

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

FORMULATION DE LA THEORIE DE LA COMMUNICATION DANS LE PLAN
TEMPS-FREQUENCES - ASPECTS PRATIQUES

Pierre BERTRAND - Cécile FUGIER-GARREL

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA) - 29, avenue de la Division Leclerc -
92320 CHATILLON-SOUS-BAGNEUX (France)

RESUME

Les représentations temps-fréquences des signaux sont nées du souci d'obtenir des descriptions proches de la perception auditive. Bien que les formes proposées soient satisfaisantes de ce point de vue, un doute subsiste concernant l'équivalence de la donnée du signal et de la donnée de sa représentation temps-fréquences. L'objet du travail présenté est de préciser ce dernier point. Pour cela on procède d'abord à une analyse rapide de la communication classique de manière à souligner le fait que ce n'est pas tout le signal qui présente un intérêt mais seulement ce qui est défini ici comme sa partie utile. Il est ensuite possible de montrer qu'une bonne représentation telle que celle de Ville-Wigner fournit une description complète de la partie utile. Ces remarques d'ordre général permettent d'envisager l'utilisation pratique de la représentation temps-fréquences.

1 - INTRODUCTION - NOTION DE PARTIE UTILE D'UN SIGNAL

Dans ce qui suit un système de communication est simplement vu comme une liaison par signaux dont la fonction est de transmettre des messages. Les signaux sont supposés représentables par des fonctions réelles du temps et aucune contrainte ne limite a priori leur forme.

A ce niveau de généralité l'appareillage réalisant la liaison se présente comme une application de l'ensemble des signaux émis dans l'ensemble des signaux reçus, ce que nous noterons pour fixer les idées :

$$S_e(t) \xrightarrow{\mathcal{A}} S_r(t)$$

L'application \mathcal{A} est en général mal connue en raison de l'absence de contrôle de nombreux paramètres tels que, par exemple, ceux qui caractérisent la réfractivité de l'atmosphère dans une liaison radio ou la réponse des oreilles d'un auditeur éventuel dans une communication orale. On ne peut par ailleurs considérer \mathcal{A} comme absolument quelconque car alors toute interprétation des signaux devient impossible. Dans les systèmes classiques cette difficulté est résolue, en absence de tout étalonnage, en supposant seulement que l'appareillage est linéaire, stationnaire et non distordant. De telles hypothèses laissent subsister des incertitudes sur la fonction de transfert des canaux et il est nécessaire de les compléter par une convention d'interprétation des signaux. L'objet de la suite de ce paragraphe est de préciser rapidement ce dernier point.

SUMMARY

The signals time-frequency representations are usually built in an attempt to find a description close to the hearing sensation. Most forms look satisfactory but it is not obvious whether any of these characterizes completely the signal. The present work is relative to this problem. First we perform a rapid analysis of the standard communication, stressing that we do not have to exploit the whole signal but only what we call its significant part. Then it can be shown that the Ville-Wigner time-frequency representation yields a complete characterization of the significant part. This general setting provides an alternative tool for solving practical problems.

Soit $S(t)$ un signal émis et $\hat{S}(\xi)$ sa transformée de Fourier définie par :

$$(1) \quad \hat{S}(\xi) = \int e^{-2i\pi\xi t} S(t) dt$$

On peut montrer que dans le cadre des hypothèses retenues, la transformée de Fourier du signal reçu est nécessairement de la forme :

$$(2) \quad \hat{S}_{\alpha_0, \beta_0, \tau}(\xi) = \alpha_0 [e^{-i\beta_0} Y(-\xi) \hat{S}(\xi) + Y(\xi) e^{i\beta_0} \hat{S}(\xi)] e^{-2i\pi\xi\tau}$$

où $Y(\xi)$ désigne la fonction de Heaviside et où α_0 , β_0 et τ sont des constantes exprimant respectivement une atténuation, un déphasage et un retard.

En variable temps l'expression (2) s'écrit :

$$(3) \quad S_{\alpha_0, \beta_0, \tau}(t) = \alpha_0 [e^{-i\beta_0} S_-(t-\tau) + e^{i\beta_0} S_+(t-\tau)]$$

avec

$$(4) \quad S_{\pm}(t) = \frac{S(t)}{2} \mp \frac{1}{2i\pi} \text{vp} \int \frac{S(t')}{t-t'} dt'$$



FORMULATION DE LA THEORIE DE LA COMMUNICATION DANS LE PLAN
TEMPS-FREQUENCES - ASPECTS PRATIQUES

Le retard τ correspond à une simple translation du signal et ne pose pas de problème d'interprétation. Les seules difficultés proviennent des constantes α_0 et β_0 dont les valeurs appartiennent de manière générale au domaine

$$(5) \quad \alpha_0 > 0 \quad ; \quad 0 \leq \beta_0 < 2\pi$$

Pour que l'information portée par le signal reçu ne dépende pas des valeurs de ces constantes de transmission, il est nécessaire d'assimiler le message à la classe d'équivalence de tous les signaux qui se déduisent les uns des autres par des transformations du type (cf (3)) :

$$(6) \quad s(t) \longrightarrow s_{\alpha_0, \beta_0, \tau}(t)$$

où α_0 et β_0 vérifient (5).

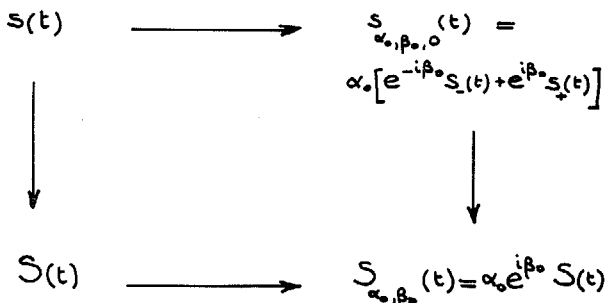
Le message étant ainsi défini, il est possible de lui associer une expression analytique. Pour cela on effectue la transformation :

$$(7) \quad s(t) \longrightarrow S(t)$$

où $S(t)$ désigne le signal analytique usuel (Gabor 1946) défini par (cf (4)) :

$$(8) \quad S(t) = 2 s_+(t)$$

Aux transformations (6) des signaux réels correspondent sur les signaux analytiques des transformations données par le diagramme commutatif :



On constate ainsi que les déphasages ont une représentation beaucoup plus simple sur les signaux analytiques que sur les signaux réels. Cette remarque justifie l'introduction de $S(t)$ et permet d'affirmer que la grandeur :

$$(9) \quad U(t_1, t_2) = \frac{S^*(t_1) S(t_2)}{\|S\|^2}$$

($\|S\|$ norme sur les signaux analytiques)

est invariante dans les transformations (6). Inversement on s'assure aisément que la donnée de $U(t_1, t_2)$ est équivalente à la donnée de $S(t)$ (donc de $s(t)$) modulo un facteur constant et une phase arbitraires. La quantité (9) est ainsi directement représentative du message porté par le signal et sera appelée partie utile de $s(t)$.

A la place de (9) nous aurions pu considérer la grandeur

$$(10) \quad \hat{U}(f_1, f_2) = \frac{\hat{S}^*(f_1) \hat{S}(f_2)}{\|\hat{S}\|^2}$$

construite à partir de la transformée de Fourier du signal analytique. La fonction (10) constitue une autre représentation de la partie utile du signal.

Dans la suite nous n'exploiterons que la norme hilbertienne :

$$(11) \quad \|S\|^2 = \int |s(t)|^2 dt = \int |\hat{S}(f)|^2 df = \|\hat{S}\|^2$$

Les formes (9) et (10) de la partie utile se déduisent alors l'une de l'autre par la transformation de Fourier bidimensionnelle :

$$(12) \quad \hat{U}(f_1, f_2) = \int U(t_1, t_2) e^{2i\pi(f_1 t_1 - f_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

2 - LES MESURES ET LEUR INTERPRETATION

Les seules mesures ayant un intérêt du point de vue de la communication sont celles dont le résultat ne dépend que du message porté par le signal. D'après ce qui précède ces mesures sont nécessairement des fonctionnelles de la partie utile du signal. Une classe importante de telles mesures est constituée par les fonctionnelles linéaires que nous écrirons :

$$(13) \quad \langle A \rangle = \int A^*(t_1, t_2) U(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

ou encore en utilisant (12) :

$$(14) \quad \langle A \rangle = \int \hat{A}^*(f_1, f_2) \hat{U}(f_1, f_2) df_1 df_2$$

L'ensemble des opérations de la forme (13)-(14) permet de caractériser la partie utile en tant que distribution.

Compte tenu des relations d'hermiticité :

$$(15) \quad \begin{cases} U(t_1, t_2) = U^*(t_2, t_1) \\ \hat{U}(f_1, f_2) = \hat{U}^*(f_2, f_1) \end{cases}$$

il est suffisant de se limiter aux fonctionnelles possédant la même symétrie soit :

$$(16) \quad \begin{cases} A(t_1, t_2) = A^*(t_2, t_1) \\ \hat{A}(f_1, f_2) = \hat{A}^*(f_2, f_1) \end{cases}$$

L'ensemble des mesures (13) - (14) pour lesquelles (16) est vérifiée contient en particulier toutes les mesures usuelles obtenues par filtrage du signal et détection quadratique.

FORMULATION DE LA THEORIE DE LA COMMUNICATION DANS LE PLAN
TEMPS-FREQUENCES - ASPECTS PRATIQUES

A toute translation de temps sur le signal :

$$(17) \quad s(t) \longrightarrow s(t-t_0)$$

correspond la transformation

$$(18) \quad \hat{U}(f_1, f_2) \longrightarrow e^{2i\pi(f_1-f_2)t_0} \hat{U}(f_1, f_2)$$

de la partie utile du signal. Les fonctionnelles du type (14) qui sont invariantes par les transformations (18) ne peuvent mettre en évidence que des caractéristiques spectrales des messages. On montre qu'elles sont nécessairement de la forme :

$$(19) \quad \begin{aligned} \langle A \rangle &= \int \alpha\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right) \delta(f_1-f_2) \hat{U}(f_1, f_2) df_1 df_2 \\ &= \int \alpha(f) \frac{|\hat{S}(f)|^2}{\|\hat{S}\|^2} df \end{aligned}$$

Chacune des mesures ainsi introduites peut être interprétée comme l'espérance mathématique d'une fonction d'un paramètre aléatoire (la "fréquence" du message) dont la loi de probabilité $|\hat{S}(f)|^2 \times \|\hat{S}\|^{-2}$ est déterminée par la partie utile du signal.

On peut de même montrer qu'à toute translation de fréquence $f_0 \geq 0$ définie sur le signal réel par :

$$(20) \quad s(t) \xrightarrow{f_0 \geq 0} e^{-2i\pi f_0 t} s(t) + e^{2i\pi f_0 t} s(t)$$

correspond la translation :

$$(21) \quad U(t, t_2) \xrightarrow{f_0 \geq 0} e^{-2i\pi f_0 (t-t_2)} U(t, t_2)$$

de la partie utile. La condition d'invariance des mesures par ces transformations permet de caractériser celles d'entre elles qui ne dépendent que de l'époque du signal. On trouve qu'elles sont obligatoirement de la forme :

$$(22) \quad \langle B \rangle = \int \beta(t) \frac{|S(t)|^2}{\|S\|^2} dt$$

Ces mesures peuvent donc s'interpréter comme les espérances mathématiques de fonctions d'un paramètre aléatoire (l'époque du message) dont la loi de probabilité $|S(t)|^2 \times \|S\|^{-2}$ est encore déduite de la partie utile du signal.

Les interprétations précédentes de l'époque et de la fréquence ont été proposées par Gabor (1946). L'introduction systématique des mesures comme fonctionnelles linéaires de la partie utile permet d'étendre ce type d'interprétation à n'importe quelle mesure. Pour le montrer il est commode de mettre (13) sous forme opérationnelle. Pour cela on introduit les opérateurs A_{op} et U_{op} dont les éléments

de matrices sont respectivement $A(t_1, t_2)$ et $U(t_1, t_2)$ L'adjoint de A_{op} , soit A_{op}^+ a ainsi pour éléments de matrice la fonction :

$$A^+(t_1, t_2) = A^*(t_2, t_1)$$

et la relation (13) peut s'écrire :

$$(23) \quad \langle A \rangle = \int A^+(t_2, t_1) U(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

On reconnaît l'expression de la trace d'un produit d'opérateurs et nous écrivons :

$$(24) \quad \langle A \rangle = \text{Tr} (A_{op}^+ U_{op})$$

Compte tenu de l'hypothèse (16), l'opérateur A_{op} est auto-adjoint et on a simplement :

$$(25) \quad \langle A \rangle = \text{Tr} (A_{op} U_{op})$$

A partir de cette expression il est possible de reprendre les développements usuels de l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique et de montrer que tout résultat de mesure peut s'écrire sous la forme :

$$(26) \quad \langle A \rangle = \int a p(a) da$$

où $p(a)$ est une loi de probabilité sur \mathbb{R} qui peut être déduite de U . On peut également montrer qu'il existe des parties utiles pour lesquelles la loi de probabilité est de la forme :

$$(27) \quad p(a) = \delta(a-a_0)$$

et qu'il est en général impossible d'exprimer deux mesures de la même partie utile à l'aide de telles lois, à moins que les opérateurs caractéristiques des mesures ne commutent. Appliquées au cas particulier de la mesure de l'époque et de la fréquence d'un message donné ces remarques conduisent aux inégalités de Gabor :

$$(28) \quad \sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi}$$

où σ_t et σ_f sont les écarts-types donnés par :

$$(29) \quad \sigma_t^2 = \int (t-\langle t \rangle)^2 \frac{|S(t)|^2}{\|S\|^2} dt$$

$$(30) \quad \sigma_f^2 = \int (f-\langle f \rangle)^2 \frac{|\hat{S}(f)|^2}{\|\hat{S}\|^2} df$$

3 - REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE DE LA PARTIE UTILE D'UN SIGNAL

L'analyse des signaux simultanément en temps et fréquence est un problème pratique pour lequel diverses solutions ont été proposées (cf Escudé 1979 pour une revue).

Pour les applications qui nous intéressent, la représentation la plus commode est celle de Ville-Wigner qui, dans nos notations, s'écrit :

$$(31) \quad P(t, f) = \int e^{2i\pi f u} U\left(t+\frac{u}{2}, t-\frac{u}{2}\right) du$$

ou encore :

$$(32) \quad P(t, f) = \int e^{-2i\pi t v} \hat{U}\left(f+\frac{v}{2}, f-\frac{v}{2}\right) dv$$

Il est facile de vérifier que la donnée de $P(t, f)$ est équivalente à la donnée de la partie utile du signal. En fait $P(t, f)$ est une nouvelle représentation de cette dernière qui, à la différence de (9)



ou (10), ne peut être mise en relation directe avec une représentation particulière du signal.

Les expressions (31)-(32) peuvent être établies par voie axiomatique à partir des contraintes suivantes:

- i) $P(t, f)$ est une forme linéaire réelle de U .
- ii) A toute translation d'époque t_0 de U (cf(18)) correspond la translation :

$$P(t, f) \xrightarrow{t_0} P(t-t_0, f)$$

- iii) A toute translation de fréquence $f_0 > 0$ de U (cf(21)) correspond la translation :

$$P(t, f) \xrightarrow{f_0} P(t, f-f_0)$$

- iv) La fonction $P(t, f)$ correspondant à un signal à bande limitée est nulle en dehors de la bande considérée et l'on a :

$$(33) \quad \int P(t, f) df = \frac{|S(t)|^2}{\|S\|^2}$$

D'autres contraintes pourraient être substituées aux précédentes. Nous nous contenterons d'en évoquer quelques unes en les présentant comme des propriétés de la fonction (31)-(32).

- a) Pour tout signal de norme finie on a :

$$(34) \quad \int P(t, f) dt = \frac{|\hat{S}(f)|^2}{\|S\|^2}$$

et les moyennes des types (19) et (22) s'écrivent ainsi :

$$(35) \quad \langle A \rangle = \int A(f) P(t, f) dt df$$

$$(36) \quad \langle B \rangle = \int B(t) P(t, f) dt df$$

- b) Si \mathcal{L} désigne la correspondance

$$U(t_1, t_2) \xrightarrow{\mathcal{L}} P(t, f)$$

$$\text{et si : } A(t_1, t_2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{A}(t, f)$$

alors (13) s'écrit :

$$(37) \quad \langle A \rangle = \int \mathcal{A}^*(t, f) P(t, f) dt df$$

La transformation \mathcal{L} de l'espace de Hilbert dans lui-même est ainsi unitaire.

Ce qui précède est également valable pour la correspondance \mathcal{L} assurant

$$\hat{U}(f_1, f_2) \xrightarrow{\hat{\mathcal{L}}} P(t, f)$$

Si les conditions (16) sont satisfaites la fonction $\mathcal{A}(t, f)$ est réelle.

- c) On ne peut avoir partout :

$$(38) \quad P(t, f) \geq 0$$

De manière générale une démonstration de Wigner (1971) établit l'incompatibilité de (38) et des propriétés (35) et (36).

- d) En dépit de la remarque précédente $P(t, f)$ peut souvent être considérée formellement comme une loi de probabilité dans le plan temps-fréquences. On établit en particulier la relation :

$$(39) \quad \langle f \rangle_t = \frac{\int f P(t, f) df}{\int P(t, f) df} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\arg S(t)]$$

qui montre que la "pseudo" moyenne conditionnelle de la fréquence à un instant donné est exactement égale à la fréquence instantanée telle qu'elle est définie à partir du signal analytique (Ville 1948).

Les formules (31)-(32) ont été appliquées à la représentation de l'écho radar provenant d'un avion cible en rotation autour d'un axe vertical. Dans cette application le signal exploité avait été acquis sous la forme d'un coefficient de rétrodiffusion complexe mesuré dans un secteur angulaire s'étendant sur 45 degrés de part et d'autre du nez de l'avion. Un tracé de la fonction $P(t, f)$ correspondante est donné sur la figure 1 sur laquelle les fréquences (effet Doppler) se lisent horizontalement et les temps (position angulaire de l'avion) verticalement.

4 - CONCLUSION - APPLICATIONS POSSIBLES DE LA REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCES

La fonction de Ville-Wigner (31)-32) a été présentée comme une description complète de la partie utile des signaux dans le plan (t, f) . A l'aide de cette fonction les mesures (13)-(14), caractéristiques de l'information portée par les signaux, se présentent comme des moyennes du type :

$$(40) \quad \langle A \rangle = \int \mathcal{A}(t, f) P(t, f) dt df$$

Ces mesures constituent une extension de la classe des mesures usuelles obtenues par filtrage et détection quadratique.

Il est possible, par des opérations du type (40), d'obtenir de nouvelles descriptions (t, f) sous la forme :

$$(41) \quad \tilde{P}(t, f) = \int G(t, f; t', f') P(t', f') dt' df'$$

où G est une fonction qui doit être précisée dans chaque cas particulier. La fonction \tilde{P} ainsi obtenue ne correspond plus en général à une description complète de la partie utile mais doit être considérée comme le résultat d'un traitement opéré sur cette dernière.

Dans certains cas le traitement (41) peut se déduire d'une opération effectuée sur le signal. A titre d'exemple on peut citer la moyenne \tilde{P} obtenue en prenant pour G la fonction :

$$(42) \quad G(t, f; t', f') = 2 \exp \left\{ -\frac{(t-t')^2}{2\Delta t^2} - 8\pi^2 \Delta t^2 (f-f')^2 \right\}$$

Dans cette application particulièrement simple il est possible de montrer que l'expression de \tilde{P} peut aussi s'écrire :

$$(43) \quad \tilde{P}(t, f) = \left| \int S_E^*(t') S(t') dt' \right|^2$$

où $S(t')$ désigne la forme analytique du signal étudié et où $S_E(t')$ est donnée par :

$$(44) \quad S_E(t') = \frac{1}{(2\pi\Delta t^2)^{1/4}} e^{2i\pi f t' - \frac{(t-t')^2}{4\Delta t^2}}$$

Il est bien connu que la fonction (44) est la seule fonction complexe de t' vérifiant (cf(29)-(30)) :

$$\langle t' \rangle = t ; \langle f' \rangle = f ; \sigma_{t'} = \Delta t ; \sigma_{f'} = \frac{1}{4\pi\Delta t}$$

ce qui implique l'égalité (cf(28)) :

$$\sigma_{t'} \sigma_{f'} = \frac{1}{4\pi}$$

La figure 2 donne le tracé de la fonction $\tilde{P}(t, f)$ obtenue par (41)-(44) à partir de la fonction $P(t, f)$ représentée sur la figure 1. Comme cela pouvait être prévu, la nouvelle description ainsi obtenue est très proche de celle qui aurait été donnée par une analyse spectrale sur des intervalles de temps de l'ordre du

FORMULATION DE LA THEORIE DE LA COMMUNICATION DANS LE PLAN
TEMPS-FREQUENCES - ASPECTS PRATIQUES

Δt figurant dans (44).

Une comparaison des figures 1 et 2 met en évidence à la fois la facilité d'interprétation de la seconde image et la richesse de description de la première. En fait la fonction de Ville-Wigner contient toute l'information exploitable sur le signal considéré et il est clair que bien d'autres traitements que (42)-(44) sont envisageables. On peut en particulier penser à la construction de traitements qui mettraient en évidence certains caractères spécifiques des cibles et qui pourraient ainsi contribuer à la mise au point de procédés d'identification automatiques. De manière générale on peut également penser que les représentations temps-fréquences devraient trouver des applications dans les investigations sur les cibles déformables (détection radar des hélicoptères par exemple).

BIBLIOGRAPHIE

- ESCUDE (B) - Représentation en temps et fréquences des signaux d'énergie finie : analyse et observation des signaux.
Ann. Telecommunic 34 pages 101-111, 1979
- GABOR (D) - Theory of communication
J. Inst. Electr. Eng., part III, 93,
pages 429-441, 1946.
- VILLE (J) - Théorie et application de la notion de signal analytique.
Câbles et transmissions n° 1, pages 60-74 (1948).
- WIGNER (EP) - Quantum mechanical distribution function
Dans : "Perspectives in Quantum Theory"
MIT Press (1971).



Fig. 1 - Représentation Doppler-attitude d'un avion CT 20 en rotation.



FORMULATION DE LA THEORIE DE LA COMMUNICATION DANS LE PLAN
TEMPS-FREQUENCES - ASPECTS PRATIQUES

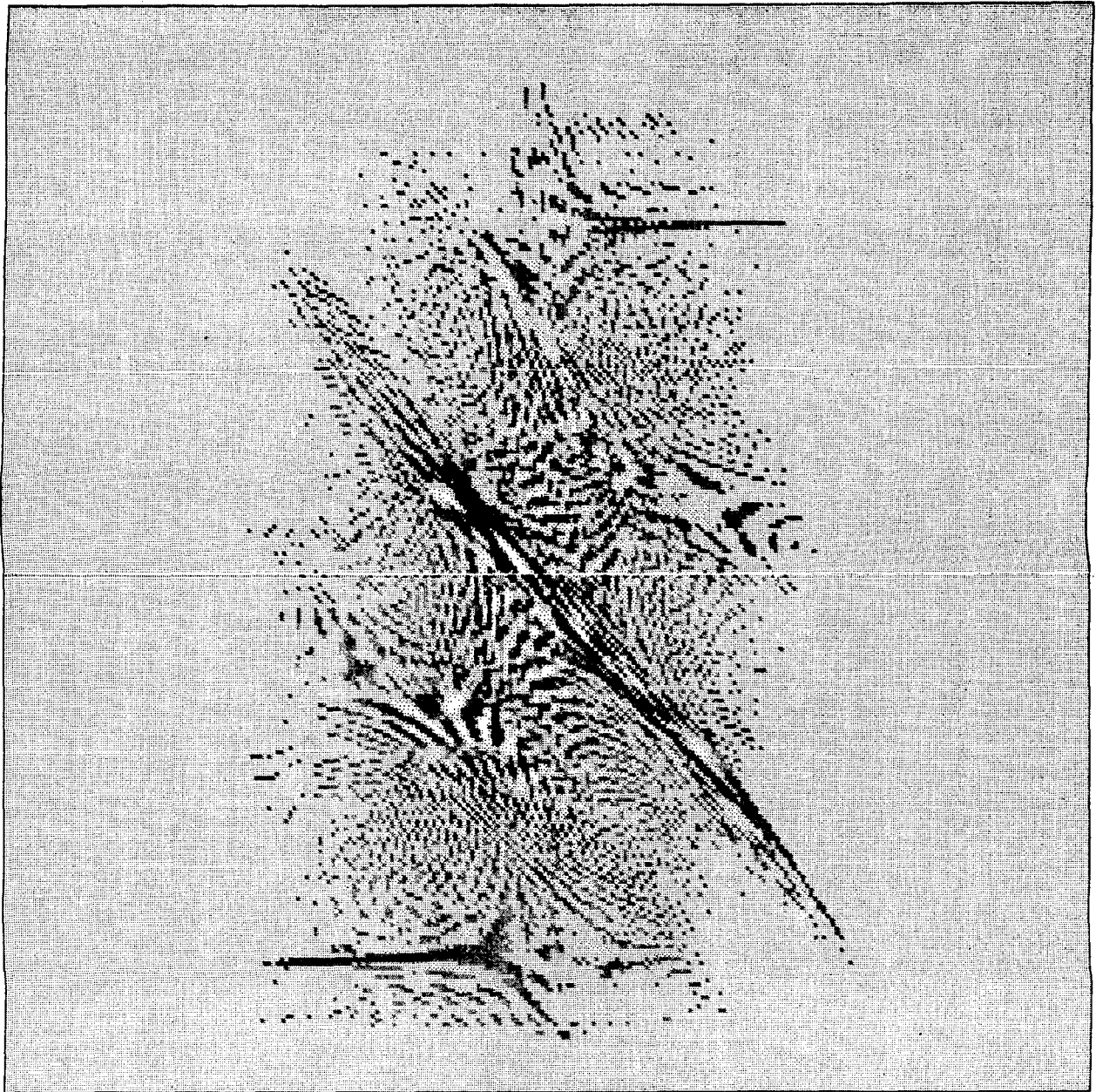


Fig. 2 — Représentation obtenue par filtrage de la représentation de la figure 1.