

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

883



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

NOUVEL ALGORITHME A CONVERGENCE RAPIDE POUR LES EGALISEURS ADAPTATIFS

Hikmet SARI*

Ghassan KAWAS-KALEH**

*Laboratoires d'Electronique et de Physique Appliquée
3, avenue Descartes, 94450 LIMEIL-BRENNES

**Département Systèmes et Communications
ENST - 46, rue Barrault, 75013 PARIS

RESUME

Dans cet article nous présentons un nouvel algorithme à convergence rapide pour adapter les coefficients d'un égaliseur linéaire à un canal inconnu et éventuellement lentement variable au cours du temps.

L'algorithme proposé est une simplification de l'algorithme auto-orthogonalisant. Il est obtenu en remplaçant la matrice figurant dans le gain de ce dernier par une matrice circulante qui lui est asymptotiquement équivalente au sens de la distribution des valeurs propres. Sa vitesse de convergence est quasi-indépendante de la dispersion des valeurs propres de la matrice de corrélation du signal reçu et par rapport à l'algorithme auto-orthogonalisant il a l'avantage de nécessiter considérablement moins d'opérations par itération.

Nous donnons des résultats de simulations confirmant l'efficacité du nouvel algorithme lorsque le signal reçu est fortement corrélé.

SUMMARY

This paper presents a new rapidly converging algorithm for adapting the coefficients of a linear equalizer to an unknown and possibly time-varying channel.

The proposed algorithm is a simplification of the self-orthogonalizing algorithm. It is obtained by replacing the weighting matrix which appears in the correction term of the latter algorithm by a circulant matrix which is asymptotically equivalent to it (the asymptotic equivalence being taken in the sense of eigenvalue distribution). Its convergence speed is not affected by the eigenvalue spread of the received signal correlation matrix, and its computational complexity is much smaller than that of the self-orthogonalizing algorithm.

Computer simulation results are given which confirm the efficiency of the new algorithm when the received signal is highly correlated.



NOUVEL ALGORITHME A CONVERGENCE RAPIDE
POUR LES EGALISEURS ADAPTATIFS

Hikmet SARI - Ghassan KAWAS-KALEH

I. INTRODUCTION

Dans un égaliseur linéaire adaptatif, on utilise souvent un algorithme du gradient stochastique pour la mise à jour des coefficients. Cet algorithme est simple à mettre en oeuvre, mais il a l'inconvénient de converger d'autant plus lentement que le signal reçu est plus corrélié, ce qui le rend inefficace sur des canaux à forte distorsion d'amplitude [1,2].

Dans les systèmes à réponses partielles, une forte corrélation est introduite dans le signal pour des raisons d'occupation spectrale, et par conséquent dans ces systèmes l'algorithme du gradient stochastique n'est pas efficace même si le canal est de bonne qualité (à faible distorsion d'amplitude). Pour une convergence plus rapide Chang [2] a proposé de blanchir le signal avant égalisation et Mueller [3] a proposé un nouvel algorithme. Ces deux méthodes supposent une connaissance a priori de la matrice de corrélation du signal reçu. Plus précisément, l'algorithme de Mueller est obtenu en multipliant le gain vectoriel de l'algorithme du gradient stochastique par l'inverse de la matrice de corrélation du signal reçu.

Si le canal est de bonne qualité, la corrélation du signal reçu vient essentiellement du filtre de mise en forme et une bonne estimée de la matrice de corrélation est connue d'avance. Mais dans le cas général ni la matrice de corrélation ni une bonne estimée de celle-ci ne sont connues d'avance. Pour accélérer la convergence, il faut alors combiner l'estimation récursive de l'inverse de cette matrice avec l'algorithme précédent. On obtient ainsi un algorithme dit "auto-orthogonalisant" [4]. Dans [4] il est aussi démontré que l'algorithme de Kalman [5] est un algorithme auto-orthogonalisant à pas décroissant. L'algorithme auto-orthogonalisant permet une convergence rapide indépendamment des distorsions du canal, mais sa complexité reste trop élevée pour un grand nombre d'applications.

Dans cet article, après un rappel sur l'égaliseur linéaire, l'algorithme du gradient stochastique et l'algorithme auto-orthogonalisant, nous présentons un nouvel algorithme à convergence rapide. La vitesse de convergence du nouvel algorithme est comparable à celle de l'algorithme auto-orthogonalisant, toutefois sa complexité est beaucoup moins élevée que celle de ce dernier.

II. STRUCTURE DE L'EGALISEUR

Le canal est modélisé par un filtre transversal suivi d'une addition de bruit. Les échantillons x_k à l'entrée de l'égaliseur ont pour expression :

$$x_k = \sum_j h_j a_{k-j} + n_k \quad (1)$$

où a_k désigne le symbole émis à l'instant kT , T est la durée d'un symbole, n_k est l'échantillon de bruit additif et les $\{h_j\}$ sont les coefficients du filtre transversal modélisant le canal.

L'égaliseur considéré est un égaliseur linéaire qui est constitué d'un filtre transversal suivi d'un détecteur à seuils.

La figure 1 montre un égaliseur linéaire à N coefficients.

Tous les paramètres figurant sur la figure 1 sont complexes.

Notons X_k le vecteur des échantillons présents dans l'égaliseur :

$$X_k = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-N+1})^T$$

soit C le vecteur des coefficients du filtre transversal :

$$C = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^T$$

La sortie du filtre transversal au k ième instant d'échantillonnage, notée y_k , sert à la décision du symbole émis à l'instant $(k-k_0)T$. Ici, k_0 est un paramètre caractérisant le retard de décision de l'égaliseur et dont l'optimisation n'est pas traitée dans ce texte.

Nous posons également :

$$e_k = y_k - a_{k-k_0}$$

Le critère utilisé pour l'optimisation des coefficients est la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (EQM).

$$\epsilon = E(|e_k|^2)$$

Le vecteur C minimisant cette quantité est donné par :

$$C_{opt} = G^{-1} V \quad (2)$$

avec

$$G = E(X_k^* X_k^T) \quad (3)$$

et

$$V = E(X_k^* a_{k-k_0}) \quad (4)$$

où l'astérisque désigne le complexe conjugué.

L'estimation du vecteur optimal C_{opt} se fait en général par une méthode itérative. Dans le paragraphe suivant, nous rappelons les algorithmes conventionnels pour l'estimation de C_{opt} .

III. ALGORITHMES CONVENTIONNELS

III.1- Algorithme du gradient stochastique

L'EQM ϵ est une fonction convexe du vecteur C et son gradient par rapport à C est donné par :

$$\frac{d\epsilon}{dC} = 2 \cdot E(X_k^* e_k) \quad (5)$$

Evidemment l'estimation instantanée du gradient est difficile, mais la quantité $2X_k^* e_k$ peut être prise comme une estimée non biaisée de $\frac{d\epsilon}{dC}$.

L'algorithme du gradient stochastique consiste à itérer le vecteur C dans la direction opposée du vecteur $X_k^* e_k$.



NOUVEL ALGORITHME A CONVERGENCE RAPIDE
POUR LES EGALISEURS ADAPTATIFS

Hikmet SARI - Ghassan KAWAS-KALEH

$$C_{k+1} = C_k - \alpha X_k^* e_k \quad (6)$$

où α est un pas suffisamment petit pour assurer la convergence de l'algorithme.

Cet algorithme simple a l'inconvénient de converger d'autant plus lentement que les valeurs propres de la matrice de corrélation G sont plus dispersées. Or la dispersion des valeurs propres de cette matrice est directement liée au spectre échantillonné du canal. En effet les valeurs propres λ_i vérifient la double inégalité [1] :

$$s \leq \lambda_i \leq S$$

où s et S désignent respectivement le minimum et le maximum du spectre échantillonné du canal.

III.2- Algorithme auto-orthogonalisant

Cet algorithme est obtenu en multipliant dans (6) le vecteur $X_k^* e_k$ par une matrice qui est une estimée de l'inverse de la matrice de corrélation G [4].

Au $k^{\text{ième}}$ instant d'échantillonnage, une estimée de G est :

$$G_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^* X_i^T \quad (7)$$

Cette estimation se met sous la forme récursive :

$$G_k = \frac{1}{k} \left((k-1) G_{k-1} + X_k^* X_k^T \right) \quad (8)$$

En appliquant le lemme d'inversion de matrice [6 p.23] à la relation (8), on obtient un estimateur récursif de G^{-1} .

$$G_k^{-1} = \frac{k}{k-1} \left(G_{k-1}^{-1} - \frac{G_{k-1}^{-1} X_k^* X_k^T G_{k-1}^{-1}}{k-1 + X_k^T G_{k-1}^{-1} X_k} \right) \quad (9)$$

L'algorithme auto-orthogonalisant combine la relation (9) avec la relation suivante :

$$C_{k+1} = C_k - \alpha G_k^{-1} X_k^* e_k \quad (10)$$

Cet algorithme converge rapidement et n'est pas sensiblement affecté par la dispersion des valeurs propres de G . Le prix que l'on paie pour cette convergence rapide est une croissance importante de la complexité par rapport à l'algorithme du gradient stochastique. Le tableau suivant indique le nombre d'opérations à effectuer à chaque itération dans les deux algorithmes. Dans ce tableau les divisions ont été assimilées à des multiplications.

Tableau 1

	Multiplications	Additions
Algorithme du gradient stochastique	2N	2N
Algorithme auto-orthogonalisant	$3N^2 + 3N$	$2N^2 + 2N + 1$

IV. UN NOUVEL ALGORITHME A CONVERGENCE RAPIDE

IV.1- Obtention de l'algorithme

La matrice G est une matrice de Toeplitz symétrique. A partir de celle-ci, dans [7] nous avons défini une matrice circulante de la manière suivante :

soit $(g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$ la première ligne de la matrice G .

On définit le vecteur

$$R = (r_0, r_1, \dots, r_{N-1})^T$$

avec

$$r_i = g_i \quad \text{si } i \leq [N/2]$$

$$r_i = r_{N-i} \quad \text{sinon} \quad (11)$$

et

où $[x]$ désigne la partie entière de x .

Nous appelons $\text{Circ}(R)$ la matrice circulante dont la première ligne est le vecteur R . En supposant que la réponse impulsionnelle du canal est de durée finie, d'après les théorèmes établis dans [8], les matrices G et $\text{Circ}(R)$ sont asymptotiquement équivalentes dans le sens que leurs normes spectrales respectives sont bornées et la norme de Hilbert-Schmidt (définie dans [8]) de leur différence tend vers zéro lorsque $N \rightarrow \infty$. Cette équivalence implique que lorsque N est suffisamment grand, ces deux matrices ont la même distribution de valeurs propres. Par la suite, nous admettons cette équivalence et nous prenons $\text{Circ}(R)$ comme une approximation à la matrice G .

Notre algorithme est obtenu en remplaçant dans l'algorithme auto-orthogonalisant (Eq.(10)) l'estimée G_k^{-1} de la matrice G^{-1} , par une estimée de $(\text{Circ}(R))^{-1}$.

Ainsi

$$C_{k+1} = C_k - \alpha (\text{Circ}(R_k))^{-1} X_k^* e_k \quad (12)$$

R_k étant l'estimée de R au $k^{\text{ième}}$ instant d'échantillonnage.

En utilisant les propriétés des matrices circulantes, la relation (12) devient [7] :

$$\text{TFD}(C_{k+1}) = \text{TFD}(C_k) - \alpha e_k \frac{\text{TFD}(X_k^*)}{\text{TFD}(R_k)} \quad (13)$$

où TFD désigne la transformée de Fourier discrète et où $\text{TFD}(X_k^*)/\text{TFD}(R_k)$ est un vecteur obtenu en divisant chaque composante de $\text{TFD}(X_k^*)$ par la composante correspondante de $\text{TFD}(R_k)$.

En prenant une transformée de Fourier discrète inverse, la relation (13) devient :

$$C_{k+1} = C_k - \alpha e_k \text{TFD}^{-1} \left(\frac{\text{TFD}(X_k^*)}{\text{TFD}(R_k)} \right) \quad (14)$$

dans cette relation, le vecteur R_k est mis à jour d'après la relation :

$$R_k = \frac{1}{k} \left((k-1) R_{k-1} + X_k^* X_k \right) \quad (15)$$



NOUVEL ALGORITHME A CONVERGENCE RAPIDE
POUR LES EGALISEURS ADAPTATIFS

Hikmet SARI - Ghassan KAWAS-KALEH

Jusqu'ici le canal a été supposé stationnaire (voir Eq.(7)). Lorsque le canal est lentement variable dans le temps, la relation (7) doit être remplacée par :

$$G_k = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} X_i^* X_i^T, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (16)$$

ce qui donne :

$$R_k = \lambda R_{k-1} + x_k^* x_k \quad (17)$$

à la place de (15). Dans (16) et (17) le choix du paramètre λ est un compromis entre la précision des estimées et la vitesse de variation du canal.

Notons que, d'après (14), la stabilité de notre algorithme nécessite que $\text{TFD}(R_k)$ n'ait pas de composantes nulles. Pour cela, à chaque itération, on prend la valeur absolue de chaque composante de ce vecteur et on ajoute une petite constante positive.

IV.2- Performances et complexité

Comme nous venons de le voir, l'algorithme proposé est une simplification de l'algorithme auto-orthogonalisant basée sur l'équivalence asymptotique entre les matrices de Toeplitz et les matrices circulantes. Par conséquent, lorsque le nombre de coefficients de l'égaliseur est grand, notre algorithme se comporte identiquement à l'algorithme auto-orthogonalisant. Toutefois la complexité du nouvel algorithme est considérablement moins élevée.

Dans notre algorithme le nombre d'opérations à effectuer à chaque itération est reporté sur le tableau suivant :

Tableau 2

Multiplications (+ divisions)	$2N + \lfloor N/2 \rfloor$
Additions	$2N$
TFD	3

Lorsque N est une puissance de 2, les TFD peuvent être effectuées par des FFT (de l'anglais "Fast Fourier Transform"). La FFT d'une séquence de N points nécessite au plus $\frac{1}{2}N \log_2 N$ multiplications et $N \log_2 N$ additions. La complexité de notre algorithme est donc proportionnelle à $N \log_2 N$, alors que celle de l'algorithme auto-orthogonalisant est proportionnelle à N^2 (comparer tableaux 1 et 2).

Plus concrètement, dans un égaliseur à 16 coefficients, le nouvel algorithme ne nécessite que 136 multiplications par itération, alors que l'algorithme auto-orthogonalisant en nécessite 816 (réduction par un facteur de 6 environ).

V. RESULTATS DES SIMULATIONS

Dans les simulations, nous avons utilisé un égaliseur linéaire à 13 coefficients dont le coefficient de référence était celui du milieu. Les symboles émis $\{a_k\}$ étaient réels et binaires ($a_k = -1$ ou $+1$) et le rapport signal à bruit, défini comme le rapport des variances du signal non bruité et du bruit additif, était de 25 dB.

Dans un premier temps nous avons simulé une réponse impulsionnelle échantillonnée correspondant à un canal téléphonique relativement de bonne qualité (fig. 2).

Après passage dans ce canal, le signal n'est pas fortement corrélé et le rapport de la valeur propre maximale à la valeur propre minimale de la matrice de corrélation est de l'ordre de 9. Sur ce canal, l'utilisation de l'algorithme auto-orthogonalisant ou du nouvel algorithme n'a pas apporté une amélioration significative par rapport à l'algorithme du gradient stochastique. En effet les trois algorithmes ont convergé rapidement.

Dans un deuxième temps, nous avons simulé la classe IV des systèmes à réponses partielles dont le filtre de mise en forme a un zéro double dans son spectre et $F(D) = 1-D^2$ pour fonction de transfert. Le canal de transmission était le même que précédemment (celui de la figure 2). Le système simulé est représenté sur la figure 3.

A cause du zéro double dans le spectre du filtre de mise en forme, les valeurs propres de la matrice de corrélation du signal reçu sont très dispersées (le rapport de la valeur propre maximale à la valeur propre minimale est environ 76). Dans ces conditions, la convergence des trois algorithmes est illustrée sur la figure 4. Ces courbes montrent une nette supériorité de l'algorithme auto-orthogonalisant et du nouvel algorithme sur l'algorithme du gradient stochastique. En effet les deux premiers ont convergé en environ 80 itérations, alors qu'avec l'algorithme du gradient stochastique l'EQM reste importante (de l'ordre de 0.3) après 200 itérations. Nous avons vérifié que la convergence de l'algorithme du gradient stochastique nécessite environ 800 itérations. Dans ces simulations, les pas respectifs des trois algorithmes ont été choisis de manière à obtenir la même EQM résiduelle après convergence.

VI. CONCLUSIONS

Nous avons présenté un nouvel algorithme à convergence rapide pour la mise à jour des coefficients d'un égaliseur linéaire. Comme l'algorithme auto-orthogonalisant, il est particulièrement efficace sur des canaux à forte distorsion d'amplitude. Toutefois il a l'avantage de nécessiter un nombre d'opérations par itération considérablement moins grand que l'algorithme auto-orthogonalisant.

NOUVEL ALGORITHME A CONVERGENCE RAPIDE
POUR LES EGALISEURS ADAPTATIFS

Hikmet SARI - Ghassan KAWAS-KALEH

REFERENCES

- [1] A. GERSHO
"Adaptive Equalization of Highly Dispersive Channels for Data Transmission"
Bell Syst.Tech.J., vol. 48, n° 1, January 1969, pp. 55-70
- [2] R.W. CHANG
"A New Equalizer Structure for Fast Start-up Digital Communication"
Bell Syst.Tech.J., vol. 50, n° 6, July-August 1971, pp. 1969-2014
- [3] K.H. MUELLER
"A New Fast Converging Mean-Square Algorithm for Adaptive Equalizers with Partial Response Signaling"
Bell Syst.Tech.J., vol. 54, n° 1, January 1975, pp. 143-153
- [4] R.D. GITLIN & F.R. MAGEE Jr.
"Self-Orthogonalizing Adaptive Equalization Algorithms"
IEEE Trans.Commun., vol. COM-25, n° 7, July 1977, pp. 666-672
- [5] D. GODARD
"Channel Equalization using a Kalman Filter for Fast Data Transmission"
IBM J. Research & Develop., May 1974, pp. 267-273
- [6] J.R. WESTLAKE
"A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations"
John Wiley & Sons Inc., New-York, 1968
- [7] H. SARI
"Algorithmes d'égalisation adaptative d'un canal dispersif"
Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, Octobre 1980
- [8] R.M. GRAY
"On the Asymptotic Eigenvalue Distribution of Toeplitz Matrices"
IEEE Trans. Information Theory, vol. IT-18, n° 6, November 1972, pp. 725-730

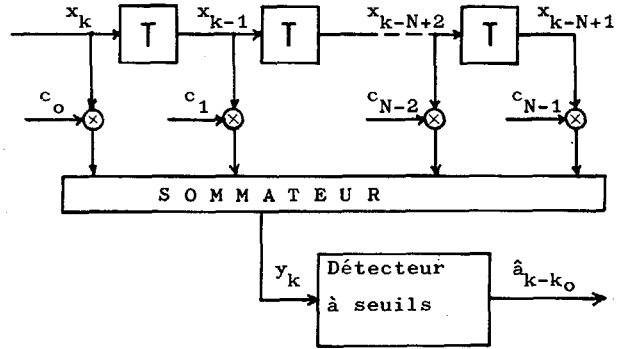


Figure 1 : structure de l'égaliseur linéaire

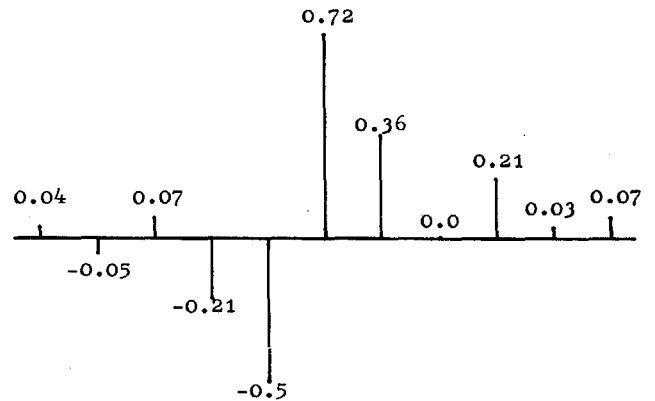


Figure 2 : réponse impulsionnelle échantillonnée du canal simulé (sa puissance est normalisée à l'unité)

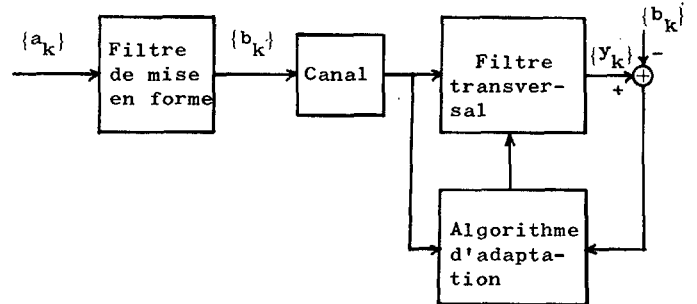


Figure 3 : égalisation d'un système à réponses partielles

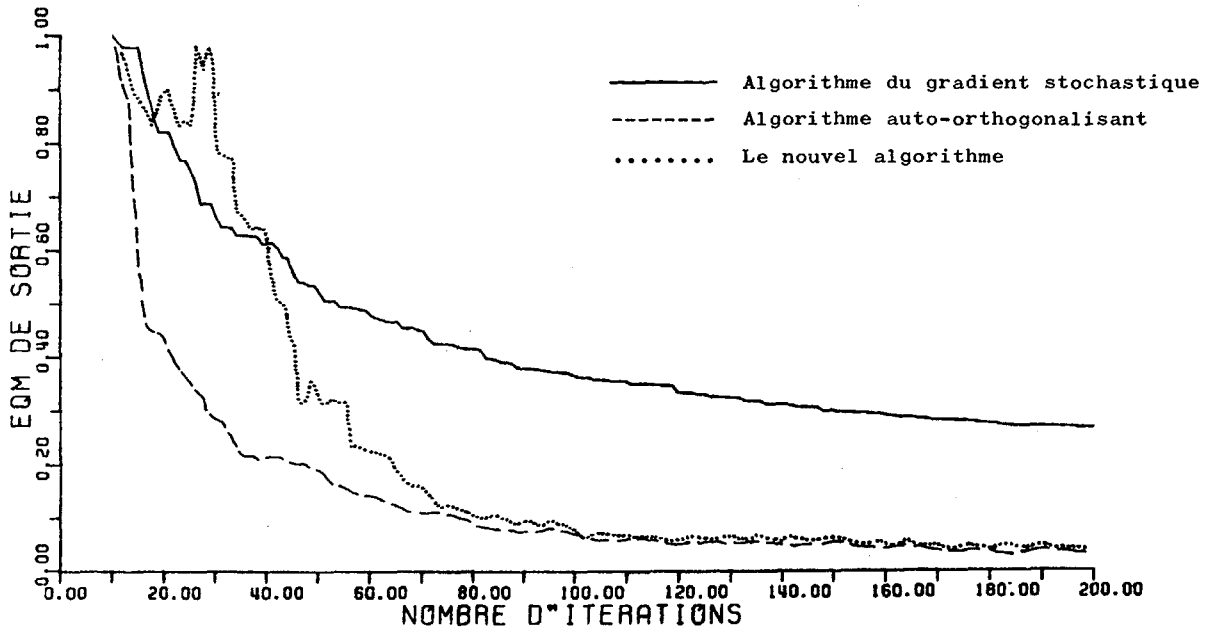


Figure 4 : convergence des trois algorithmes lorsque le signal est fortement corrélé

