

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

911



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

DIVERSITE ET CODAGE EN TRANSMISSION NUMERIQUE PAR VOIE RADIOELECTRIQUE

Gérard BATAIL

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Département "Systèmes et Communications"

46 rue Barrault 75634 PARIS CEDEX 13

RESUME

On se propose de traiter de la diversité, du codage correcteur et de leur emploi conjoint, pour un modèle très simple de voie radioélectrique: on suppose les signaux reçus en présence de bruit additif, gaussien et blanc avec démodulation cohérente, soit en l'absence de fluctuations, soit en présence de fluctuations de Rayleigh lentes. Ce modèle simpliste ne prétend qu'à rendre les calculs possibles (encore ne sont-ils qu'approximatifs), pour illustrer des idées qui ont une portée beaucoup plus générale.

Après avoir introduit un formalisme approprié, nous analysons d'abord la diversité. Il apparaît que même la diversité à l'émission, où l'énergie disponible par symbole à transmettre est partagée entre les émissions répétées d'un même symbole, est bénéfique en présence de fluctuations.

Nous rappelons ensuite notre interprétation du codage comme système de diversité à l'aide d'un exemple très simple que nous généralisons ensuite. Cette interprétation conduit au décodage des codes linéaires, symbole par symbole et pondéré, dit "par répliques". Un calcul d'une borne supérieure approximative de la probabilité d'erreur résiduelle montre que, sous les hypothèses indiquées, le codage fait un bien meilleur usage de la redondance que la diversité quand le canal est bon. S'il est mauvais, la diversité procure encore un bénéfice, mais non plus le codage, pour lequel l'énergie émise pour transmettre les symboles de redondance est alors perdue. L'intérêt d'un emploi conjoint des deux techniques, la diversité permettant au codage d'atteindre le niveau de qualité nécessaire à son emploi efficace, apparaît alors à l'évidence.

SUMMARY

This paper is intended to deal with diversity, error-correcting coding, and joint use of both techniques. It will use a very simple model of a radio channel, where the signals are assumed to be received in the presence of additive Gaussian and white noise with coherent demodulation, either assuming a constant received power or slow Rayleigh fading. Such a simplistic model is intended only in order to enable tractable (although approximate) computations, as an illustration of more general ideas.

After introducing an appropriate formalism, we first analyze diversity. It appears that even transmission diversity i.e., where the available energy per information symbol is shared between the repeated transmissions of a same symbol, yields improved performance in the fading case.

We then recall our interpretation of coding as a diversity system, first using a very simple example, to be later extended. This interpretation leads to weighted symbol-by-symbol decoding of linear codes, referred to as "replication decoding". An approximate upper bound on the probability of decoding error shows that, under the assumptions indicated, coding makes a more efficient use of redundancy than diversity when the channel is good. When it is poor, however, diversity still results in an improvement but no longer coding: the energy used in transmitting the redundant symbols is lost in this case. The interest of joint use of both techniques, where diversity enables coding to reach the quality level it needs to become efficient, then appears obvious.



1 - Introduction: un modèle simple des voies

radioélectriques

Les voies radioélectriques sont très diverses selon leur fréquence. Leurs caractéristiques communes peuvent cependant être décrites - à grands traits - par deux types de phénomènes:

- propagation à travers des milieux fluctuants, par exemple affectés de trajet multiple variable, de telle sorte que l'amplitude et la phase du signal reçu varient aléatoirement dans le temps et/ou la fréquence;
- réception en présence de fortes perturbations: bruits stationnaires tels que le bruit thermique du récepteur et aussi non stationnaires, souvent prédominants: parasites atmosphériques ou artificiels, brouilleurs involontaires ou intentionnels ...

Une hypothèse de quasi stationnarité nous fournira un modèle simple de ces voies: nous supposons que le signal est reçu en présence de bruit additif, gaussien, stationnaire et blanc, mais que les fluctuations du signal et du bruit entraînent des variations lentes du rapport signal à bruit. Nous supposons même, pour la facilité de l'analyse, qu'une démodulation cohérente est effectuée (un asservissement de phase pouvant être maintenu grâce à la lenteur supposée des fluctuations). Nous ne nous intéressons qu'aux communications numériques, de sorte que variation lente signifie que la puissance du signal et la variance du bruit restent à peu près constants à l'échelle de la durée d'un symbole. Nous examinerons d'abord le cas où la puissance du signal et la variance du bruit restent constantes, puis le cas où ces grandeurs varient lentement. Dans ce dernier cas, nous admettrons que la probabilité d'erreur à un instant donné reste exprimée par la relation établie dans l'hypothèse où les grandeurs sont constantes et nous obtiendrons les variations de cette probabilité d'erreur en faisant varier le rapport signal à bruit pour tenir compte des fluctuations. Nous ne développerons les calculs que pour des fluctuations selon la loi de Rayleigh.

Il s'agit bien entendu d'un modèle simpliste. Son emploi nous permettra d'aboutir facilement à des conclusions assez générales pour s'appliquer aussi à des modèles plus réalistes et plus compliqués, mais dont l'analyse quantitative aurait été très difficile ou impossible.

Ainsi, en désignant par E_b l'énergie moyenne disponible par symbole binaire et par N_0 la densité spectrale unilatérale du bruit, on obtient pour probabilité d'erreur moyenne

$$p_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(E_b/N_0)^{1/2}, \quad \operatorname{erfc}(x) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt \quad (1)$$

dans l'hypothèse d'une modulation binaire antipodale avec démodulation cohérente, en l'absence de fluctuations, et

$$p_e = 1/2 \left[E_b/N_0 + 1 + \sqrt{(E_b/N_0)^2 + 4(E_b/N_0 + 1)} \right] \quad (2)$$

avec les mêmes procédés de modulation et démodulation mais pour un signal affecté de fluctuations selon la loi de Rayleigh.

Avec une modulation binaire orthogonale et démodulation incohérente, on aurait

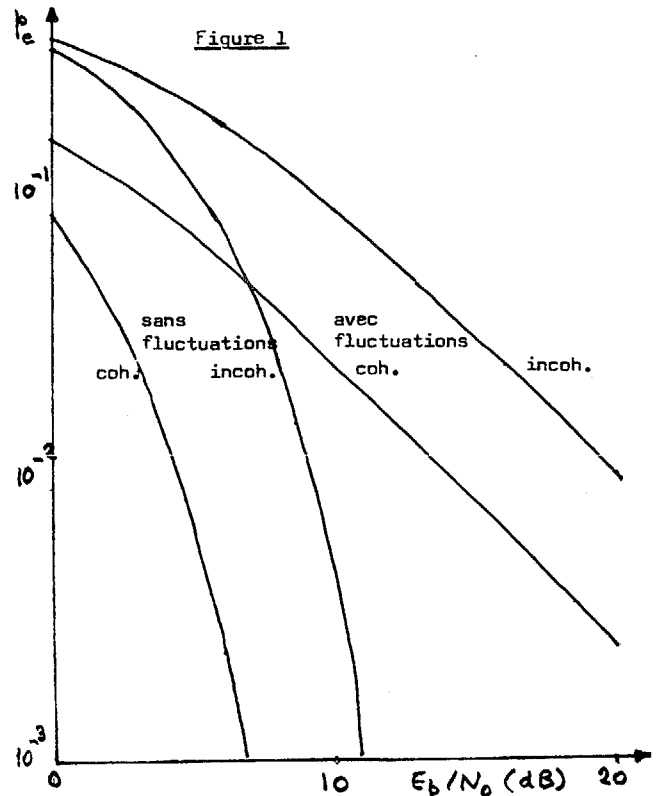
$$p_e = \frac{1}{2} \exp(-E_b/2N_0) \quad (3)$$

en l'absence de fluctuations et

$$p_e = 1/(2 + E_b/N_0) \quad (4)$$

en présence de fluctuations de Rayleigh.

Ces résultats sont bien connus, à l'exception de (2) qui est établi dans /1/. Les courbes correspondantes sont tracées sur la Fig. 1. On remarquera que l'hypothèse des fluctuations du signal reçu transforme profondément les résultats. Au lieu d'une variation exponentielle de la probabilité d'erreur en fonction du rapport signal à bruit, on a une variation homographique, beaucoup moins brusque.



2 - Diversité et codage

Le remède le plus classiquement apporté aux perturbations qui affectent les voies radioélectriques est la diversité. Elle consiste à transmettre la même information sur plusieurs canaux, autant que possible indépendants quant aux perturbations. Nous distinguerons deux principaux types de diversité:

- diversité à la réception, lorsque plusieurs chemins, différant par le lieu de réception, l'angle d'arrivée, la polarisation ... sont exploitables;
- diversité à l'émission, lorsque les symboles sont simplement répétés à des instants différents, ou émis sur des fréquences différentes, simultanément ou non.

Dans le premier cas, pour une même puissance émise, le récepteur recueille d'autant plus d'énergie utile par symbole qu'il exploite davantage de chemins physiquement distincts. L'accroissement d'énergie reçue est un don du milieu de propagation, exploitable au seul prix de l'accroissement de complexité du récepteur. Dans le second cas, au contraire, l'énergie disponible par symbole est partagée entre les émissions répétées d'un même symbole et le procédé ne tire pas ses avantages d'un accroissement de l'énergie reçue.

Un autre procédé, moins classique, est le codage "correcteur d'erreurs". On peut globalement caractériser son résultat par une amélioration de la probabilité d'erreur par symbole. Si l'on compare le gain en rapport signal à bruit qu'il procure pour une puissance reçue, soit constante, soit affectée de fluctuations, il est évident à l'examen de la Fig. 1 que son emploi est beaucoup plus intéressant en présence de fluctuations: ainsi, le gain d'un facteur 10 sur la probabilité d'erreur équivaut à environ 1 dB dans le premier cas mais 10 dB dans le second. Il s'agit là cependant d'une possibilité dont la réalisation effective pose des problèmes sur lesquels nous reviendrons.

Nous avons proposé /2-4/ une interprétation du codage correcteur comme un procédé de diversité, permettant ainsi d'utiliser un formalisme commun pour analyser les deux techniques, facilitant leur comparaison et montrant en fait leur complémentarité. L'intérêt de cette interpréta-

tion nous paraît être d'abord de fournir, du succès d'une technique qui a son langage et ses méthodes propres, une explication empruntée à une technique plus ancienne et mieux comprise. Elle peut aussi aider à déterminer un compromis acceptable entre la complexité et les performances d'un système de transmission et mettre en lumière certaines des propriétés du codage. Nous examinerons successivement:

- pourquoi la diversité améliore la probabilité d'erreur en présence de fluctuations;
- l'interprétation du codage comme un système de diversité et ses conséquences;
- l'emploi conjoint de la diversité et du codage.

Il nous faut auparavant introduire un formalisme peu usuel, mais bien adapté au problème.

3 - Définition de la valeur relative associée à une décision

Nous nous restreindrons au cas où les symboles sont binaires, le plus simple et le plus important en pratique (mais les moyens de généraliser à un alphabet quelconque existent /3,4/). Nous associerons à la réception de tout symbole binaire un nombre réel, sa valeur relative (v. r.),

$$a = \log \Pr(\underline{y}/c = 0) - \log \Pr(\underline{y}/c = 1) \quad (5)$$

où \underline{y} est le signal observé en réception et c est le symbole émis. Les logarithmes sont supposés népériens mais le choix de leur base est en fait arbitraire.

Les signaux émis peuvent être représentés par deux vecteurs $\underline{x}^c = [x_1^c \ x_2^c]$, $c \in \{0,1\}$ par rapport à la base orthonormée d'un espace à deux dimensions au plus (d'après Gram-Schmidt) et ces vecteurs sont connus du récepteur puisque l'on suppose la démodulation cohérente. Les composantes du bruit selon chacune des dimensions de l'espace sont mutuellement indépendantes et ont pour densité de probabilité commune

$$p_n(x) = (\pi N_0)^{-1/2} \exp(-x^2/N_0). \quad (6)$$

On peut alors donner de a l'expression

$$a = 2 y_p d/N_0, \quad (7)$$

où d est la distance euclidienne entre les signaux \underline{x}^0 et \underline{x}^1 et y_p est la projection de \underline{y} sur le support de $\underline{x}^0 - \underline{x}^1$. Dans le cas le plus favorable (binaire antipodal), $d = 2 \sqrt{E_b}$.

La valeur relative a indique à la fois quelle décision est prise par le démodulateur et quelle est la fiabilité de cette décision. En effet, son signe représente la décision binaire à vraisemblance maximale \hat{c}

$$\text{sgn}(a) = (-1)^{\hat{c}}, \quad (8)$$

puisque cette décision consiste à choisir l'hypothèse quant à c qui rend $\Pr(\underline{y}/c)$ maximal et que a est définie par (5). Son module $|a|$ mesure la fiabilité de la décision prise par la différence des vraisemblances logarithmiques des deux hypothèses. Après transformation selon la règle de Bayes

$$a = \log[\Pr(c=0/\underline{y})/\Pr(c=1/\underline{y})] - \log[\Pr(c=0)/\Pr(c=1)],$$

nous pouvons récrire

$$a = (-1)^{\hat{c}} \log \left\{ \frac{1 - \Pr(\hat{c} \neq c/\underline{y})}{\Pr(\hat{c} \neq c)} \right\} \quad (9)$$

qui fait apparaître la décision prise \hat{c} et la probabilité qu'elle soit erronée dans l'hypothèse où les probabilités a priori des symboles 0 et 1 sont égales.

4 - La valeur relative en tant que variable aléatoire

La définition (5) que nous avons donnée de la valeur relative associée à une décision binaire implique qu'il s'agit d'une variable aléatoire. En effet, a y dépend explicitement de signal observé \underline{y} qui est aléatoire. Nous intéresserons au cas de bruit gaussien additif où \underline{y} est continu, nous considérerons la v.r. (notée A en tant que variable aléatoire) comme continue.

La variable aléatoire A n'est pas quelconque, en ce sens que sa densité de probabilité satisfait à une contrainte qui va maintenant être énoncée, sous une hypothèse de symétrie souvent vérifiée, en particulier dans le cas gaussien additif.

Considérons deux valeurs opposées, $\pm a$, prises par A . Soit, pour un symbole émis c donné, les deux ensembles $dY_+ = \{y: A \in (a, a+da)\}$ et $dY_- = \{y: A \in (-a-da, -a)\}$. D'après la définition (5), on a donc

$$\begin{aligned} a &= \log \Pr(\underline{y} \in dY_+/c=0) - \log \Pr(\underline{y} \in dY_+/c=1) \\ &= \log \Pr(\underline{y} \in dY_-/c=1) - \log \Pr(\underline{y} \in dY_-/c=0). \end{aligned}$$

L'hypothèse de symétrie que nous sommes amenés à introduire est, avec $c + \bar{c} = 1$ et quel que soit c :

$$\Pr(\underline{y} \in dY_+/c) = \Pr(\underline{y} \in dY_-/\bar{c}).$$

D'après les définitions mêmes de dY_+ et dY_- ,

$$\Pr(\underline{y} \in dY_+/c) = p_{A/c}(a) da,$$

$$\Pr(\underline{y} \in dY_-/\bar{c}) = p_{A/\bar{c}}(-a) da, \text{ d'où la relation}$$

$$p_{A/c}(a) = e^{(-1)^c a} p_{A/\bar{c}}(-a). \quad (10)$$

Une conséquence de (10) est que la moyenne de A a pour signe $(-1)^c$, c étant le symbole émis. En effet

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} a p_{A/c}(a) da &= \int_0^{+\infty} a [p_{A/c}(a) - p_{A/c}(-a)] da \\ &= \int_0^{+\infty} a p_{A/c}(-a) [e^{(-1)^c a} - 1] da, \end{aligned}$$

expression ayant pour signe $(-1)^c$.

Dans le cas gaussien, par exemple antipodal, soit $(-1)^c m$, m positif, et σ^2 la variance de la variable aléatoire A . On a d'après (6) et (7) une densité de probabilité de la forme

$$p_{A/c}(a) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-(a - (-1)^c m)^2/2\sigma^2]$$

et (10) entraîne

$$\begin{aligned} \exp[-(a - (-1)^c m)^2/2\sigma^2] &= \exp[-(a + (-1)^c m)^2/2\sigma^2 + a] \\ \text{d'où } m &= \sigma^2/2. \end{aligned}$$

Rappelons que la décision à vraisemblance maximale est représentée par le signe de la v.r. Une décision erronée est donc prise toutes les fois que la valeur prise par A est d'un signe différent de celui de sa moyenne. La probabilité d'erreur moyenne a donc pour expression

$$p_e = \Pr(c=0) \int_{-\infty}^0 p_{A/0}(a) da + \Pr(c=1) \int_0^{+\infty} p_{A/1}(a) da;$$

et, en raison de la symétrie:

$$p_e = \int_0^{+\infty} p_{A/1}(a) da. \quad (11)$$

D'après (7) et sachant que y_p a pour variance $N_0/2$,

$$m = 4E_b/N_0; \quad (12)$$

compte tenu de la relation entre moyenne et variance d'une v.r., la densité de probabilité de A s'écrit

$$p_{A/c}(a) = \frac{1}{2} (\pi m)^{-1/2} \exp[-(a - (-1)^c m)^2/4m] \quad (13)$$

à quoi correspond d'après (11) la probabilité d'erreur

$$p_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(\frac{1}{2} m^{1/2}) = \frac{1}{2} \text{erfc}(E_b/N_0)^{1/2} \quad (14)$$

la seconde égalité d'après (12), expression bien connue que l'on s'attendait à retrouver.



5 - Analyse de la réception de données binaires en diversité

Nous prendrons pour modèle de la réception numérique en diversité le schéma de la Figure 2. Nous désignerons par répliques indépendantes du symbole émis les symboles reçus correspondants, dans l'hypothèse où les signaux qui les représentent ont été perturbés par des bruits indépendants (cela pouvant correspondre, comme sur la Fig., à des voies physiquement distinctes, ou à une voie unique utilisée à des instants suffisamment différents pour assurer l'indépendance des bruits perturbateurs). Le résultat le plus important sur cette réception en diversité est l'énoncé suivant (qui justifie dans une large mesure l'utilisation de la valeur relative): la valeur relative a associée à la décision à vraisemblance maximale quant au symbole émis est la somme des valeurs relatives a_i , $i = 1, 2, \dots, r$, associées à chacun des symboles émis

$$a = \sum_{i=1}^r a_i \quad (15)$$

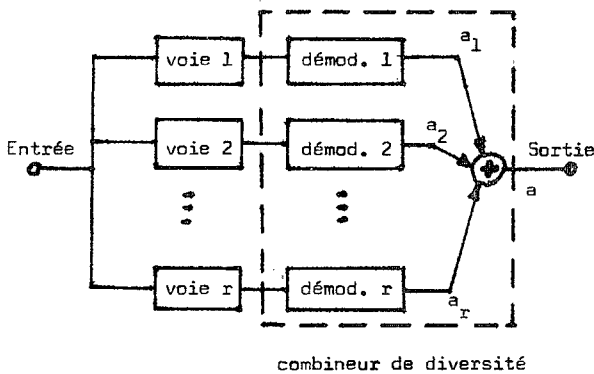


Figure 2: Schéma de la diversité

La relation (15) est la simple conséquence de la définition (5). L'hypothèse de l'indépendance du bruit dans les r voies entraîne que

$$\Pr\{y_1, y_2, \dots, y_r/c\} = \Pr\{y_1/c\} \Pr\{y_2/c\} \dots \Pr\{y_r/c\}$$

d'où le résultat annoncé.

Dans l'hypothèse où les v.r. des symboles reçus sont gaussiennes avec la distribution (13), m_i étant la valeur absolue de la moyenne de la i -ème d'entrée elles, il découle de (15) que la v.r. A_d de la décision optimale est égale à la somme de ces v.r.; elle a donc encore une distribution de la forme (13), de moyenne

$$m_d = \sum_{i=1}^r m_i \quad (16)$$

Soient E_b^i et N_0^i l'énergie reçue par symbole et la densité spectrale du bruit pour la i -ème voie. D'après (12) et (16):

$$m_d = 4 \sum_{i=1}^r E_b^i / N_0^i \quad (17)$$

Le système de diversité optimal se comporte donc comme une voie gaussienne unique qui aurait pour rapport signal à bruit la somme des rapports E_b^i / N_0^i et donc la probabilité d'erreur, d'après (14):

$$p_d = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\sum_{i=1}^r E_b^i / N_0^i} \quad (18)$$

Cela met en évidence une amélioration par rapport à chacune des voies individuelles. On montre d'ailleurs [1,2] que cette amélioration est générale, quelle que soit la densité de probabilité des v.r. associées aux symboles reçus.

Examinons les conséquences de ce résultat simple dans différents cas. Pour la diversité à l'émission, on a

$$\sum_{i=1}^r E_b^i = E_b, \text{ constante}$$

en l'absence de fluctuations. Si $N_0^i = N_0$ pour tout i , (18) se réduit tout simplement à (14) et il est évident que la diversité n'apporte aucun bénéfice.

Dans notre modèle d'une voie fluctuante, nous avons encore une même densité spectrale du bruit N_0 , mais E_b^i est devenue une variable aléatoire indépendante des autres et ayant pour densité de probabilité

$$p_{E_b^i}(x) = (1/E_i) \exp(-x/E_i), \quad x \geq 0 \quad (19)$$

où E_i est l'énergie moyenne par symbole reçue de la i -ème voie. L'expression (17) de m_d fait apparaître la somme des E_b^i , qui a pour densité le produit de convolution de (19) r fois par elle-même soit, avec $E_i = E_b/r$ et en désignant par E la somme des énergies:

$$p_E(x) = (r/E_b)^r x^{r-1} / (r-1)! \exp(-xr/E_b) \quad (20)$$

La probabilité d'erreur moyenne est alors

$$p_d = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \operatorname{erfc}(x/N_0) p_E(x) dx \quad (21)$$

expression dont le calcul est malaisé, mais dont on peut établir une majoration simple mais grossière. On sait que

$$\operatorname{erfc}(x/N_0) < \exp(-x/N_0), \quad x > 0 \quad (22)$$

En substituant dans (21), on obtient une intégrale connue [5], d'où

$$p_d < \frac{1}{2} (1 + E_b/rN_0)^{-r} \quad (23)$$

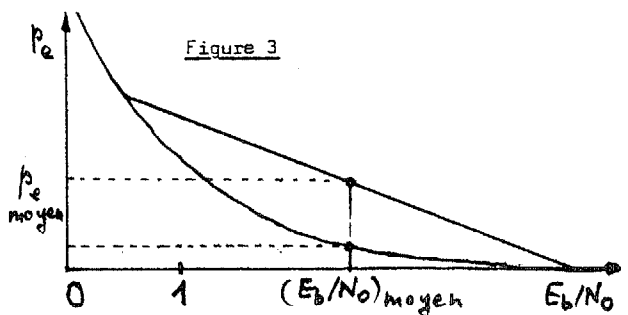
Pour E_b/N_0 constant, on voit que p_d est majorée par une fonction décroissante de r , qui tend pour r infini vers $\frac{1}{2} \exp(-E_b/N_0)$. Cette limite est la même que la borne (22) appliquée à (14). En fait, la limite pour r infini est exactement (14), d'après (21) et parce que la densité (20) tend vers $\delta(x - E_b)$. En effet, son moment d'ordre n a pour expression

$$\begin{aligned} m_n &= (r/E_b)^r (1/(r-1)!) \int_0^{+\infty} x^{r+n-1} \exp(-xr/E_b) dx \\ &= (E_b/r)^n (r+n-1)! / (r-1)! \end{aligned}$$

En remplaçant les factorielles selon la formule de Stirling on obtient que, pour r devenant infini, m_n tend vers E_b^n , ce qui implique le résultat annoncé. On peut donc conclure que, pour une énergie moyenne par symbole reçu constante, l'accroissement de r améliore la probabilité d'erreur: le résultat obtenu asymptotiquement pour r infini est le même qu'en l'absence de fluctuations.

La validité de cette conclusion n'est pas restreinte au modèle choisi. En effet, si l'on considère n'importe quelle distribution $p_E(x)$ de cette énergie par symbole au lieu de (19), la probabilité d'erreur moyenne en l'absence de diversité reste exprimée par (21). L'emploi de diversité d'ordre r tendant vers l'infini conduit à la probabilité d'erreur beaucoup plus faible donnée par (14).

C'est ce que montre la Fig. 3. On y a représenté la courbe de la probabilité d'erreur en fonction du rapport signal à bruit. Cette courbe est décroissante et convexe qu'il s'agisse de la fonction (14) ou (3) (on notera que cette convexité est masquée lorsque l'on utilise des échelles logarithmiques selon l'usage courant, auquel est d'ailleurs conforme la Fig. 1). D'après le théorème de Jensen, la moyenne des probabilités d'erreur est supérieure (très supérieure le plus souvent) à la probabilité d'erreur associée au rapport signal à bruit moyen, atteint asymptotiquement en utilisant la diversité à l'émission.



Donc la diversité à l'émission, sans effet en l'absence de fluctuations, annule asymptotiquement la dégradation de la probabilité d'erreur qui leur est due.

La diversité à la réception, grâce à l'augmentation de l'énergie reçue par symbole binaire, apporte un bénéfice même en l'absence de fluctuations, outre celui d'en annuler asymptotiquement les effets qui, bien entendu, subsiste.

6 - Le codage en tant que procédé de diversité

6.1- Un exemple très simple

Nous nous proposons maintenant d'introduire notre interprétation du codage comme procédé de diversité. Nous considérerons d'abord l'exemple de la Fig. 4, le plus simple possible. Nous désignons par canal l'ensemble du modulateur, de la voie de transmission et du démodulateur pondéré: il reçoit donc des symboles binaires et délivre des nombres réels, les v.r. associées aux décisions du démodulateur.

Nous supposons qu'au lieu de transmettre un symbole isolément, nous envisageons la transmission conjointe de $k = 2$ symboles d'information, u_1 et u_2 . Nous considérons pour l'instant u_2 comme un simple auxiliaire pour la transmission de u_1 . Les symboles émis sont au nombre de 3: les deux symboles u_1 et u_2 et

$$c_3 = u_1 \oplus u_2 \tag{24}$$

somme modulo 2 des symboles à transmettre. Nous supposons qu'une énergie moyenne E_b est reçue par symbole d'information, c'est à dire seulement $2E_b/3$ pour chacun des symboles émis.

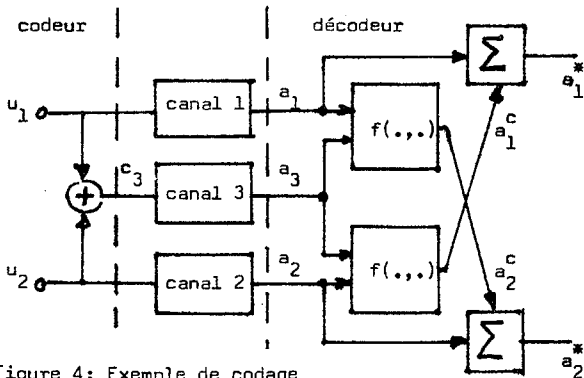


Figure 4: Exemple de codage
f(...,.) est définie par la relation (30)

Nous pouvons interpréter ce schéma comme une forme de diversité. En effet, (24) implique que $u_1 = u_2 \oplus c_3$. Les décisions \hat{u}_2 et \hat{c}_3 quant à u_2 et c_3 permettent une réévaluation de \hat{u}_1 , indépendamment de la décision quant à u_1 , soit \hat{u}_1 , dans la mesure où les bruits sont indépendants dans les trois canaux. Nous pouvons donc améliorer la décision quant à u_1 en remarquant que \hat{u}_1 et

$$\hat{u}_1' = \hat{u}_2 \oplus \hat{c}_3 \tag{25}$$

constituent deux répliques indépendantes du symbole u_1 . Soit a_1' la valeur relative associée à \hat{u}_1' . D'après (15), la décision quant à u_1 en fonction de ces deux répliques, qui constitue le résultat du décodage, a pour v.r. la somme des v.r. associées aux répliques, soit

$$a_1^* = a_1 + a_1' \tag{26}$$

Il nous reste à évaluer a_1' en fonction de a_2 et a_3 . Il suffit de remarquer que, d'après (25),

$$\Pr(\hat{u}_1' \neq u_1) = \Pr(\hat{u}_2 \neq u_2) \Pr(\hat{c}_3 \neq c_3) + \Pr(\hat{u}_2 = u_2) \Pr(\hat{c}_3 \neq c_3) \tag{27}$$

Cela peut être réécrit

$$1 - 2\Pr(\hat{u}_1' \neq u_1) = [1 - 2\Pr(\hat{u}_2 \neq u_2)] [1 - 2\Pr(\hat{c}_3 \neq c_3)] \tag{27}$$

mais, d'après (9),

$$\text{th}(a/2) = (e^a - 1)/(e^a + 1) = (-1)^{\hat{c}} [1 - 2\Pr(\hat{c} \neq c)] \tag{28}$$

On peut donc exprimer le premier membre de (27) en faisant

dans (28) $a = a_1'$, $\hat{c} = \hat{u}_1'$ et $c = 1$ au premier membre, et chacun des produits du second membre en y faisant $a = a_2$ et a_3 , $\hat{c} = \hat{u}_2$ et \hat{c}_3 , $c = u_2$ et c_3 . Mais (25) implique

$$(-1)^{\hat{u}_1'} = (-1)^{\hat{u}_2 \oplus \hat{c}_3} \tag{29}$$

donc

$$\text{th}(a_1'/2) = \text{th}(a_2/2)\text{th}(a_3/2) \tag{29}$$

ou, de façon équivalente

$$a_1' = \log \frac{1 + \text{th}(a_2/2)\text{th}(a_3/2)}{1 - \text{th}(a_2/2)\text{th}(a_3/2)} = \log \frac{\exp(a_2 + a_3) + 1}{\exp(a_2) + \exp(a_3)} \tag{30}$$

La règle de décision quant au premier symbole s'écrit donc, d'après (26) et (30):

$$a_1^* = a_1 + \log \frac{1 + \text{th}(a_2/2)\text{th}(a_3/2)}{1 - \text{th}(a_2/2)\text{th}(a_3/2)} \tag{31}$$

Le procédé de codage utilisé se comporte ainsi, pour le symbole u_1 , comme un système de diversité utilisant deux canaux indépendants: le canal physique qui sert à transmettre le symbole u_1 et un canal déduit des deux canaux physiques transmettant u_2 et c_3 en effectuant l'opération (30) sur les v.r. a_2 et a_3 qui en sortent. On pourrait qualifier ce procédé de diversité par calcul.

Bien entendu, les rôles de u_1 et u_2 sont symétriques. En complétant par symétrie le dispositif qui vient d'être décrit pour le décodage de u_1 , on obtient le schéma de décodeur qui a été dessiné sur la Fig. 4.

On aimerait généraliser à ce cas l'analyse de la diversité faite au paragraphe 5, qui était très simple dans le cas gaussien. Malheureusement, si a_2 et a_3 sont gaussiennes, la relation non linéaire (30) entraîne que a_1' ne l'est pas. Nous aurons recours à une approximation gaussienne de a_1' qui n'est valable que si les valeurs absolues des moyennes de a_2 et a_3 , soit m_2 et m_3 , sont grandes. Remarquons d'abord que le code (simpliste) défini par (24) est linéaire et le canal symétrique, de sorte que les propriétés du codage en présence de bruit sont indépendantes du mot émis. On peut donc sans restriction de généralité supposer $c_1 = c_2 = 0$, donc $c_3 = 0$. Alors m_2 et m_3 sont les moyennes de a_2 et a_3 . La v.r. a_1' donnée par (30) peut être réécrite

$$a_1' = \log \frac{1 + \exp(-a_2 - a_3)}{\exp(-a_2) + \exp(-a_3)} \tag{30}$$

Si les moyennes m_2 et m_3 sont grandes, il est peu probable que a_2 et a_3 soient simultanément très petites et le numérateur est voisin de 1. Soit a le plus petit des deux nombres a_2 et a_3 . Si l'un d'eux est nettement inférieur à l'autre, $\exp(-a)$ est prédominant en dénominateur et $a_1' \approx a$. Si a_2 et a_3 sont du même ordre de grandeur, une approximation pessimiste les supposera égaux, soit

$$a_1' \approx a - \log 2 \tag{32}$$

La v.r. a_1' n'est pas pour autant gaussienne dans cette approximation, puisqu'elle dépend de a qui, étant la plus petite des deux variables gaussiennes a_2 et a_3 , a pour densité de probabilité

$$p_A(a) \approx p_{A_2}(a) \int_a^{+\infty} p_{A_3}(u) du + p_{A_3}(a) \int_a^{+\infty} p_{A_2}(u) du$$

avec, d'après (13):

$$p_{A_i}(a) = (4\pi m_i)^{-1/2} \exp[-(a-m_i)^2/4m_i] \tag{13}$$

$$p_A(a) \approx \frac{1}{2} [p_{A_2}(a) \text{erfc}(\frac{a-m_3}{2\sqrt{m_3}}) + p_{A_3}(a) \text{erfc}(\frac{a-m_2}{2\sqrt{m_2}})] \tag{33}$$

Si nous admettons que la gaussienne de la forme (13), de moyenne m , qui a même tangente à l'origine que (33), est une approximation valable de la "queue" de la distribution (33) dans le calcul par (14) de la probabilité d'erreur, nous obtenons

$$m^{-1/2} \exp(-m/4) = \frac{1}{2} [m_2^{-1/2} \exp(-m_2/4) \text{erfc}(-\frac{1}{2}) + m_3^{-1/2} \exp(-m_3/4) \text{erfc}(-\frac{1}{2})]$$



Mais $\operatorname{erfc}(-x) = 1 + \operatorname{erf}(x)$ et, pour m_2 et m_3 grands, chacune des fonctions $\operatorname{erfc}(\cdot)$ est très voisine de 2. L'équation implicite donnant m devient

$$m^{-\frac{1}{2}} \exp(-m/4) = m_2^{-\frac{1}{2}} \exp(-m_2/4) + m_3^{-\frac{1}{2}} \exp(-m_3/4).$$

Si m_2 et m_3 sont très inégaux, l'un des deux termes est négligeable vis à vis de l'autre et m peut être pris égal à $\min(m_2, m_3)$. Dans le cas de l'égalité, il faudrait résoudre l'équation implicite

$$m^{-\frac{1}{2}} \exp(-m/4) = 2m_2^{-\frac{1}{2}} \exp(-m_2/4);$$

$$\min(m_2, m_3) - 4 \log 2$$

est une solution pessimiste en ce qu'elle conduit à majorer la probabilité d'erreur. Nous obtenons donc pour probabilité d'erreur résiduelle, c'est-à-dire après décodage

$$P_r \approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{m_1 + \min(m_2, m_3) - 4 \log 2} \right), \quad m_2, m_3 \gg 1 \quad (34)$$

Il ne s'agit malheureusement que d'une approximation basée sur quelques hypothèses qu'il n'est pas facile d'entièrement justifier. Les données expérimentales et les simulations confirment cependant sa validité pour des valeurs moyennes du rapport signal à bruit.

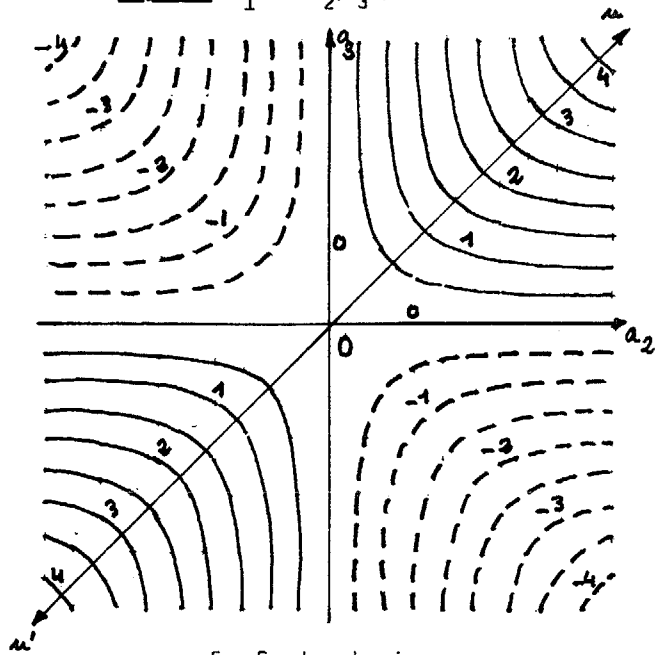
Nous en retiendrons principalement qu'à l'exception du terme correctif $\log 2$, tout se passe comme s'il y avait addition du rapport signal à bruit du canal 1 et de celui du plus mauvais des canaux 2 et 3. Par exemple, si toutes les moyennes sont égales et en l'absence de fluctuations, on a

$$P_r \approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc} (4E_b/3N_0 - \log 2)^{\frac{1}{2}}, \quad E_b/N_0 \gg 1 \quad (35)$$

résultat qui fait apparaître un gain du facteur 4/3 (en négligeant le terme correctif), soit 1,25 dB, par rapport à la transmission sans codage.

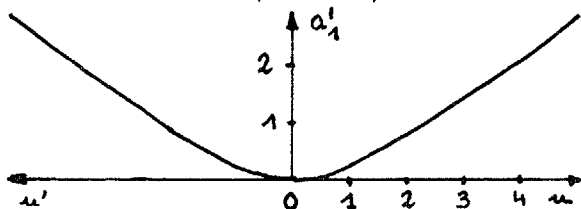
Il faut remarquer que si l'on suppose au contraire que les canaux 2 et 3 sont mauvais, la contribution de la réplique (25) devient négligeable, comme on peut le voir par exemple sur l'expression (30). La surface a_1' en fonction de a_2 et a_3 est représentée sur la Fig. 5.

Figure 5: $a_1' = f(a_2, a_3)$, relation (30)



Sa: Courbes de niveau

Sb: Coupe selon u, u'



Ainsi, on voit apparaître sur notre exemple très simple deux propriétés générales des systèmes de codage:

- une utilisation de la redondance qui, lorsque les voies individuelles sont bonnes, équivaut à une amélioration du rapport signal à bruit (comme dans un système de diversité en réception);

- mais, lorsque ces voies sont mauvaises, une dégradation telle que la redondance n'apporte plus aucun bénéfice, de sorte que l'énergie dépensée pour émettre les symboles de redondance est perdue.

Cette conclusion reste valable pour les généralisations que nous allons maintenant aborder.

6.2- Première généralisation: codes décodables à seuil

Un exemple de ces codes nous permettra d'en comprendre les propriétés. Il s'agit du code (7,3) à longueur maximale. Ses mots sont de la forme $\underline{c} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6 \ c_7]$, où

u_1, u_2 et u_3 sont les $k = 3$ symboles d'information à transmettre, c_4 à c_7 étant les symboles de contrôle calculés en fonction de u_1, u_2 et u_3 . Tout mot \underline{c} de ce code, considéré comme une matrice ligne, est tel que

$$\underline{c} \cdot H^T = \underline{0} \quad (36)$$

où H est la matrice de contrôle

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En écrivant \underline{c} sous forme littérale, H sous forme numérique et en considérant toutes les combinaisons linéaires des équations (36) où apparaît u_1 , on voit que l'on dispose pour le décodage de u_1 des 4 répliques (mêmes hypothèses et notations qu'en 6.1):

$$\begin{aligned} r_1 &= \hat{u}_1 && \text{réplique "simple"} \\ r_2 &= \hat{u}_3 + \hat{c}_4 \\ r_3 &= \hat{c}_5 + \hat{c}_7 \\ r_4 &= \hat{u}_2 + \hat{c}_6 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{aligned}} \right\} \text{répliques "composées"}$$

mutuellement indépendantes puisque chacun des symboles ne figure qu'une fois dans l'ensemble des seconds membres. Or la distance minimale du code est précisément $d = 4$ et le code est complètement orthogonalisable au sens du décodage à seuil $/6/$. On peut en faire un décodage majoritaire, avec des décisions fermes sur les symboles, mais aussi généraliser la relation (26), qui devient

$$a_1^* = a_1 + a_1^{(2)} + a_1^{(3)} + a_1^{(4)} \quad (37)$$

où les $a_1^{(i)}$, $i = 2, 3, 4$, v.r. des répliques composées, sont données par (30), soit

$$a_1^{(i)} = \log \frac{1 + \operatorname{th}(a_{1i}/2) \operatorname{th}(a_{2i}/2)}{1 - \operatorname{th}(a_{1i}/2) \operatorname{th}(a_{2i}/2)}$$

où a_{1i} et a_{2i} désignent les v.r. associées respectivement aux deux symboles qui servent à exprimer la réplique r_i .

Des considérations analogues à celles du paragraphe précédent conduisent à une estimation approximative de la probabilité d'erreur résiduelle, pour l'exemple choisi:

$$P_r \approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{m_1 + \min(m_3, m_4) + \min(m_5, m_7) + \min(m_2, m_6) - 12 \log 2} \right) \quad (38)$$

6.3- Généralisation à un code linéaire quelconque

Les codes complètement orthogonalisables sont rares. On peut cependant toujours résoudre les équations de contrôle (36) par rapport au symbole u_1 que l'on veut décoder. On obtient alors 2^{n-k} répliques où, bien entendu, un même symbole apparaît plusieurs fois aux seconds membres. On peut montrer qu'un ensemble de $n - k$ répliques composées linéairement indépendantes est exhaustif en ce sens qu'il suffit au décodage à vraisemblance maximale. Ces répliques ne sont en général pas orthogonales mais on peut formuler la règle de décision sur u_1 selon

$$a_1^* = a_1 + f_1(a_2, \dots, a_n), \quad (39)$$

où $f_i(\dots)$ est la valeur relative associée à l'ensemble des répliques composées (qui ne se sépare plus comme en (37)), indépendante de a_1 . On peut l'explicitier ainsi:

$$f_i(a_2, \dots, a_n) = \log[L(1;)/L(;1)] - a_1 \quad (40)$$

où $L(1;)$ et $L(;1)$ représentent respectivement l'ensemble des mots \underline{c} du code ayant 0 et 1 à l'emplacement du symbole à décoder, par la somme des expressions $\exp(-a_i - a_j - \dots)$ associées à chacun des mots \underline{c} , où les indices i, j, \dots désignent l'emplacement des "uns" dans \underline{c} (/3/, /1/).

Une autre possibilité est de faire le calcul en fonction du code dual du code utilisé /7,2-4/. Alors la règle de décision (40) se déduit de

$$a_1^* = a_1 + \log[L'(1;)+L'(;1)/z_1] - \log[L'(1;)-L'(;1)/z_1]$$

où $L'(1;)$ et $L'(;1)$ représentent selon la même convention que ci-dessus des ensembles de mots du code dual, en ayant remplacé $\exp(-a_i)$ par z_i et fait $z_i = \text{th}(a_i/2)$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. On peut alors réduire la complexité du décodage en ne retenant qu'un ensemble de répliques non exhaustif. On peut dans certains cas obtenir une simplification considérable avec un écart minime par rapport à l'optimalité, ainsi pour les codes produits /8/.

En complément de ce très bref aperçu, le lecteur pourra se référer à /2-4/.

7 - Evaluation approximative de la probabilité d'erreur

Pour un code linéaire quelconque, l'évaluation de la probabilité d'erreur résiduelle peut être faite par des méthodes analogues /1/. On obtient alors un résultat de la forme

$$P_r = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{m_1 + \sum_{i \in I} m_i - c}\right), \quad m_i \text{ grands} \quad (41)$$

où c est un terme correctif et où I est l'ensemble des indices de 2 à n tel que:

a) $\exp(-\sum_{i \in I} a_i)$ apparaisse en argument du logarithme en dénominateur de (40), et b) $\sum_{i \in I} m_i$ soit la plus petite des sommes associées à l'ensemble I défini par a).

En fait, le terme correctif c peut être négligé si les m_i sont très différents. Dans le cas de fluctuations de Rayleigh où l'énergie du signal est distribuée selon (19), on peut envisager de calculer une approximation de la probabilité d'erreur résiduelle moyenne en appliquant (41) avec $c = 0$. La distribution de la moyenne m_i de la v.r. du i -ème symbole est alors, d'après (12) et (19):

$$p_{M_i} = (N_0/4E) \exp(-xN_0/4E) \quad (42)$$

où $E = kE_b/n$ (43)

est l'énergie moyenne reçue par symbole codé. On peut supposer que la plus petite somme de moyennes sera atteinte pour l'un des n_d mots de poids minimal d . La distribution de la somme M de n_d variables de densité (42) est alors

$$p_M(x) = (N_0/4E)^d \frac{1}{(d-1)!} x^{d-1} \exp(-xN_0/4E) \quad (44)$$

et la densité de probabilité de la plus petite de ses sommes, soit S , est

$$p_S(x) = n_d p_M(x) \int_x^{+\infty} p_M(u) du \quad (45)$$

Il faut évaluer

$$p_r = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \text{erfc}\left(\frac{1}{2}s\right) p_S(s) ds$$

L'emploi de la majoration grossière (22) conduit, compte tenu de (43), à

$$p_r < \frac{1}{2} n_d (1 + kE_b/nN_0)^{-d} \quad (46)$$

Il est intéressant de comparer ce résultat à celui de la diversité à l'émission d'ordre r , soit (23). Si l'on excepte le terme constant dans (46), on voit que d remplace r en exposant de la parenthèse, mais que le facteur de E_b/N_0 est

devenu le facteur fixe k/n au lieu de $1/r$.

8 - Conclusion

La majoration (46) ne fait apparaître que des avantages au codage par rapport à la diversité: d ne dépend pas de la redondance acceptée, mais de la complexité acceptée. A ce prix, pour k/n donné, on peut rendre d aussi grand que l'on veut.

Le codage ne se comporte donc pas comme un procédé de diversité à l'émission. Tout se passe comme si la transmission avait lieu à travers plusieurs canaux combinant certaines des voies physiques utilisées, selon un procédé de diversité à la réception, "par calcul". Il y a gain apparent en rapport signal à bruit, outre l'effet utile de réduire la dégradation due aux fluctuations (paragraphe 5).

Ce tableau très favorable a pourtant deux ombres:

- la complexité inhérente au codage et surtout au décodage pondéré, mais des approximations même grossières conservent une bonne partie des avantages;
- l'effet de seuil déjà mentionné en 6.1 qui rend la redondance du code complètement inutile si le rapport signal est trop faible, alors qu'elle resterait utile en diversité d'après (18).

Cette dernière remarque montre comment la diversité et le codage peuvent être employés conjointement: le codage doit précéder l'émission répétée, de telle sorte que les décisions quant aux données répétées soient prises d'abord, ces décisions et leurs marges servant de données d'entrée au décodeur pondéré. La fonction de la diversité peut alors être interprétée (selon (17)) comme amenant le rapport signal à bruit vu par le décodeur à une valeur supérieure au seuil pour lequel son fonctionnement devient utile.

Références

- /1/ G. Battail et A. El-Sherbini, "Coding for radio channels", proposé aux Annales des Téléc.
- /2/ G. Battail et M. Decouvelaere, "Décodage par répliques" Annales Téléc. vol. 31, pp. 387-404, nov.-déc. 1976
- /3/ G. Battail et P. Godlewski, "Emploi de représentations polynomiales à plusieurs indéterminées pour le décodage de codes redondants linéaires", Annales Téléc. vol. 33, pp. 74-86, mars-avr. 1978
- /4/ G. Battail, M. Decouvelaere & P. Godlewski, "Replication decoding", IEEE Trans. Inform. Th. vol IT-25, pp. 332-345, mai 1979
- /5/ I.S. Gradshteyn et I.W. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York 1965
- /6/ J.L. Massey, Threshold decoding, MIT Press, Cambridge, Mass. 1963
- /7/ C.R.P. Hartmann et L.D. Rudolph, "An optimum symbol-by-symbol decoding rule for linear codes", IEEE Trans. Inform. Th. vol. IT-22, pp. 514-517, sept. 1976
- /8/ M. El-Soudani, "Replication decoding of product codes", Thèse de M. Sc., Université du Caire, 1980

