

UTILISATION DE LA TRANSFORMATION DE WIGNER-VILLE POUR LE TRAITEMENT NUMERIQUE DES SIGNAUX ET DES IMAGES : MISE EN OEUVRE ET INTERPRETATION

Yue Min ZHU, Françoise PEYRIN, Robert GOUTTE

Laboratoire de Traitement du Signal et Ultrasons, INSA 502, 20 Avenue Einstein, 69621 VILLEURBANNE Cedex  
UA CNRS 1216

RESUME

La transformation de Wigner-Ville a été largement étudiée dans le cadre de son application aux signaux temporels monodimensionnels. L'extension de la TWV aux images bidimensionnelles peut être envisagée mais encore très peu de travaux portent sur ce sujet. Dans cet article, nous proposons de faire une mise au point sur les propriétés de cette transformation en 2D, de décrire sa mise en oeuvre et de discuter ses possibilités dans le domaine du traitement d'images en s'appuyant sur les premiers résultats de simulation.

ABSTRACT

The Wigner-Ville Transform (WVT) has been extensively detailed in the field of monodimensional temporal signal processing. The extension of the WVT to bidimensional images can be considered but very little work has been done on this subject. The purpose of this paper is to precise the properties of this transformation for 2D images, to describe a practical procedure to compute the discrete WVT of a numerical image and to discuss the possibilities of the WVT for digital image processing using simulated examples.

I. INTRODUCTION

La Transformation de Wigner-Ville (TWV) introduite dans le domaine du traitement du signal par J. VILLE permet d'obtenir une représentation temps-fréquence des signaux [1] [2] [3]. Plus précisément si  $f(t)$  est un signal temporel monodimensionnel, la TWV lui associe une fonction bidimensionnelle  $W_f(t,u)$  définie par :

$$W_f(t,u) = \int_{\mathbb{R}} f(t+\alpha/2) f^*(t-\alpha/2) \exp(-j2\pi u\alpha) d\alpha \quad (1)$$

ou "\*" représente l'opération de conjugaison complexe.

De façon équivalente, la TWV peut être aussi définie à partir de la transformée de Fourier (TF)  $F(u)$  du signal  $f(t)$  par :

$$W_f(t,u) = \int_{\mathbb{R}} F(u+\epsilon/2) F^*(u-\epsilon/2) \exp(j2\pi \epsilon t) d\epsilon \quad (2)$$

La TWV d'un signal réel ou complexe est toujours une fonction réelle qui contient néanmoins les informations de phase sur le signal. La TWV est une transformation bilinéaire qui possède un grand nombre de propriétés mathématiques intéressantes (caractéristiques énergétiques, conservation de support, propriétés opératoires vis à vis de la translation, multiplication, convolution, modulation ...) [4]. Par ailleurs, un certain nombre d'études ont montré la supériorité de cette transformation par rapport à d'autres méthodes d'analyse temps-fréquence et en particulier par rapport au spectrogramme [5] [6] qui est couramment utilisé en acoustique et en parole. De plus, la TWV d'un signal n'étant en fait autre que la TF d'un signal produit, peut être facilement évaluée que ce soit par des moyens optiques [7] ou numériques [4] [8].

L'extension de la TWV aux images bidimensionnelles peut être envisagée mais encore très peu de travaux portent sur ce sujet [9]. Dans ce cas, on obtient une représentation espace-fréquences

spatiales de l'image qui permet de définir en chaque point de l'image un spectre bidimensionnel local. Le but de cet article est de faire une mise au point sur les propriétés de cette transformation en 2D, de décrire sa mise en oeuvre et de discuter ses possibilités dans le domaine du traitement d'images.

II. TWV d'une image continue

Si  $f(x,y)$  représente une image bidimensionnelle, sa TWV est la fonction  $W_f(x,y,u,v)$  [9] définie par :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x+\alpha/2, y+\beta/2) f^*(x-\alpha/2, y-\beta/2) \exp(-j2\pi(\alpha u + \beta v)) d\alpha d\beta \quad (3)$$

ou de façon équivalente par :

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(u+\epsilon/2, v+\rho/2) F^*(u-\epsilon/2, v-\rho/2) \exp(j2\pi(\epsilon x + \rho y)) d\epsilon d\rho \quad (4)$$

où  $F(u,v)$  est la TF à 2D de  $f(x,y)$ .

La TWV d'une image à 2D  $f(x,y)$  est donc une fonction de 4 variables  $x,y,u,v$  qui fournit une représentation espace-fréquences spatiales de cette image. Pour chaque point  $(x,y)$  fixé de l'image, on obtient ainsi un spectre bidimensionnel de fréquences spatiales  $(u,v)$ .

La plupart des propriétés de la TWV de signaux monodimensionnels peuvent être transposées dans le cas d'images à 2D. Celles-ci sont résumées ci-dessous :

P1 :  $W_f^*(x,y,u,v) = W_f(x,y,u,v)$

P2 :  $\int_{\mathbb{R}^2} W_f(x,y,u,v) du dv = |f(x,y)|^2$   
 $\int_{\mathbb{R}^2} W_f(x,y,u,v) dx dy = |F(u,v)|^2$

P3 : si  $h(x,y) = f(x-x_0, y-y_0)$   
 alors  $W_h(x,y,u,v) = W_f(x-x_0, y-y_0, u,v)$



P4 : si  $h(x,y) = f(x,y)\exp(j2\pi(xu_0 + yv_0))$   
alors  $W_h(x,y,u,v) = W_f(x,y,u-u_0, v-v_0)$

P5 : si  $h(x,y) = f(ax,by)$   
alors,  
 $W_h(x,y,u,v) = (1/|ab|)W_f(ax,by,u/a, v/b)$

P6 : si  $f(x,y)=0$  pour  $(x,y) \notin D$   
alors  $W_f(x,y,u,v)=0$  pour  $(x,y) \notin D$

P7 : si  $F(u,v)=0$  pour  $(u,v) \notin D'$   
alors  $W_f(x,y,u,v)=0$  pour  $(u,v) \notin D'$

P8 : si  $f(x,y) = f(x,y) g(x,y)$   
alors  $W_h(x,y,u,v) = W_f(x,y,u,v) *_{u,v} W_g(x,y,u,v)$

"\*<sub>u,v</sub>" signifie convolution bidimensionnelle par rapport aux variables u et v.

P9 : si  $h(x,y) = f(x,y) * g(x,y)$   
alors  $W_h(x,y,u,v) = W_f(x,y,u,v) *_{x,y} W_g(x,y,u,v)$

En particulier, la TWV d'une image quelconque réelle ou complexe est une fonction réelle (P1). De plus, dans le cas où l'image est réelle, sa TWV en un point  $(x,y)$  fixé est un spectre bidimensionnel symétrique par rapport à l'origine dans le plan  $(u-v)$ .

### 111. Versions modifiées de la TWV

Dans le cas monodimensionnel, pour des raisons de pratique et d'interprétation des résultats, des versions modifiées de la TWV ont été proposées. On peut les classer de la façon suivante :

#### 1) TWV Simple

C'est la TWV telle qu'elle est définie par les relations (1) et (2).

#### 2) Transformation de Pseudo-Wigner-Ville (TPWV)

La TPWV a été introduite pour permettre l'étude des signaux de longue durée [4]. Elle consiste à appliquer la TWV sur des portions de signal découpées par une fenêtre glissante. On peut montrer que cette opération est équivalente à un lissage fréquentiel sur la TWV simple du signal global.

#### 3) Transformation de Pseudo-Wigner-Ville Lissée (TPWVL)

La TPWVL est obtenue en effectuant une opération de lissage temporel sur la TPWV. On a donc globalement effectué un lissage dans le plan temps-fréquence, séparable en temps et en fréquence [10].

#### 4) Transformation de Wigner-Ville Lissée (TWVL)

Le mot TWVL sera consacré au résultat du produit de convolution de la TWV avec une fonction bidimensionnelle du temps et de la fréquence.

Cette version est plus générale que la précédente et permet en outre d'accéder à d'autres représentations temps-fréquences [4].

L'intérêt de ce type de traitement est illustré par l'exemple suivant. Considérons un signal dont la loi de modulation est représentée sur la Figure 1a). Sa TWV simple (Figure 1b) présente une forme complexe, difficile à interpréter, du fait de la présence de termes d'interaction entre les différentes composantes du signal. La TPWV obtenue en utilisant une fenêtre rectangulaire (Figure 1c) et la TPWVL obtenue en ajoutant un lissage temporel par une fenêtre rectangulaire (Figure 1d) mettent mieux en évidence la loi de modulation du signal.

De la même façon, dans le cas de traitement des images par la TWV, on sera aussi parfois conduit à utiliser des versions modifiées de la TWV. En effet, d'une part, la zone d'étude étant généralement plus petite que l'étendue totale de l'image, on est amené à introduire une transformation de Pseudo-Wigner-Ville (TPWV) en n'utilisant qu'une portion d'image délimitée par une fenêtre bidimensionnelle. D'autre part, la TWV étant une transformation bilinéaire, les spectres locaux obtenus en chaque point pourront être brouillés par la présence de termes parasites dus à l'interaction entre les composantes de l'image et que la TPWV aura pour effet d'atténuer. Les parasites restant dans la TPWV pourront encore être réduits en lissant la TPWV, cette fois-ci, dans le domaine spatial ; on obtiendra dans ce cas une version modifiée de la TWV simple dite TPWV lissée (TPWVL).

Si  $w(x,y)$  représente une fenêtre bidimensionnelle symétrique, la TPWV d'une image  $f(x,y)$  peut être définie par :

$$PW(x,y,u,v) = 4 \int_{R^2} |w(\alpha,\beta)|^2 f(x+\alpha, y+\beta) f^*(x-\alpha, y-\beta) e^{-j4\pi(\alpha u + \beta v)} d\alpha d\beta \quad (5)$$

La TPWVL est alors définie par :

$$PWL(x,y,u,v) = \int_{R^2} p(x',y') PW(x-x', y-y', u,v) dx' dy' \quad (6)$$

où  $p(x,y)$  est une fonction de lissage spatial.

### IV. TWV d'une image discrète

#### IV.1 Définition et principe de calcul

D'un point de vue pratique, il est intéressant de disposer d'un équivalent discret de la TWV pour le traitement numérique des images. Par analogie avec le cas 1D [8] si  $f(l_1, l_2)$  représente une image discrète, sa TWV discrète (TWVD)  $W(l_1, l_2, k_1, k_2)$  peut être définie par :

$$W_f(l_1, l_2, k_1, k_2) = \frac{1}{4N^2} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) \times f^*(l_1 - n_1, l_2 - n_2) \exp(-j \frac{\pi}{N} (k_1(2n_1 - l_1) + k_2(2n_2 - l_2))) \quad (7)$$

ou de façon équivalente par :

$$W_f(l_1, l_2, k_1, k_2) = \frac{1}{4N^2} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} F(n_1, n_2) \times F^*(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \exp(j \frac{\pi}{N} (l_1(2n_1 - k_1) + l_2(2n_2 - k_2))) \quad (8)$$

où  $F(k_1, k_2)$  est la TFD à 2D de  $f(l_1, l_2)$  les indices  $l_1, l_2, k_1, k_2$  variant entre 0 et  $N-1$ .

Dans les relations (7) et (8), les indices entiers  $l_1$  et  $l_2$  représentent respectivement les variables spatiales  $l_1 \Delta x/2$  et  $l_2 \Delta y/2$  et  $k_1$  et  $k_2$  respectivement les variables fréquence-spatiales  $k_1/2N \Delta x$  et  $k_2/2N \Delta y$  où  $\Delta x$  et  $\Delta y$  désignent les pas d'échantillonnage de l'image respectivement dans la direction x et dans la direction y.

Le calcul numérique de la TWVD d'une image discrète peut se réaliser à l'aide de la TFD bidimensionnelle. Le procédé de calcul consiste à effectuer, d'après la relation (7), une TFD à 2D pour un point fixé  $(l_1, l_2)$  de l'image, et à répéter cette opération en balayant tous les points de l'image. Les spectres spatiaux correspondant à tous les points de l'image constituent ainsi la TWV de l'image totale.

Plus précisément, la TWV correspondant à un point fixé de l'image peut être calculée de la façon suivante : centrer une fenêtre rectangulaire sur le point considéré de l'image, faire subir à la sous-

image ainsi découpée par la fenêtre, une série d'opérations de retournements bidimensionnels, conjugaison, multiplication et effectuer une transformation de Fourier à 2D du produit. La figure 2 illustre le principe de ce calcul, la fenêtre spatiale étant dans ce cas une fenêtre rectangulaire de même taille que l'image.

#### IV.2 Recouvrements et image analytique

La TWVD d'une image discrète est une fonction discrète et périodique à la fois dans le domaine spatial  $x, y$  et dans le domaine fréquentiel  $u, v$ . Mais la TWVD n'est pas toujours simplement une version échantillonnée de la TWV continue. En effet, on peut montrer que : si l'image est échantillonnée sur une grille d'espace  $(\Delta x, \Delta y)$ , la TWV sera échantillonnée sur une grille d'espace  $(\Delta x/2, \Delta y/2)$ , c'est-à-dire, la TWV est échantillonnée dans le plan spatial  $x-y$  à un pas deux fois plus fin que celui de l'image ; d'autre part, l'échantillonnage de l'image introduit une périodisation de la TWV dans le plan des fréquences spatiales  $u-v$  sur une grille de résolution  $(1/2N \Delta x, 1/2N \Delta y)$ , la TWV se répète ainsi dans le plan  $u-v$  avec une période deux fois plus petite que la période de répétition du spectre spatial de l'image discrète originale. Ces phénomènes de périodicités dans le plan fréquence-spatial sont à l'origine d'éventuels problèmes de recouvrements présents dans la TWV calculée à partir de l'image réelle.

Dans le cas où il n'y a pas de recouvrements l'ensemble des propriétés de la TWV continue peut être transposé à la TWVD.

En pratique, ces problèmes de recouvrements seront évités si l'image réelle est échantillonnée à une fréquence au moins deux fois plus grande que celle de Shannon.

Toutefois, l'introduction d'une notion d'image analytique sur laquelle sera calculée la TWVD permettra dans une certaine mesure de s'affranchir de ces problèmes sans suréchantillonner l'image [11]. De plus l'utilisation de l'image analytique aura également pour effet de supprimer certains termes d'interactions entre les fréquences spatiales positives et négatives. On obtiendra ainsi sans perte d'informations des résultats plus faciles à interpréter. Le paragraphe suivant présente un exemple illustrant cette propriété.

#### V. Exemples de simulations

La TWVD d'une image  $N \times N$ , définie par la relation (5) est constituée de  $N^2$  matrices  $N \times N$ , chaque matrice représentant le spectre local en un point de l'image. Etant donnée la taille de la transformation, nous ne présenterons les résultats obtenus qu'en certains points particuliers de l'image.

Considérons tout d'abord une image définie par  $f(x, y) = \cos 2\pi(ax + bx^2 + cy + dy^2)$  dont les fréquences spatiales en  $x$  et  $y$  évoluent linéairement en fonction de  $x$  et de  $y$ . La figure 3 représente la TWVD de cette image en un point donné, calculée soit à partir de l'image réelle (figure 3a) soit à partir de l'image analytique (figure 3b). On constate que dans ce cas les termes d'interactions entre les fréquences spatiales positives et négatives présents dans la TWVD de l'image réelle sont complètement éliminés dans la TWVD de l'image analytique. L'observation des spectres locaux obtenus en différents points de l'espace montre l'évolution du pic dans le plan fréquentiel  $u-v$  et traduit la structure fréquentielle de l'image.

Considérons maintenant l'image composite suivante

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$$

$$\text{avec } f_1(x, y) = \cos(2\pi(u_0 x + v_0 y))$$

$$f_2(x, y) = \cos(2\pi(ax + bx^2 + cy + dy^2))$$

La figure 4 représente différentes versions de la TWVD de cette image au point central. On constate que les petites ondulations parasites présentes dans la TWVD simple (figure 4a) sont largement réduites en utilisant la TPWV (figure 4b). Toutefois, après ce traitement, il reste encore des termes d'interactions importants entre les 2 composantes de l'image. Après avoir effectué un lissage spatial de la TPWV on obtient une TPWVL dans laquelle les 2 pics principaux représentant respectivement les deux composantes  $f_1(x, y)$  et  $f_2(x, y)$  de l'image sont bien mis en évidence. L'observation de la TWV en d'autres points de l'image présente les mêmes caractéristiques.

#### V. Conclusion

Nous avons proposé dans cet article l'utilisation de la TWV pour son application au traitement d'images. Après avoir rappelé sa définition et ses principales propriétés, nous avons introduit les notions de Transformation de Pseudo Wigner Ville (TPWV) et de Transformation de Pseudo-Wigner Ville Lissée (TPWVL) aux images bidimensionnelles. Nous avons ensuite défini une version discrète de la TWV en soulignant les problèmes dus à la discrétisation. Enfin, après avoir donné le principe de son calcul, nous avons présenté les résultats de premières simulations mettant en évidence l'intérêt de ces traitements pour l'analyse des images.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Wigner E., "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", Phys. Res; USA (1932), 40, pp.749-759.
- [2] Ville J., "Théorie et applications de la notion de signal analytique", Câbles et Transmission, Fr. (1948), 1, pp.61-74.
- [3] Escudié B., "Représentation en temps et fréquence des signaux d'énergie finie : analyse et observation des signaux", Ann. Télécomm., Fr. (1979), 34, (3-4), pp.101-111.
- [4] Classen T.A.C.M., Mecklenbrauker W.F.G., "The Wigner distribution. A tool for time-frequency signal analysis", Part I, Part II, Part III, Philips J. Res., NL (1980).
- [5] Flandrin P., Escudié B., "An interpretation of the pseudo-Wigner-Ville Distribution", Signal Pro., NL (1984), 6,1, pp.27-36.
- [6] Janse C.P., Kaiser A.J.M., "Time-frequency distribution of loudspeakers : the application of the Wigner distribution", J. Audio. Eng. Soc., S.(1983), 31,4, pp.198-223.
- [7] Easton R.L., Jr., Ticknor A.J., Barrett H.N., "Application of the Radon transform to optical production of the Wigner distribution function", Opt. Eng., U.S.A. (1984), 23,6, pp.738-744.
- [8] Peyrin F., Prost R., "A unified definition for the discrete-time, discrete frequency and discrete time-frequency Wigner distribution", IEEE Trans. ASSP, USA (1986), ASSP-34, 4, pp.858-867.
- [9] Jacobson L., Wechsler H., "A paradigm for invariant object recognition of brightness, optical flow and binocular disparity images", Pattern Recognition Letters, NL (1982), 1, pp.61-68.
- [10] Flandrin P., "Some feature of time-frequency representations of multicomponent signals", Proc. ICASSP-84, San Diego, USA (1984), pp.41B4.1-B.4.4.
- [11] Peyrin F., Zhu Y.M., Goutte R., "Extension of the notion of analytic signal for multidimensional signals. Application to images", EUSIPCO, La Haye, NL (1986), pp.677-680.

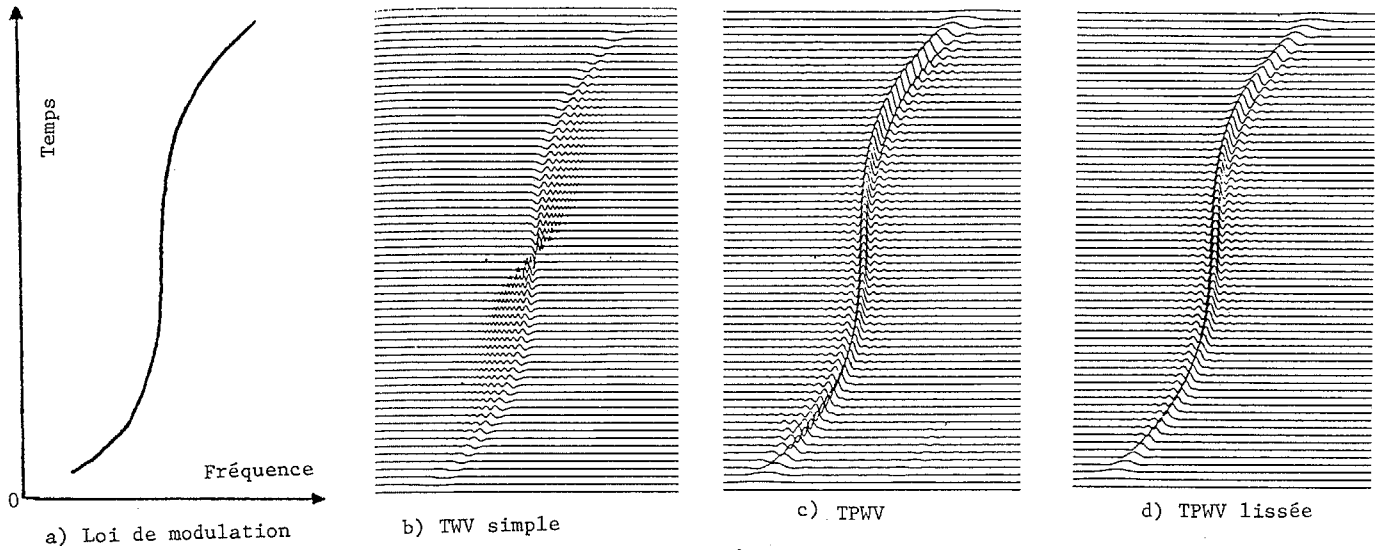


Figure 1

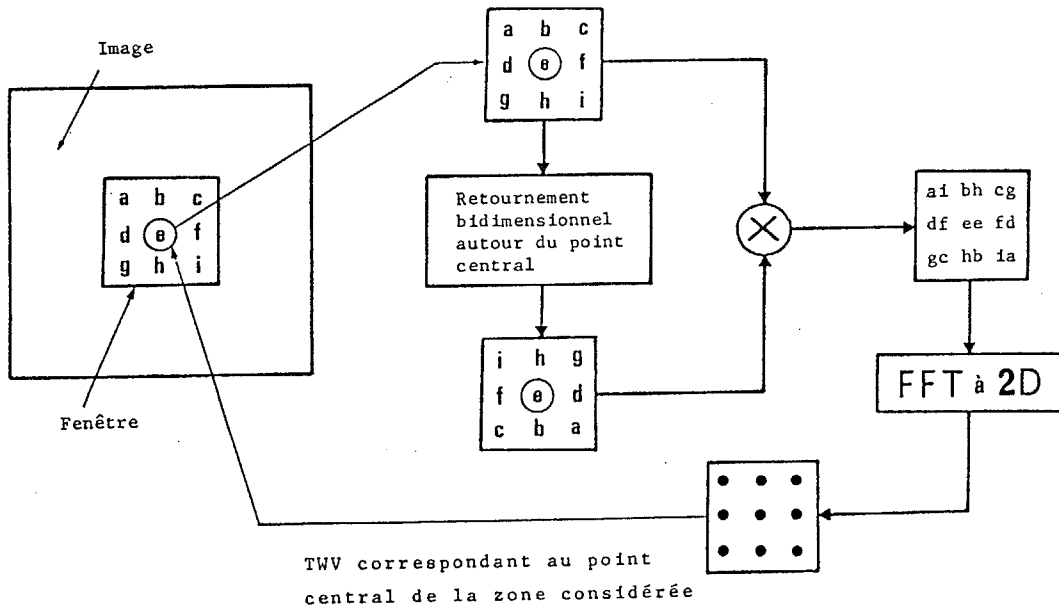
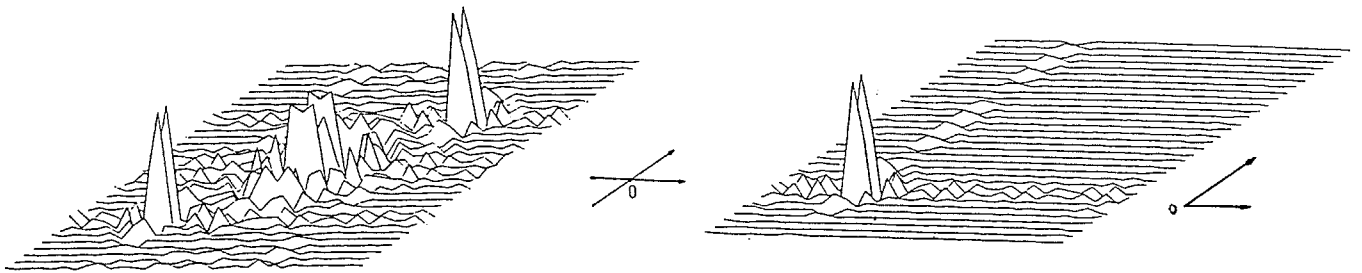


Figure 2



a) TWV au point (15,14) de l'image réelle

b) TWV au point (15,14) de l'image analytique

Figure 3

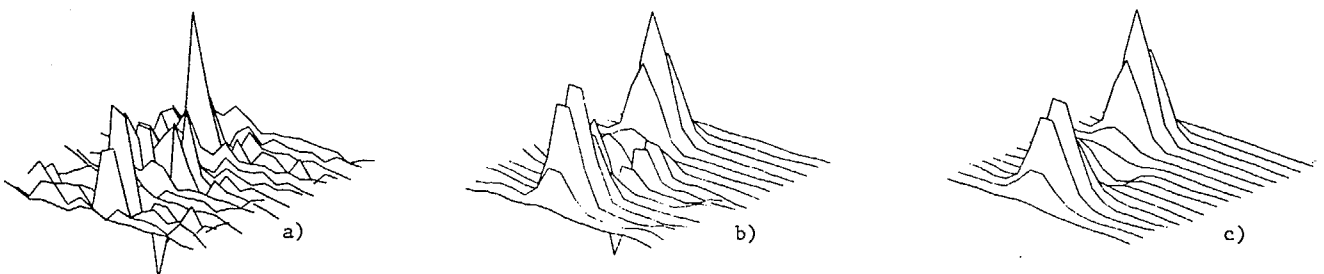


Figure 4