

**Stabilisation des Fonctions de Transfert 2D
par Projection de Radon
et Factorisation Spectrale 1D**

Joël Le Roux
CNET-CCI, BP 98, 38243 Meylan Cedex

Résumé

Cette communication a pour but de présenter quelques résultats de simulation montrant la possibilité d'utiliser les techniques de factorisation spectrale 1D en vue de stabiliser les fonctions de transfert 2D ; la méthode comporte trois étapes : projection de Radon pour obtenir une fonction de transfert 1D puis stabilisation de cette fonction de transfert 1D par une technique classique de factorisation spectrale et enfin reconstitution de la fonction de transfert stabilisée 2D par rétroprojection.

Introduction

Dans deux communications précédentes [1]-[2], nous avons montré qu'il était théoriquement possible d'utiliser la projection de Radon [3]-[4] associée à une technique de factorisation spectrale de signaux fonction d'une variable pour stabiliser les fonctions de transfert de deux ou de plusieurs variables. Ici notre but est de présenter un certain nombre de résultats de simulation montrant que la méthode est facilement applicable et qu'elle donne des résultats satisfaisants. On trouvera dans les ouvrages de Bose [5] et de Mersereau et Dudgeon [6] une présentation générale des problèmes de factorisation spectrale et de stabilisation des fonctions de transfert 2D.

Rappel des Résultats Théoriques

Le résultat fondamental utilisé ici s'énonce de la façon suivante :

Soit une densité spectrale 2D, $R(z_1, z_2)$ ne s'annulant pas sur $|z_1| = |z_2| = 1$, deux fois continument dérivable. On peut lui associer un facteur spectral $F(z_1, z_2)$, c'est à dire une fonction de transfert 2D causale au sens du demi-plan non symétrique (c'est la seule définition de la causalité qui soit générale) et à minimum de phase.

La projection de Radon de pente m d'une fonction $f(x, y)$ dont la transformée en z est $F(z_1, z_2)$ est (fig. 1)

$$f_m(x + my) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} f(x + mt, y - t) \quad (1)$$

Lorsque $m \rightarrow \infty$, la projection de Radon $f_m(t)$ du facteur spectral $f(x, y)$ associé à $R(z_1, z_2)$ tend vers la même limite que le facteur spectral $g_m(t)$ de la projection $r_m(t)$ de l'autocorrélation $r(x, y)$ associée à $R(z_1, z_2)$.

Une façon de stabiliser les fonctions de transfert consiste donc à effectuer les opérations suivantes :

- 1 - Calculer $r_m(t)$, ce qui revient pour les grandes valeurs de m à construire une séquence d'échantillons en plaçant bout à bout les lignes de $r(x, y)$ complétées par des zéros de telle sorte que chaque ligne comporte m échantillons.
- 2 - Calculer le facteur spectral de $r_m(t)$. Ce calcul peut s'effectuer dans le domaine temporel ou spectral ; nous avons utilisé les techniques temporelles et en particulier la factorisation de Levinson-Bareiss [7]-[8] dont l'implantation est extrêmement simple et régulière.
- 3 - Reconstituer la réponse impulsionnelle 2D par rétroprojection [6] : si m est suffisant et si la densité spectrale analysée est au moins deux fois

Abstract

The aim of this communication is to present some simulation results showing that it is possible to stabilize 2D transfer function by using 1D spectral factorization techniques ; there are three steps in the method : firstly a Radon projection gives a transfer function in the 1D domain, secondly this 1D transfer function is stabilized by spectral factorization, finally a backprojection gives the stable 2D transfer function.

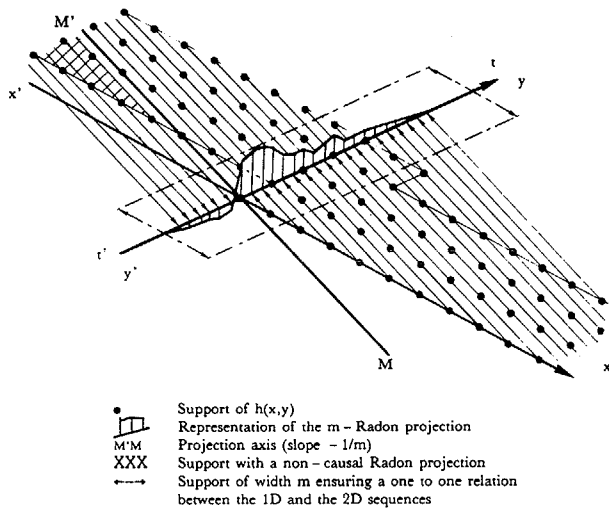


Fig. 1 : Representation of the m -Radon Projection of a causal sequence

continument dérivable, on peut considérer que $f(x, y)$ est nul en dehors de la bande

$$-m/2 \leq x < m/2$$

Il y a alors correspondance biunivoque entre les échantillons de la réponse impulsionnelle 2D et ceux de sa projection (la somme sur t dans (1) se réduit alors à un seul terme)

Quelques conditions de stabilité

Pour tester la stabilité des fonctions de transfert étudiées et celle déduites par l'algorithme de stabilisation, nous avons utilisé les théorèmes suivants :

1 - Un cas particulier du théorème de Rudin :

La projection de Radon permet d'interpréter dans le domaine spatial un cas particulier du théorème de Rudin [9] qui n'est souvent énoncé que dans le domaine des fréquences :

Si une fonction de transfert 2D causale polynomiale ou pseudo polynomiale ne s'annule pas sur $|z_1| = |z_2| = 1$, alors elle est à minimum de phase si et seulement si sa projection de Radon de pente m est à minimum de phase pour une valeur de m garantissant la causalité de la projection.

Remarquons que le test de stabilité des fonctions à deux variables comporte deux étapes, l'une est un test de stabilité 1D qui peut s'implanter simplement grâce au théorème de Schur-Cohn ; l'autre est un test d'annulation sur la frontière de bidisque unité dont l'implantation peut être plus délicate.



2 - Une extension 2D du théorème de Rouché :

Le théorème de Rudin permet d'énoncer une extension partielle du théorème de Rouché [10] aux fonctions 2D :

Si $F(z_1, z_2)$ est causale et à minimum de phase et si $G(z_1, z_2)$ est causale et vérifie

$$|G(e^{j\omega}, e^{j\nu}) - F(e^{j\omega}, e^{j\nu})| < |F(e^{j\omega}, e^{j\nu})| \quad (2)$$

alors $G(z_1, z_2)$ est aussi à minimum de phase. Ce théorème est particulièrement utile lorsqu'on cherche à analyser la stabilité d'une fonction de transfert telle que le support de son dénominateur $g(x, y)$ ne soit pas borné en x : on peut d'abord analyser la stabilité de sa restriction $f(x, y)$ à la bande $-m/2 \leq x < m/2$ pour une valeur de m suffisante pour que la condition (2) soit vérifiée et en déduire la stabilité de $g(x, y)$.

Quelques Résultats de Simulation

La technique de factorisation a été appliquée dans plusieurs cas. Les tableaux présentés donnent les résultats obtenus.

Premier cas : Application à un filtre instable lorsque la fonction stabilisatrice est un polynôme (table 1). Le fait que le facteur spectral soit un polynôme découle de ce que les échantillons de sa projection de Radon sont nuls avec une excellente approximation. L'algorithme proposé permet ainsi de vérifier si un polynôme est à minimum de phase (il doit être égal au facteur spectral de son autocorrélation).

Deuxième cas : Nous avons comparé les performances de deux techniques de factorisation dans le domaine temporel, celle de Levinson-Bareiss et celle de Bauer [11]. Cette dernière nécessite bien plus de calculs mais semble a priori moins sensible au bruit de calcul car elle prend en compte l'écart entre l'autocorrélation de la fonction estimée et l'autocorrélation initiale. Pourtant, elle converge moins bien que l'autre, sans doute du fait de l'accumulation des troncatures liée à la quantité de calcul qu'elle requiert : après 1000 itérations en double précision, la méthode de Levinson-Bareiss permet de retrouver un facteur spectral avec une précision de 10^{-17} , alors que la méthode de Bauer ne converge pas avec une précision supérieure à 10^{-7} .

Troisième cas : La fonction stabilisatrice n'est plus polynomiale mais reste rationnelle. Le polynôme

$$0.3 + 0.1z_1^{-1} + z_2^{-1}(1 + 0.5z_1^{-1})$$

qui n'est pas à minimum de phase a été analysé.

$$(1 + 0.5z_1^{-1}) + z_2^{-1}[0.1z_1^{-1} + 0.275 - 0.0375z_1(1 + 0.5z_1^{-1})^{-1}]$$

a la même densité spectrale. l'extension 2D du théorème de Rouché permet de dire qu'il est à minimum de phase. La méthode proposée en donne une bonne approximation (table 3).

Notons que si le facteur spectral n'est plus polynômial sa forme dépend du choix du demi-plan non symétrique. l'échange des deux axes conduit ici au résultat

$$(1 + 0.3z_2^{-1}) + z_1^{-1}[0.15z_2^{-1} + 0.495 - 0.0455z_2(1 + 0.3z_2^{-1})^{-1}]$$

Il serait intéressant de savoir dans quelle mesure le facteur spectral est une fraction rationnelle, mais il ne semble pas que ce soit un cas général.

Quatrième cas : La méthode a été appliquée à des polynômes variés, en particulier à des polynômes s'annulant sur $|z_1| = |z_2| = 1$. La "convergence" est bien plus lente, la méthode produit néanmoins une fonction à minimum de phase dont la réponse en fréquence approxime bien celle du polynôme initial (table 4).

La comparaison des lieux des racines de $F(e^{j\omega}, z)$ où $F(z_1, z_2)$ est le polynôme analysé et de la fonction reconstituée par rétroprojection à partir du résultat de la factorisation permet aussi d'estimer la qualité des résultats obtenus par la méthode proposée. Cette comparaison est faite sur deux exemples, l'un où le polynôme initial ne s'annule pas sur $|z_1| = |z_2| = 1$, et l'autre où il s'annule dans ce domaine. Dans le premier cas (fig. 2) on voit clairement l'effet de stabilisation, dans le second (fig. 3), la méthode produit une fonction stabilisatrice non nulle sur $|z_1| = |z_2| = 1$ et qui approxime bien celle obtenue en faisant la transformation $z \rightarrow 1/z$ sur les portions du lieu extérieures au cercle unité.

Conclusion

Nous avons donné un certain nombre de résultats montrant l'efficacité de l'utilisation des projections de Radon et de la factorisation spectrale de fonctions d'une variable pour tester la stabilité et stabiliser les fonctions de transfert de deux variables. Il est clair que cette projection permet aussi une approche cohérente de la factorisation spectrale par technique cepstrale ou par transformation de Hilbert dans le cas de causalité au sens du demi-plan non symétrique, plus générale que celle habituellement utilisée qui elle est fondée sur la causalité quart de plan [5]-[6]. Il reste dans ce cas à comparer l'efficacité (complexité, précision, vitesse) des approches temporelle et spectrale. Un intérêt supplémentaire de la méthode est l'extension directe des techniques de factorisation des densités spectrales matricielles au cas des fonctions de deux ou plusieurs variables.

Bibliographie

- [1] J. Le Roux, "Sur les algorithmes de factorisation spectrale dans le cas des signaux stationnaires échantillonnés," Thèse d'état, Université de Nice, Octobre 1985
- [2] J. Le Roux, "2D spectral factorization and stability tests for matrix polynomials based on the Radon projections," Proceedings of the ICASSP 86, Tokyo (Japon), Avril 1986, pp 1041-1044
- [3] J. Radon, "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten", Berichte Saechsische Akademie des Wissenschaften, vol. 69, 1917, pp 262-279.
- [4] S.W. Rowland, "Computer implementation of image reconstruction formulas", Image reconstruction from projections, Topics in Applied Physics, vol. 32, G.T. Herman, Ed., Springer Verlag, New-York, 1979, pp 9-79.
- [5] N.K. Bose, "Applied multidimensional system theory," Van Nostrand Reinhold, New York, 1982.
- [6] D.E. Dudgeon and R.M. Mersereau, "Multidimensional digital signal processing," Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1984.
- [7] E.H. Bareiss, "Numerical solution of linear equations with Toeplitz and vector Toeplitz matrices," Numer. Math., vol 13, 1969, pp 404-424.
- [8] J. Le Roux, "Some properties of the Schur recursion for the direct computation of the matricial spectral factor", Signal Processing, vol. 11, 1986, pp 359-367.
- [9] P. Delsarte, Y.V. Genin and Y.G. Kamp, "A simple proof of Rudin's multivariable stability theorem," IEEE Trans on ASSP, vol 28, n° 6, Dec. 1980, PP 701-705.
- [10] Y. Monden and S. Arimoto, "Generalized Rouché's theorem and its application to multivariate autoregressions," IEEE Trans on ASSP, vol 28, n° 6, Dec. 1980, PP 733-738.
- [11] D.C. Youla and N.N. Kazanjian, "Bauer type factorization of positive matrices and the theory of matrix polynomials orthogonal on the unit circle", IEEE Trans. on CAS, vol. 25, n° 2, Feb. 1978, pp 57-69.



Degree of the 2D Polynomial : 2 in x, 2 in y ;
Slope of the Projection : 98 ;
Number of Recursions : 5000 ;

Table with 5 columns: Projection Pixel Sample (x,y), Initial Polynomial, Spectral Factor, Polynomial Autocorrelation, Spectral Factor Autocorrelation. It contains numerical data for various (x,y) coordinates from (0,0) to (198,2,2).

Table 4 : Result of the factorization applied to a non minimum phase 2D polynomial

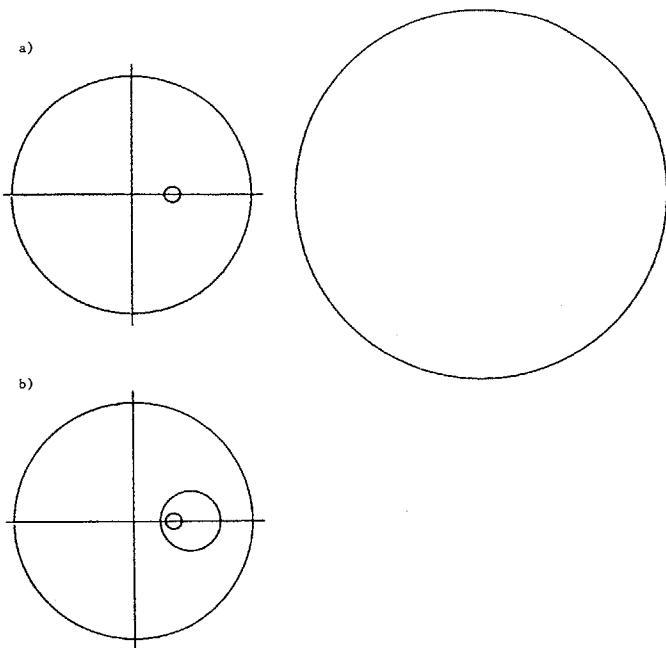


Fig. 2 : Root map of a 2D polynomial that does not vanish on the distinguished boundary (a) and of the corresponding spectral factor computed by the present projection factorization method (b)

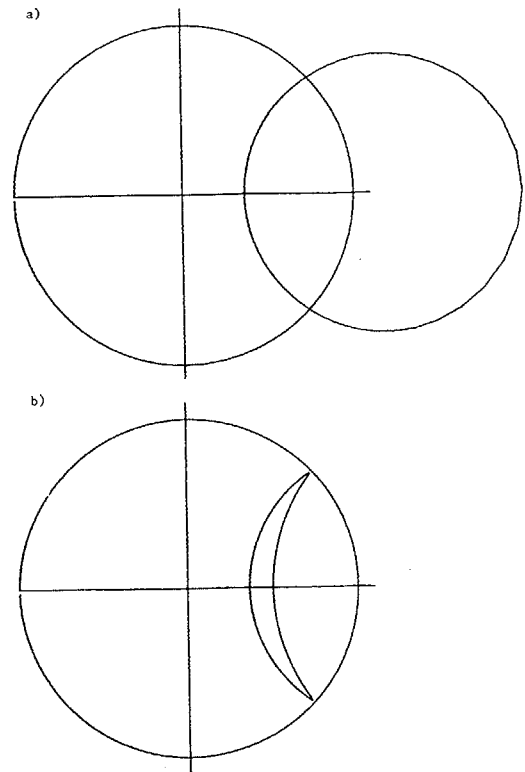


Fig. 3 : Root map of a 2D polynomial that vanishes on the distinguished boundary (a) and of an approximate stabilizing function computed by the present projection factorization method (b)