothing operator too. This operator belongs to an estimation chain and reduce considerabely the compuration time reserved to this operation.

INTRODUCTION : Dans une première partie, nous présentons un certain nombre de classes d'algorithmes de lissage déterminées à l'aide des équations de KALMAN. Cette étude est essentiellement faite au niveau de la recherche du parallélisme de calcul pour chacune de ces classes.

Dans une seconde partie, nous analyserons le comportement numérique des algorithmes envisagés vis à vis de la parallélisation et nous présenterons un nouvel algorithme de lissage qui répond aux critères de temps réel du traitement (retard fixe), d'estimation du bruit de commande, et de parallélisation (cascadabilité et simplicité des opérateurs élémentaires).

Nous présentons finalement une structure parallèle de calcul, pour la classe d'algorithmes retenue.

L'opérateur de lissage présenté est le complément d'un opérateur de filtrage/prédiction, et s'insère dans une chaîne telle que celle présentée figure 1.

## 1. PRESENTATION DES ALGORITHMES DE LISSAGE :

Soit le système modélisé par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varnothing\,(K+1\,,\,K)\,x_k + w_k \\ z_k = H_K\,x_K + v_k \end{cases}$$

Une classification des problèmes de lissage de ce type de ce système peut-être faite en fonction du mode opératoire. La présentation faite dans cet article, ne saurait en aucun cas être exhaustive et les algorithmes présentés sont parmi les plus couramment utilisés pour le traitement en temps différé.

On rélève trois classes. Pour chacune de ces catégories, nous allons brievement rappeler les différentes approches développées. Une très bonne synthèse a été faite par MEDITCH [1].

### 1.1. Algorithme de lissage au point fixe :

Les premiers algorithmes de lissage au point fixe furent proposés par CARLTON [2], par RAUGH [3] et ensuite par MEDITCH [4] sous forme récursive.

Ce type d'algorithme est caractérisé par des équations de la forme :

$$\hat{X}_k^{N+1} = \hat{X}_k^N + A\,(k/N)\,D_{N+1}\,(\tilde{\zeta}_{N+1}) \qquad (1)$$

$$A\,(k/N+1) = A\,(k/N)\,B_{N+1} \qquad (2)$$

où $\tilde{\zeta}_{N+1} = z_{N+1} - H\,(N+1)\,\hat{X}_{N+1}^N$ représente l'innovation du filtre de KALMAN.

$D_{N+1}\,(\tilde{\zeta}_{N+1})$ est un terme de correction qui est fonction de l'innovation du filtre. On le qualifiera "d'innovation du lisseur". C'est un vecteur de même dimension que le vecteur d'état (dimension n).

A (k/N) est un gain de lissage

$B_{N+1}$ est une matrice de correction qui traduit la mémoire du système.

Nous citerons particulièrement la forme proposée par RAUGH [3] et MEDITCH [4] :

$$\hat{X}_k^{N+1} = \hat{X}_k^N + A\,(k/N)\,K_{N+1}\,\tilde{\zeta}_{N+1} \qquad (3)$$

$$\text{avec } A\,(k/N+1) = \sum_k^{N+1} c_i = A\,(k/N)\,C_{N+1} \qquad (4)$$

en prenant la définition de $C_k$.

$$C_k = p^k{}_k\,\varnothing^T\,(k+1,\,k)\,(p^k{}_{k+1})^{-1} \qquad (5)$$

et où $K_{N+1}$ est le gain de filtre de KALMAN associé au lisseur.

La forme proposée par CARLTON [2], quant à elle ne fait pas intervenir la covariance du bruit de mesure $R_k$ qu'il considère comme nulle. Une forme généralisée au cas où cette covariance est non nulle, a été proposée par ROSSO [5]. Il vient alors :

$$\hat{X}_k^{N+1} = \hat{X}_k^N + M\,(k/N)\,H^T{}_{N+1} \qquad (6)$$

$$\text{où } M\,(k/N+1) = M\,(k/N)\varnothing^T\,(N+1,\,N)\,(I - H^T{}_{N+1}\,R^{-1}_{N+1}\,P^{N+1}{}_{N+1}) \qquad (7)$$

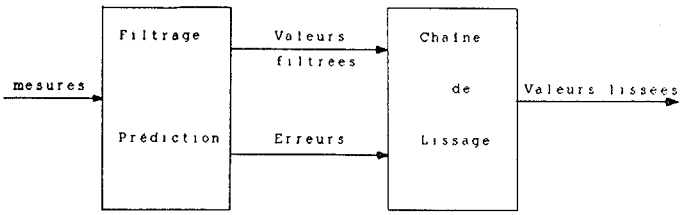


Figure 1. Chaîne d'estimation.

Il est interessant de remarquer que contrairement à l'algorithme de RAUGH-MEDICH, cette formulation ne nécessite pas d'inversion matricielle à chaque itération, ce qui nous amène déjà à le préférer pour une éventuelle parallélisation.

1.2 Algorithmes de lissage sur un intervalle fixe :

La forme générale des équations de ce type de lissage est :

$$\hat{x}_k^N = \hat{x}_k^k + S(k)\,(\hat{x}_{k+1}^N - \hat{x}_{k+1}^k)$$

S(k) représente un gain de lissage en fonction de l'indice de récurrence k dans l'intervalle de lissage.

Une forme par RAUGH et al [6] et MEDITCH [7] :

$$\hat{x}_k^N = \hat{x}_k^k + C_k\,(\hat{x}_{k+1}^N - \hat{x}_{k+1}^k) \qquad (8)$$

En ayant pris la même définition pour $C_k$ (équation 4)
Une autre forme a été introduite par BRYSON-FRAZIER [8] pour le lissage à intervalle fixe pour des modèles linéaires et non-linéaires.
Cet algorithme est donné par le système d'équations suivant :

$$\hat{x}_k^N = \hat{x}^k - p_k^k \varnothing^T(k+1, k)\,\lambda_k \qquad (9)$$

avec $\lambda_{k-1} = (I - k_k H_k)^T (\varnothing^T(k+1, k)\,\lambda_k - H_k R^{-1} \tilde{\zeta}_k)$

$k_k$ est le gain du filtre de KALMAN associé et $\lambda_k$ est un vecteur de même dimension que le vecteur d'état $x_k$. C'est une variable auxiliaire dont l'interprétation mathématique est

$$\lambda_k = -(p^k_{k+1})^{-1}\,(\hat{x}_{k+1}^N - \hat{x}^k_{k+1})$$

Il est important de remarquer que cet algorithme évite toute inversion matricielle et qu'il permet d'obtenir de façon simple, une estimation du bruit de commande par la relation.

$$w_k^N = -Q_k \lambda_k \qquad (10)$$

1.3. Algorithmes de lissage à retard fixe :

Cette classe d'algorithmes est caractérisée par la forme générale suivante :

$$\hat{x}_k^{N+1} = f(\hat{x}_k^N, \hat{x}^k_k, \tilde{\zeta}_k) \qquad (11)$$

On cherche à avoir une valeur lissée à l'instant k+1 en fonction de la valeur lissée à l'instant k et de la valeur préalablement filtrée à l'instant k, en ce en tenant compte de l'innovation apportée au filtre par les mesures.

La formulation de RAUGH [3] et MEDITCH [7]

$$\hat{x}_k^N = \varnothing(k, k-1)\,\hat{x}^{k-1}_{k-1} + Q_k\,\varnothing^{-T}(k, k-1)\,(p^{k-1}_{k-1})^{-1}(\hat{x}^{N-1}_{N-1} - \hat{x}^{k-1}_{k-1}) + C_N K_N \tilde{\zeta}_N$$

Comme nous le voyons, cet algorithme séquentiel est très complexe et lourd en temps de calcul. Il nécessite :

- l'utilisation préalable d'un lissage au point fixe sur une horizon de points égal à la largeur de la fenêtre de retard, afin d'obtenir une initialisation correcte des paramètres.

- l'inversion à chaque itération d'au moins deux matrices de même dimension que le système. De plus, l'inversion de la matrice Ø peut conduire à un modèle instable suivant les méthodes et la précision numériques employées (coût en temps de calcul).

D'autres formulations ont été proposées par HAGANDER [9] et MOORE [10] pour cette forme d'algorithme. Cependant ces formulations, si elles peuvent être plus facilement appliquées n'en restent pas moins aussi complexes. De plus de part son caractère séquentiel, ce type de formulations ne permet pas une parallélisation aisée et cascadable comme nous le cherchons.

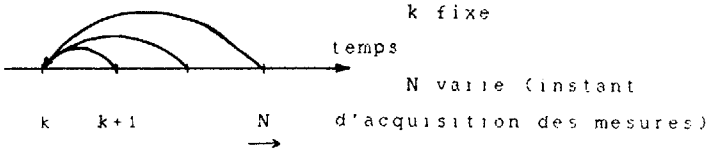


Figure 2.a. Lissage au point fixe.

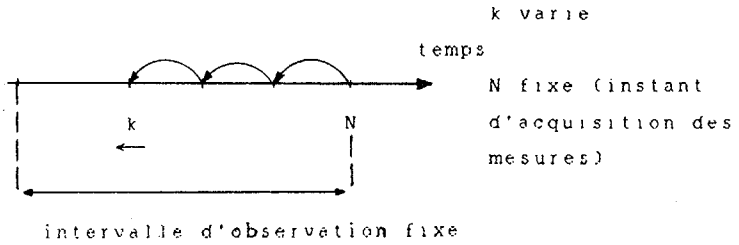


Figure 2.b. Lissage à intervalle fixe.

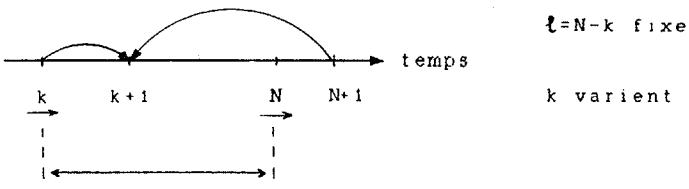


Figure 2.c. Lissage à retard fixe.

2 ETUDE DU PARALLELISME :

Comme nous l'avons dit précédemment, les algorithmes de lissage à retard fixe sont difficilement parallélisable surtout de part leur caractère séquentiel. Aussi une autre approche consiste à prendre une fenêtre de lissage de largeur constante et à la déplacer au rythme des observations. Comme le montre la figure 3, on peut procéder à un lissage au point fixe pour chacun des points de cette fenêtre (figure 4). Le dernier point sorti de cette fenêtre devient alors le nouveau paramètre lissé à retard constant.

Cependant, les algorithmes de lissage à intervalle fixe sont totalement séquentiels, où aucun parallélisme n'a pu être décelé.

Considérons la forme de lissage au point fixe pour chacun des points $x_i$ de la fenêtre (i = k.....N). Il vient en reprenant les équations 1 et 2 :

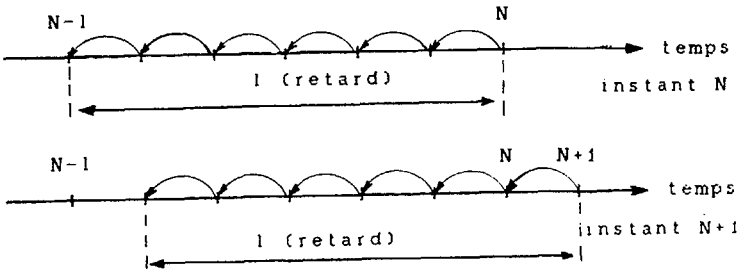


Figure 3. Lissage à retard fixe en utilisant un lissage à intervalle fixe dans une fenêtre.

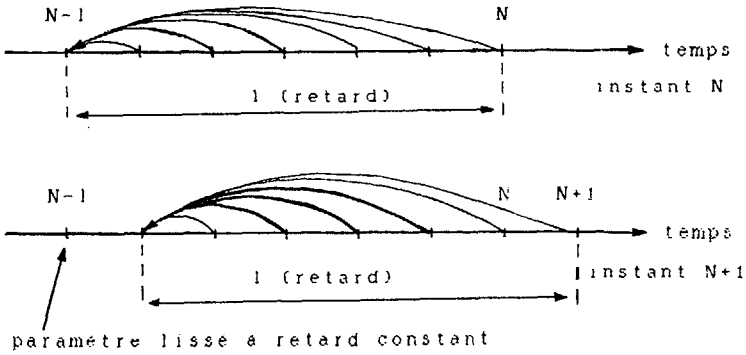


Figure 4. Lissage à retard fixe en utilisant un lissage au point fixe dans une fenêtre.

$$\hat{X}^{N+1}_{k} = \hat{X}^{N}_{k} + A(k/N)\, D_{N+1}\,(\tilde{\zeta}_{N+1})$$

$$\text{et} \quad A(k/N+1) = A(k/N)\, B_{N+1}$$

(12)

$$\hat{X}^{N+1}_{N} = \hat{X}^{N}_{N} + A(N/N)\, D_{N+1}\,(\tilde{\zeta}_{N+1})$$

$$\text{et} \quad A(N+N+1) = A(N/N)\, B_{N+1}$$

Avec A (N/N) qui est fourni par le filtre situé en amont de la chaîne de lissage.

On a donc 2s (s = N-k) équations indépendantes où $B_{N+1}$ et $D_{N+1}(\zeta_{N+1})$ sont des paramètres fournis simultanément par le filtre associé, à l'ensemble des points de la fenêtre.

La figure 5 montre le diagramme d'évolution de cette formulation. Si nous introduisons dans ce diagramme l'indice d'évolution temporel j (j variant de k à N) de la relation générale.

$$\hat{X}^{N+1}_{j} = \hat{X}^{N}_{j} + A(j/N)\, D_{N+1}\,(\tilde{\zeta}_{N+1})$$

$$\text{et} \quad A(j/N+1) = A(j/N)\, B_{N+1}$$

Nous obtenons le diagramme d'évolution temporel de la figure 6. En projetant perpendiculairement à l'axe temporel, nous obtenons la structure de l'opérateur de lissage de la figure 7.

Nous avons obtenu un macro opérateur que l'on pourrait qualifier de "semi-systolique" en reprenant la définition de MONGENET [11].

En appliquant les méthodes de réseaux de PETRI à flux de données développées notamment par ABELLARD-BARBAGELATA-GIULIERI [12]. On obtient le réseau de PETRI présenté à la figure 8 duquel on déduit aisément l'opérateur de la figure 7 obtenu par la méthode de MONGENET. Nous avons donc confirmer la structure de l'opérateur par deux méthodes différentes et éprouvées.

## 3. PROPOSITION D'UNE NOUVELLE FORMULATION :

Compte tenu des contraintes numériques et des contraintes de temps, nous avons choisis un algorithme de

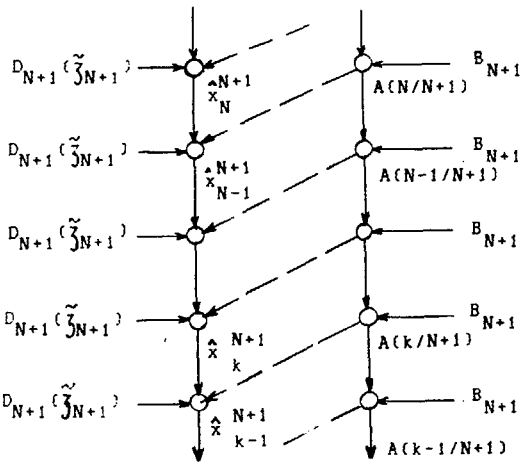


Figure 5. Diagramme d'évolution des paramètres.

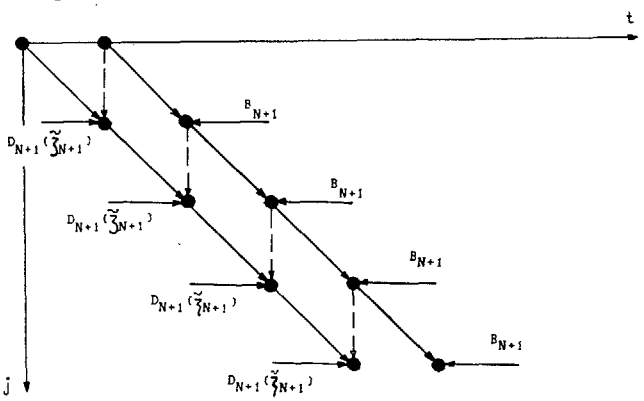


Figure 6. Diagramme d'évolution temporelle.

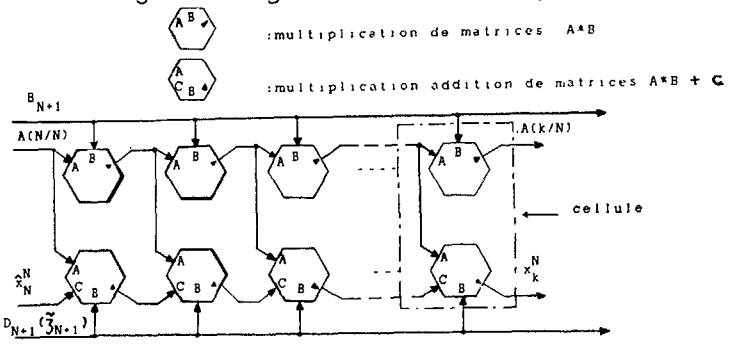


Figure 7. Structure de l'opérateur de lissage.

lissage au point fixe qui ne nécessite pas d'inversion matricielle. Nous avons par conséquent utilisé la formulation de CARLTON généralisée (équation 5 et 7). Cependant contrairement à la formulation proposée par BRYSON et FRAZIER, nous n'avons pas l'estimation du bruit de commande. Aussi avons nous introduit une nouvelle paramétrisation de cet algorithme (équation 9).

$$\hat{X}^{N}_{k} = \hat{X}^{k}_{k} - P^{k}_{k}\, \varnothing^{T}(k+1, k)\, \lambda^{N}_{k} \qquad (13)$$

$$\text{avec } \lambda^{N}_{k-1} = (I - K_k H_k)^{T}\,(\varnothing^{T}(k+1, k)\,\lambda(k/N) - H_k R_k^{-1} \tilde{\zeta}_k) \qquad (14)$$

$$\text{en posant } \lambda^{N}_{N} = 0 \text{ et } \zeta_k = z_k - H_k\, x^{k-1}_{k}$$

En réécrivant l'équation à l'instant N+1 on obtient :

$$\hat{X}^{N+1}_{k} = \hat{X}^{k}_{k} - P^{k}_{k}\, \varnothing^{T}(k+1, k)\, \lambda^{N+1}_{k} \qquad (15)$$

On obtient en soustrayant membre à membre l'équation 13 à l'équation 14

$$\hat{X}^{N+1}_{k} - \hat{X}^{N}_{k} = \hat{X}^{k}_{k} - P^{k}_{k}\, \varnothing^{T}(k+1, k)\, \lambda^{N+1}_{k} - \hat{X}^{k}_{k} - P^{k}_{k}\, \varnothing^{T}(k+1, k)\, \lambda^{N}_{k}$$

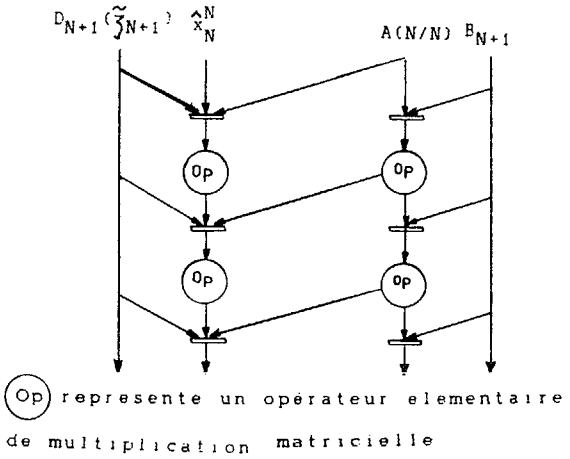


Figure 8. Réseau de PETRI associé au lissage point fixe.

soit

$$\hat{x}_k^{N+1} - \hat{x}_k^N - P_k^k \varnothing^T (k+1, k)(\lambda_k^{N+1} - \lambda_k^N)$$

En developpant une dernière fois, en sachant que $\lambda_N^N = 0$, il vient :

$$\hat{x}_k^{N+1} = \hat{x}_k^N + Y(k,N+1)$$

$$Y(k,N+1) = P^k_k \varnothing^T (k+1) L_k \ldots L_N (I - K_{N+1} H_{N+1})^T H^T_{N+1} R^{-1}_{N+1} \tilde{\zeta}_{N+1}$$

En écrivant autrement cette équation, il vient :

$$\hat{x}_k^{N+1} = \hat{x}_k^N + G(k,N)\, \tilde{\chi}_{N+1}$$

où G(k,N) représente un gain de correction du lisseur et s'écrit :

$$G(k,N) = P^k_k \varnothing^T (k+1,k) L_{k+1} \ldots L_N$$

et $\tilde{\chi}_{N+1} = (I - K_{N+1} H_{N+1})^T H^T_{N+1} R^{-1}_{N+1} \tilde{\zeta}_{N+1}$

On a également $G(k, N+1) = G(k, N) L_{N+1}$

On retrouve par conséquent, la forme générale des équations 1 et 2.

En procédant de la même façon pour l'équation 10 d'estimation du bruit de dynamique, il vient

$$\hat{w}_k^{N+1} = \hat{w}_k^N + N(k,N+1)\tilde{\chi}_{N+1}$$

avec $N(k,N) = -Q_k L_{k+1} \ldots L_N = N(k,N-1) L_N$

On a donc un opérateur identique à celui de l'estimation de l'état et indépendant de celui-ci, pour l'estimation du bruit.

Cet algorithme a été testé sur ces modèles de poursuite et donnent des résultats similaires à l'algorithme de RAUGH à intervalle fixe. De plus, compte tenu du fait qu'aucune inversion matricielle n'est nécessaire, la précision numérique a pu être diminué, ce qui est appréciable pour la simplicité des opérateurs élémentaires.

## CONCLUSION

Cette étude nous a permis de définir un algorithme rapide et d'en déduire un opérateur de calcul optimisé pour le lissage en temps réel. Une méthodes géométrique simple nous a permis d'obtenir très facilement cet opérateur à partir des spécifications algorithmiques.

Une implantation de cet opérateur a été effectuée à l'aide de processeurs de traitement du signal travaillant avec des nombres en virgule flottante de 32 bits [13]. L'utilisation d'un tel opérateur rend alors négligeable l'opération de lissage dans une chaîne d'estimation.

REMERCIEMENTS : Les auteurs tiennent à remercier l'Ingénieur de l'Armement COFFIN-ELTRICH et l'Ingénieur des Constructions Navales SIFFREDI pour les moyens qu'ils ont aimablement mis à leur disposition.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J.S. MEDITCH " A Survey of Data Smoothing for Linear and Nonlinear Dynamic Systems" - Automatica Vol 9 n° 2 pp 151-162. Mars 1973

[2] A.G. CARLTON "Linear Estimation in Stochastic processes" - bumblebee series Rept n° 311. Applied Physic Laboratory, John Hopkins University, Silver Springs 1962

[3] H.E. RAUCH "Solutions to Linear Smoothing Problems" IEEE Trans. Aut. Cont. Vol AC-8 n° 4 pp 371-372 Octobre 1963

[4] J.S. MEDITCH "Orthogonal Projection and Discrete Optimal Linear Smoothing" - SIAM Control vol 5 n° 1 1967

[5] M. ROSSO "Algorithmes de lissage Appliqués au Traitement du Signal et Recherche de Parallélisation sur Architecture Multiprocesseur" Thèse de 3ème cycle - Université de Nice Déc. 1983

[6] RAUGH-TUNG-STIEBEL "Maximum Likehood Estimates of Linear Dynamic Systems" - AIAA J Vol 3 n° 8 pp 1445-1450 Aout 1965

[7] J.S. MEDITCH "Orthogonal Projection and Discrete Optimal Linear Smoothing" - SIAM control vol 5 n° 1 1967

[8] BRYSON - FRAZIER "Smoothing for Linear and Nonlinear Dynamic Systems" - Proc. Optimum Systems Synthesis Conf. Wright Patterson Afb, OHIO Septembre 1962

[9] HAGANDER - WITTENMARK "A self Tuning Filter for Fixed Lag Smoothing" - IEEE on In formation Theory vol IT 23 n° 3 pp 377-384

[10] J.B. MOORE "Discrete Time fixed Lag Algorithms" Automatics vol 9 pp 163-173 1973

[11] C. MONGENET "Une méthode de Conception d'Algorithmes Systoliques. Résultats Théorique et Réalisation" Thèse de Doctorat d'Etat - Université de Strasbourg Mai 1985

[12] P. ABELLARD, B. BARBAGELATA, A. GIULIERI "Systolic Arrays modeling by Data-Flow PETRI Nets" First Européan Workshop on Parallel Processing Techniques for Simulation. UMIST Manchester Octobre 1985

[13] NOLIBE "Etude et Définition d'un Opérateur de Lissage Rapide" DEA d'Optique et de Traitement des Images Juin 1986.