HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981

LA SENSIBILITE DES FILTRES ANALOGIQUES ET NUMERIQUES

Jacques MAX, Francis MERDRIGNAC, Henri LALEUF

Centre d'Etudes Nucléaires de GRENOBLE B.P. 85, 38041 GRENOBLE CEDEX

RESUME

Les filtres analogiques continus ont encore une grande utilité. Ce sont notamment des outils de traitement du signal très économiques. De tels filtres sont évidemment indispensables en tête de tout système de traitement numérique de signaux analogiques, puisque, préalablement à tout échantillonnage du signal il est indispensable de limiter son étendue en fréquence à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. L'apparition sur le marché d'amplificateurs opérationnels de très bonne qualité et de bas prix permet de réaliser sans difficultés des filtres. Il est indispensable de connaître l'effet sur les caractéristiques du filtre des éléments constitutifs. Etant donné qu'il existe plusieurs montages (ou structures) permettant de réaliser un même filtre de fonction de transfert H(j) il est donc nécessaire de les comparer du point de vue de leur sensibilité.

Si l'on étudie les variations des sensibilités en fonction de la fréquence, on s'aperçoit que ces sensibilités peuvent varier très rapidement au voisinage de la fréquence de résonance ; il convient alors de considérer les valeurs extrêmes des sensibilités. On voit alors qu'il n'y a qu'un rapport 4 entre les sensibilités extrêmes de la structure la moins sensible et de la structure la plus sensible. De plus, dès que l'on s'écarte de ± 20 % de la fréquence de coupure toutes les structures ont même sensibilité.

On en arrive ainsi à la conclusion nouvelle que toutes les structures ont à peu près la même sensibilité.Donc, lorsque l'on aura à réaliser des cellules de filtrage, on pourra, sans s'inquiéter des sensibilités, prendre la structure qui convient le mieux à la technologie choisie.

Puis on étudie la sensibilité des filtres numériques récursifs d'une part, et transverse d'autre part, de manière à en déduire le nombre de digits nécessaires au codage des coefficients.

Ceci fait apparaître la grande supériorité des filtres transverses sur les filtres récursifs.

SUMMARY

Analog filters are very useful. They are very cheap signal processing devices. Analog filters are also absolutely necessary before any sampling device in order to avoid abrasing effect.

It's now possible to realise with available components efficient and cheap filters. It's still necessary to know how variations on components affect the characteristics of filter, i.e. sensitivity of filter.

A lot of publications discuss about Q sensitivity, that means value of sensitivity at the cutt of frequency. That is inadequat because sensitivity varies very rapidly round cutt of frequency and it's necessary to know the extremal values of sensitivity Then we see that between different structures extremal sensitivity differ by a factor of four.

We can bring the conclusion that the different structures are equivalent ; in a second part we studies sensitivity of numerical recursive filters and transversal recursive filters and we show that transversal filters are better than recursive filters.

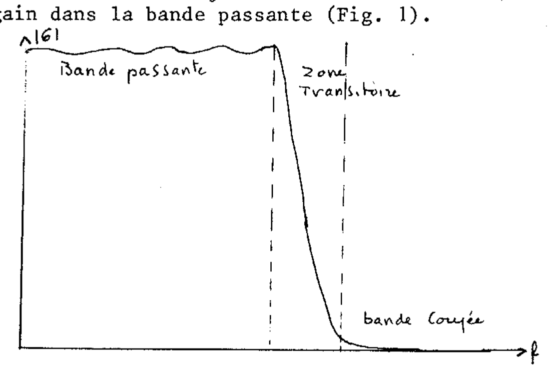
I - FILTRES ANALOGIQUES A TEMPS CONTINU

1 - Introduction

Les filtres analogiques continus ont une grande utilité. Ce sont notamment des outils de traitement du signal très économiques. De tels filtres sont évidemment indispensables en tête de tout système de traitement numérique de signaux analogiques, puisque, préalablement à tout échantillonnage du signal il est indispensable de limiter son étendue en fréquence à la moitié de la fréquence d'échantillonnage |1, 2|.

L'apparition sur le marché d'amplificateurs opérationnels de très bonne qualité et de bas prix permet de réaliser sans difficultés des filtres analogiques correspondant aux caractéristiques souhaitées |3,4|.

La qualité de ces filtres va résider non seulement dans la façon dont sont atténués les fréquences que l'on souhaite éliminer (pente de coupure du filtre) mais aussi dans la façon dont est assurée la constance du gain dans la bande passante (Fig. 1).



La figure 1 est représentée en coordonnées linéaires, car la représentation logarithmique a l'inconvénient de "cacher" les défauts du filtre dans la bande passante, car :

1 % en linéaire se traduit par 0,1 dB en log.

0,1 % " " par 0,01 dB en log.

2 - Principe de réalisation des filtres

Il est facile de réaliser un filtre, même d'ordre élevé, dès lors qu'on le réalise à partir de cellules du 2ème ordre dont les paramètres (gain statique, fréquence de coupure, amortissement) soient réglables indépendamment.

Les filtres analogiques continus, réalisés par des systèmes linéaires et invariants dans le temps sont régis par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Ces filtres ont des fonctions de transfert de la forme :

$$H_k(P) = \frac{c_k + d_k P + e_k P^2}{1 + a_k P + b_k P^2}$$

Cette fonction de transfert peut se mettre, par factorisation du numérateur et du dénominateur sous la forme d'un produit de termes de forme la plus générale

$$H_k(P) = \frac{c_k + d_k\, P + e_k\, P^2}{1 + a_k\, P + b_k\, P^2}$$

$d_k = e_k = b_k = 0$ passe bas 1er ordre

$c_k = e_k = b_k = 0$ passe haut 1er ordre

$d_k = e_k = 0$ passe bas 2ème ordre

$c_k = d_k = 0$ passe haut 2ème ordre

$c_k = e_k = 0$ passe bande 2ème ordre

$d_k = 0$ Cauer 2ème ordre

On sait calculer des filtres d'ordre aussi élevé que l'on veut tel que les variations du gain en fonction de la fréquence dans la bande passante (ces variations sont appelées "ondulations" ou "ripple" en anglais) aient une amplitude maximale donnée (1 dB, 0,5 dB, 0,3 dB, 0,1 dB, 0,05 dB).

Une fois les calculs faits on a obtenu des valeurs pour les divers éléments constitutifs du filtre, lors du réglage ces éléments (des résistances) sont ajustés de manière à donner au filtre les performances recherchées.

Mais ces éléments (résistances, capacités) peuvent évoluer dans le temps (vieillissement) ou sous l'influence d'une variation de température. Il est capital de savoir comment la variation de tel ou tel élément constitutif va agir sur la réponse en fréquence du filtre.

Cette influence est appelée la sensibilité du filtre.

3 - Sensibilité des filtres analogiques à temps continu

3 - 1. Définition

Soit $G(\omega)$ le module de la fonction de transfert H(P) du filtre réalisé par plusieurs cellules associées en cascade.

Soit $Z_{k\ell}$ l'impédance appelée de la cellule de rang k.

On définit la sensibilité par

$$S_G^{Z_{k\ell}}(\omega) = \frac{\partial G(\omega)}{\partial Z_{k\ell}} \cdot \frac{Z_{k\ell}}{G(\omega)} = Z_{k\ell}\,\frac{\partial \operatorname{Log} G(\omega)}{\partial Z_{k\ell}}$$

Les ouvrages les plus connus |3,4,5| ne calculent cette valeur que pour la valeur $\omega = \omega_0$ pulsation de coupure du filtre. Dans ce cas, le gain Q du filtre est égal à $\frac{1}{2\zeta}$ étant le coefficient d'amortissement que l'on retrouve dans la formule canonique d'un filtre du 2ème ordre :

$$\frac{1}{1 + 2\zeta TP + T^2P^2} \; ; \; \frac{T^2P^2}{1 + 2\zeta TP + T^2P^2} \; ; \; \frac{TP}{1 + 2\zeta TP + T^2P^2}$$

On appelle Q cette valeur $\frac{1}{2\zeta}$

A partir du calcul de la sensibilité à la seule fréquence ω_0 la plupart des auteurs comparent les différentes structures permettant de réaliser une cellule du deuxième ordre, et en tirent la conclusion que certaines structures ont des sensibilités de 1, -1, ou zéro, alors que d'autres ont des sensibilités de 2 Q = $\frac{1}{\zeta}$, ces résultats ne sont pas suffisants pour comparer entre elles différentes structures.

Mais les sensibilités $S^{Z_{k\ell}}$ ne représentent les sensibilités qu'en un point, Q alors qu'il faut connaitre la sensibilité pour toute valeur de la fréquence (ou de la pulsation ω: $2\pi f$).

Nous allons montrer que les conclusions que l'on peut tirer des comparaisons des sensibilités $S_G^{Z_k}$ sont différentes de celles tirées des comparaisons des sensibilités $S_Q^{Z_k}$.

Ceci est très important pour le choix des structures de filtres, d'après les conclusions jusqu'ici présentées la structure biquadratique paraît toujours très supérieure aux autres structures, nous allons voir qu'il n'en est rien.

3 - 2. Calcul de la sensibilité d'un filtre formule générale

Le filtre le plus général a une fonction de transfert de la forme :

$$H(P) = \prod_{k=1}^{m} \frac{c_k + d_k P + e_k P^2}{1 + a_k P + b_k P^2}$$

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{(c_k - e_k\,\omega^2)^2 + d_k\,\omega^2}}{\sqrt{(1-b_k\omega^2)^2 + a_k^2\omega^2}}$$

on en tire :

$$\frac{\partial\, L\, G(\omega)}{\partial Z_{k\ell}} = \frac{(c_k - e_k\omega^2)\,\dfrac{\partial c_k}{\partial Z_{k\ell}} - (c_k - e_k\omega^2)\,\omega^2\,\dfrac{\partial e_k}{\partial Z_{k\ell}} + \omega^2\, d_k\,\dfrac{\partial d_k}{\partial Z_{k\ell}}}{(c_k - e_k\omega^2)^2 + d_k^2\,\omega^2} + \frac{\omega^2\,(1-b_k\omega^2)\,\dfrac{\partial b_k}{\partial Z_{k\ell}} - a_k\,\omega^2\,\dfrac{\partial a_k}{\partial Z_{k\ell}}}{(1-b_k\omega^2)^2 + a_k^2\omega^2}$$

selon la structure choisie les coefficients a, b, c, d, e, s'expriment différemment en fonction des Z_ℓ il faut donc calculer pour chaque structure la fonction de transfert de la cellule, puis la sensibilité.

3 - 3. Filtres du 1er ordre passe haut ou passe bas.

On s'aperçoit que, quelle que soit la structure choisie, passive (fig. 2), a amplificateur opérationnel avec changement de signe (fig. 3) sans changement de signe (fig.4)

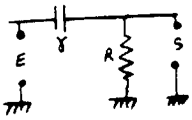


Fig. 2

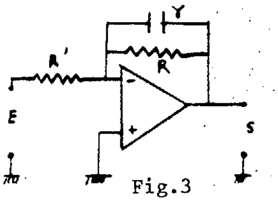


Fig.3

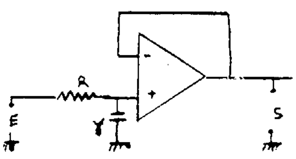


Fig. 4

La sensibilité maximale vaut 1 en valeur absolue.

3 - 4. Filtres du deuxième ordre

Ici on a le choix entre un très grand nombre de structures. On calcule, pour chaque structure de cellule du deuxième ordre passe haut, passe bas, passe bande, les fonctions de transfert correspondantes puis les sensibilités, puis les valeurs extrêmes des sensibilités.

Ceci nécessite des calculs simples mais longs.

On montre que pour deux structures, les sensibilités extrêmes ont des valeurs absolues de $\frac{1}{\zeta}$ $\frac{1}{1-\zeta}$ $\frac{Q}{2}$ ce sont les structures passives, qu'elles soient passe bas (fig.5), passe bande (fig. 6) ou passe haut (fig. 7).

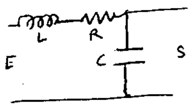


Fig. 5

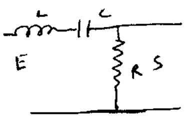


Fig. 6

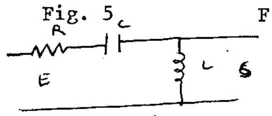


Fig. 7

et les structures biquadratiques pures, passe-bas, passe-bande ou passe-haut (fig.8).

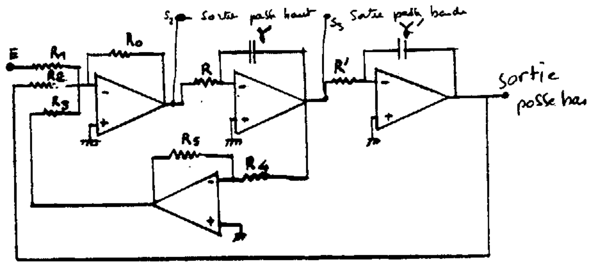


Fig.8

La variation des sensibilités qui ont la plus grande valeur extrême (en valeur absolue) a l'allure représentée sur la figure 9

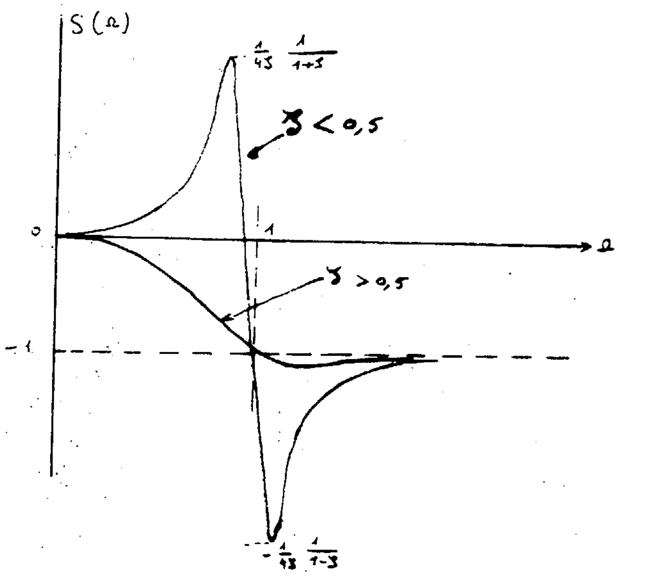


Fig. 9

pour d'autres structures, telle que la structure représentée figure 10, dérivée de la structure précédente et utilisée par Burr-Brown

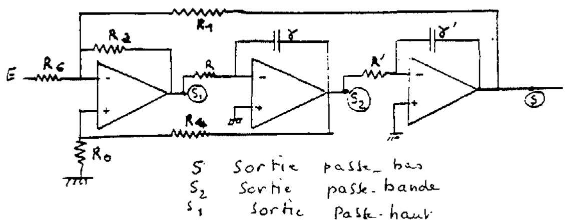
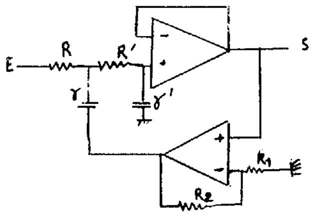


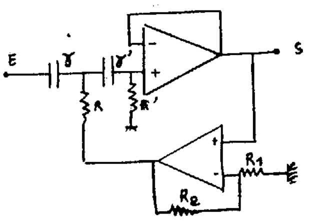
Fig. 10

ou la structure S_2M (structure de Max-Merdrignac) Fig. 11 et 12.



S_2M PB

Fig. 11



S_2M PH

Fig. 12

les calculs montrent que la valeur absolue zxtrême des sensibilités est $\frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1-\zeta} \# 2Q$

L'allure des variations de S est la même que celle représentée sur la figure 9.

Ceci montre que entre la meilleure structure et la plus mauvaise, il n'y a qu'un rapport de 4 sur les sensibilités extrêmes.

Ceci permet de conclure à une quasi équivalence en sensibilité des différentes structures.

II - FILTRES NUMERIQUES [6, 7]

1 - Filtres numériques récursifs transposés d'un filtre analogique

Pour des questions de stabilité, on a toujours intérêt à réaliser un filtre récursif par association en cascade de cellules du 1er ordre ou 2ème ordre.

Du fait que les filtres analogiques sont décomposés en association en cascade de cellules du 1er ou 2ème ordre, il en sera de même pour le filtre numérique récursif associé ; il existe une correspondance très simple entre les cellules analogiques passe-haut et passe-bas du 1er ordre, passe-haut, passe-bas, passe-bande du 2ème ordre et leur équivalent numérique récursifs [6].

2 - Sensibilité

L'erreur sur le codage des coefficients étant une erreur absolue($\pm$ 1/2 bit), la sensibilité sera définie par :

$$S_G^{\lambda k}(\omega) = \frac{\delta \mathrm{Log}\ G(\omega)}{\delta\ \lambda k}$$

on trouve alors, pour la cellule récursive transposée de la cellule analogique

$$\frac{1}{1 + 2\zeta\theta P + \theta^2 P^2}$$

une valeur extrême de la sensibilité

$$\frac{1}{4\zeta} \times \frac{1}{\left(\frac{T_e}{\theta}\right)^2}$$ T_e période d'échantillonnage

c' est donc la sensibilité du filtre analogique multipliée par $\frac{1}{\left(\frac{Te}{\theta}\right)^2}$ ou $\left(2\pi\frac{Fc}{Fe}\right)^2$ Fc fréquence de coupure
Fe fréquence d'échantillonnage

pour le filtre du 1er ordre, là où, en analogique la sensibilité maximale était 1 on trouve pour le filtre numérique récursif équivalent

$$\frac{1}{\frac{T_e}{\theta}} = \frac{2\pi Fc}{Fe}$$

Si on considère la condition de stabilité du filtre, on trouve que pour une cellule du 1er ordre ou du 2ème ordre, c'est le plus souvent la condition de sensibilité qui sera prépondérente.

Nous n'avons pas considéré les cellules récursives d'ordre supérieur à 2, car la condition de stabilité conduit à des codages des coefficients avec un nombre de bits prohibitif.

2 - Filtres transverses

Pour ces filtres il n'y a plus de condition de stabilité, ils sont toujours stables et on montre que la sensibilité^x est de l'ordre de $\sqrt{N}$ N étant la longueur du filtre, c'est-à-dire le nombre d'échantillons qui définissent la réponse impulsionnelle.

Ces filtres ont une sensibilité très inférieure à celle des filtres récursifs.

III - BIBLIOGRAPHIE

[1] J. MAX, F. MERDRIGNAC, H. LALEUF
Etude de la sensibilité des filtres analogiques continus (à temps continu)
Note technique LETI-MCTE N° 1379

[2] J. MAX
Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques 3ème édition MASSON 1981.

[3] P. BILDSTEIN
Les filtres actifs Editions Radio 1976.

[4] M. GAZIN
Filtres actifs à amplificateurs opérationnels Thomson CSF 1974.

[5] SOFRONIE STEFANESCU
Filtres électriques Masson 1972.

[6] J. MAX, F. MERDRIGNAC, J.C. DUBUIS, J. DUFNER
Les filtres numériques de fréquence
Note Technique LETI-MCTE N° 1406

[7] J. MAX, F. MERDRIGNAC
La sensibilité des filtres numériques
(Note Technique LETI MCTE à paraître)

^{x}définie par $S_G^{\lambda}(\omega) = \frac{d\,G(\omega)}{d\lambda k}$