HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981

SPLINES D'INTERPOLATION, COMMANDE OPTIMALE ET FILTRAGE

M. GRANGER

DRET/CETHEDEC, 26 Bd. Victor 75996 PARIS ARMEES.

RESUME

Les fonctions splines constituent une généralisation naturelle des fonctions polynomiales. Les solutions de nombreux problèmes de meilleure approximation se trouvent être des fonctions splines (1).

La recherche d'une fonction spline d'interpolation avec contraintes fonctionnelles (Lg-spline) se réduit à un problème géométrique simple de projection orthogonale, pour une métrique appropriée, sur un espace de dimension finie.

La condition d'unicité de la Lg-spline d'interpolation est traduite en termes de condition d'observabilité d'un système dynamique linéaire construit à partir des données du problème.

La recherche de la spline d'interpolation est équivalente à l'estimation optimale d'un processus gaussien à l'aide de variables gaussiennes (régression linéaire). Ces deux problèmes relèvent de la même technique de projection dans un espace de Hilbert mais leur correspondance parfaite (isométrie) est établie grâce à l'existence d'un espace autoreproduisant commun (4). Le processus y (t) est généré directement par un système dynamique linéaire observable au sens précédent.

SUMMARY

Spline functions are a natural generalization of polynomial functions. The solutions of many problems of best approximation actually turn out to be spline functions (1).

The search of an interpolating spline with functional constraints becomes a very simple geometrical problem with an adapted metric.

The uniqueness condition of an interpolating spline corresponds to an observability condition for a dynamic linear system built from the data of the problem.

Interpolation by Lg - spline is equivalent to optimal estimation of a gaussian process by gaussian variables. Both problems need projection techniques in Hilbert space, but the perfect correspondance lies on existence of a common reproducing kernel Hilbert space (4). The gaussian process we want to estimate is generated directly by a dynamic linear system which is observable in the previous meaning.

I. - SPLINE D'INTERPOLATION.

On ne considère ici que l'interpolation d'une fonction réelle sur un compact de la droite réelle, $[0, T]$ par exemple.

Soit $\{t_i\}_{i=1}^N$ une suite de nombres réels tels que $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < T$

Soit n un entier naturel inférieur ou égal à N.

Définition 1 (2)

Une fonction s (t) sera appelée spline naturelle d'ordre n sur $[0, T]$, avec les noeuds $\{t_i\}_{i=1}^N$ si

- s(t) est un polynome de degré $2n-1$ dans chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, $i = 1, \ldots N-1$
- s(t) est un polynome de degré (n-1) dans $[0, t_1[$ et $]t_N, T]$
- les dérivées de s(t) de raccordent jusqu'à l 'ordre $2n - 2$: $s(t) \in C^{2n-2}[0,T]$

Nous noterons $SN_n[0, t_1, \ldots, t_N, T]$ l'ensemble de ces splines naturelles.

Remarque :

Pour $N = n$, $SN_n[0, t_1, \ldots t_N, T]$ se réduit à l'espace des polynomes de degré (n - 1).

Considérons l'espace $H^n[0,T]$ des fonctions réelles définies sur $[0,T]$ telles leur dérivée $(n-1)$ ième est absolument continue et leur dérivée nième de carré sommable.

Il est clair que

$$SN_n[0, t_1, \ldots t_N, T] \subset H^n[0,T]$$

Si $r = (r_1, \ldots, r_N)$ est un point de $\mathbb{R}^N$, on dira que $s(t)$ est une spline d'interpolation de r aux noeuds $\{t_i\}_{i=1}^N$ si

$$s(t_i) = r_i \quad , i = 1, \ldots, N$$

L'intérêt des splines naturelles (de préférence aux splines polynomiales) réside dans l'existence et l'unicité d'une spline d'interpolation pour chaque r.

La spline naturelle d'interpolation peut également être caractérisée par une propriété d'extrémalité.

Définition 2

La spline naturelle d'ordre n d'interpolation de r aux noeuds $\{t_i\}_{i=1}^N$ est la solution unique du problème

$$\int_0^T (s^{(n)}(t))^2 dt = \min\left\{\int_0^T (f^{(n)}(t))^2 dt, f \in I_r\right\}$$

où $I_r \triangleq \{ f \in H^n[0,T] \,/\, f(t_i) = r_i, i = 1, \ldots, N\}$

avec $s(t) \in I_r$

Nous pouvons, à partir de cette définition, considérer des généralisations des splines naturelles d'interpolation.

L - Spline d'interpolation

Soit L un opérateur différentiel d'ordre n non dégénéré:

$$(1) \quad L = D^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j \quad \text{où} \quad D^j \triangleq \frac{d^j}{dt^j}$$

Nous supposerons que

$$a_j(t) \in C^j[0,T] \quad , j = 0, \ldots, n-1$$

Définition 3 (1)

Soit $r = (r_1, \ldots, r_N)$ un point de $\mathbb{R}^N$. On dira que $\sigma(.)$ est la L - spline interpolant r aux noeuds $\{t_i\}_{i=1}^N$ ssi $\sigma(.)$ est la solution unique du problème

$$\int_0^T (Ls(t))^2 dt = \min\left\{\int_0^T (Lf(t))^2 dt, f \in I_r\right\}$$

avec $s(.) \in I_r$

L'existence et l'unicité de la L - spline d'interpolation est assurée par une condition de Haar sur le noyau de L.

Lg - Spline d'interpolation.

On peut remplacer les contraintes ponctuelles par des contraintes fonctionnelles.

$H^n[0,T]$ a une structure d'espace de Hilbert

$$\forall f \in H^n[0,T], \ \|f\|_{H^n} = \langle f, f\rangle_{H^n} = \int_0^T \sum_{i=0}^n (f^{(i)}(t))^2 dt$$

Soit $(H^n[0,T])'$ le dual de $H^n[0,T]$, et soit $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^N$ une suite finie d'éléments de $(H^n[0,T])'$ linéairement indépendants sur $(H^n[0,T])'$.

Comme

$H^n[0,T] \hookrightarrow C^{n-1}[0,T]$ (injection continue) on pourra prendre pour λ_j des fonctionnelles du type

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ji} \delta_{t_j}^{(i)} : \quad f \longmapsto \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ji} f^{(i)}(t_j), \ j = 1, \ldots N$$

La L-spline correspond au cas où $\lambda_j = \delta_{t_j}$

Par analogie avec la définition 3 nous aurons

Définition 4 (4)

Soit $r = (r_1, \ldots, r_N)$ un point de $\mathbb{R}^N$. Une fonction s(t) sera appelée Lg - spline interpolant r par rapport à Λ ssi elle satisfait la condition

$$(Lg) \quad \begin{cases} \int_0^T (Ls(t))^2 dt = \inf\left\{\int_0^T (Lf(t))^2 dt, f \in \Lambda^{-1}(r)\right\} \\ \text{où} \quad \Lambda^{-1}(r) \triangleq \{ f \in H^n[0,T] \,/\, \lambda_j f = r_j, j = 1, \ldots, N\} \end{cases}$$

avec $s(.) \in \Lambda^{-1}(r)$

L'hypothèse de l'indépendance linéaire des $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ sur $H^n[0,T]$ assure que $\Lambda^{-1}(r)$ est non vide.

On peut donner un théorème d'existence et d'unicité de la Lg - spline.

Théorème 1 (5)

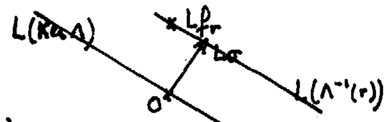
i) Il existe toujours une solution de (Lg)

ii) s (t) est solution de (Lg) ssi

$$(2) \quad \int_0^T Ls(t) Lg(t) dt = 0 \quad , \forall g \in \operatorname{Ker} L = \Lambda^{-1}(0)$$

iii) La solution de (Lg) est unique ssi

$$(3) \quad \operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Ker} \Lambda = \{0\}$$



Dans $L^2[0,T]$, $L\sigma$ est la projection orthogonale de l'origine sur $L(\Lambda^{-1}(r))$.

II. - LIENS AVEC D'AUTRES PROBLEMES.

A) Λ-observabilité d'un système dynamique.

Soit g un élément de Ker L. Il lui correspond une représentation "interne"

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ g(t) = Cx(t) \quad , t \in [0,T] \end{cases}$$

où $x(t) \triangleq \begin{pmatrix} g(t) \\ \vdots \\ g^{n-1}(t) \end{pmatrix}$, $C \triangleq (1, 0 \ldots 0)$, $A(t) \triangleq \begin{pmatrix} 0 & & I \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ -a_0(t) & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$

Soit $\Phi(t, \tau)$ la matrice fondamentale de $A(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau) \quad \text{avec} \quad \Phi(\tau,\tau) = I_{n \times n}$$

$$x(t) = \Phi(t,0)x(0)$$

Nous avons l'équivalence

$$g \in \operatorname{Ker} L \iff g(t) = c\,\Phi(t,0)x(0), \forall t \in [0,T], \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

Définition 5 : Le système (S) est dit Λ-observable si la connaissance des $(\lambda_j g)_{j=1}^N$ détermine de façon unique l'état initial $x(0)$.

Remarque : La propriété de Λ - observabilité est plus forte que celle de la complète observabilité.

Soit M la matrice

$$M \triangleq \begin{pmatrix} \lambda_1 c\,\Phi(\cdot,0) \\ \lambda_N c\,\Phi(\cdot,0) \end{pmatrix}$$

Pour $g \in \ker L$,

$$\Lambda g \triangleq \begin{pmatrix} \lambda_1 g(\cdot) \\ \lambda_N g(\cdot) \end{pmatrix} = M x(0)$$

D'après la définition 5. le système (S) sera Λ-observable ssi la matrice M est de rang n.

Proposition 1 (5)

Les deux conditions suivantes sont équivalentes

i) rang de $M = n$

ii) $\operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Ker} \Lambda = \{0\}$

On a donc, d'après le théorème 1, et la proposition 1

Théorème 1 bis

La Lg - spline d'interpolation de r par rapport à Λ est unique ssi le système (S) construit à partir de l'opérateur L est Λ - observable.

B) Commande optimale avec contraintes fonctionnelles

Considérons le problème entrée - sortie

$$Lf(t) = u(t) \quad , \quad f \in H^n[0,T], \ u \in L^2[0,T].$$

Il lui correspond le système en variables d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b\,u(t) \\ f(t) = C\,x(t) \end{cases}$$

où $$x(t) \triangleq \begin{pmatrix} f(t) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons la commande qui minimise la fonctionnelle de coût

$$J(u) \triangleq \int_0^T u^2(t)\,dt$$

Théorème 2

La commande à énergie minimale qui assure à la sortie f(t) du système (S') de satisfaire les contraintes

$$f \in \Lambda^{-1}(r)$$

est

$$u^*(t) = L\sigma(t) \quad , \quad t \in [0,T]$$

où $\sigma(.)$ est la Lg - spline interpolant r par rapport à Λ.

C) Pseudo-inverse (5)

Sous l'hypothèse (3), on peut munir l'espace $H^n[0,T]$ d'une norme $|\ |_{H^n}$ tenant compte explicitement des données essentielles du problème, à savoir Λ et L, équivalente à la norme initiale $\|\ \|_{H^n}$, et telle que la Lg -spline interpolant r par rapport à Λ soit

$$\sigma(t) = \Lambda^+(r)$$

où Λ^+ désigne la pseudo -inverse de Λ, c'est-à-dire la meilleure approximation (pour la norme $|\ |_{H^n}$) de 0 dans $\Lambda^{-1}(r)$

III. - PROBLEME SIMPLE GEOMETRIQUE POUR UNE METRIQUE COMPLIQUEE.

A) Choix de la métrique.

Sous l'hypothèse fondamentale (3), la restriction de Λ à Ker L est injective. Λ(Ker L) est donc de dimension n et il existe une sous famille de $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$, de taille n, linéairement indépendante sur Ker L. On peut supposer, pour simplifier l'écriture, que cette sous-famille est $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$

Soit $\{z_j\}_{j=1}^n$ la base de Ker L, duale de $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$

(4) $$\begin{cases} L z_j = 0 \ , \ j = 1 \dots n \\ \lambda_i z_j = \delta_{ij} \ , \ i,j = 1 \dots n \end{cases}$$ (5)

Soit G (. , .) le noyau de Green du problème avec contraintes

(6) $$\begin{cases} LG(\cdot,\tau) = \delta(\cdot - \tau) \\ \lambda_j G(\cdot,\tau) = 0 \ , \ j = 1,\dots,n \end{cases}$$ (7)

Comme $H^n[0,T] = \mathrm{Ker}\, L \oplus (\mathrm{Ker}\, L)^\perp$

(8) $$\forall f \in H^n[0,T] \ , \ f(\cdot) = \sum_{j=1}^n (\lambda_j f) z_j(\cdot) + \int_0^T G(\cdot,\tau) Lf(\tau)\,d\tau$$

Dans $H^n[0,T]$ on peut mettre un nouveau produit scalaire

(9) $$\langle\langle f, g \rangle\rangle_{H^n[0,T]} = \sum_{j=1}^n (\lambda_j f)(\lambda_j g) + \int_0^T Lf(\tau)\,Lg(\tau)\,d\tau$$

en particulier

(10) $$\langle\langle z_j, z_\ell \rangle\rangle = \delta_{k\ell} \qquad k = 1 \dots n$$

La norme correspondante sera notée $|||\ |||$:

(11) $$|||f|||^2 = \sum_{j=1}^n (\lambda_j f)^2 + \int_0^T (Lf(\tau))^2\,d\tau$$

Pour un r fixé dans $\mathbb{R}^N$, et si $f \in \Lambda^{-1}(r)$

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j f)^2 = \sum_{j=1}^n (r_j)^2 = \mathrm{Cte} = C$$

Ainsi

$$|||f|||^2 = C + \|Lf\|^2_{L^2[0,T]}$$

On peut donc donner une nouvelle définition (ce ne sera pas la dernière) d'une Lg - spline d'interpolation

Définition 6.

Sous l'hypothèse (3), la Lg - spline interpolant r par rapport à Λ, soit $\sigma(.)$ est la solution unique du problème

$$|||\sigma||| = \min\{|||f|||, f \in \Lambda^{-1}(r)\}, \ \sigma \in \Lambda^{-1}(r)$$

B) Problème géométrique simple

Dans $H^n[0,T]$ muni du produit scalaire $\langle\langle , \rangle\rangle$, soit $(H^n[0,T], \langle\langle , \rangle\rangle)$, les représentants des $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ (donnés par le théorème de Riesz) sont notés $\{h_j\}_{j=1}^N$

$$\langle\langle h_j(\cdot), f(\cdot) \rangle\rangle = \lambda_j f \ , \ \forall f \in H^n[0,T]$$

On montre facilement que

(12) $$h_i(\cdot) = z_i(\cdot) \ , \quad i = 1, \dots, n$$

Désignons par $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel de dimension N engendré par les vecteurs $\{h_j(\cdot)\}_{j=1}^N$. Nous l'appellerons l'espace des contraintes.

(13) $$\mathcal{H} \triangleq \{f(\cdot) \in H^n[0,T] / f(\cdot) = \sum_{j=1}^N \alpha_j h_j(\cdot), \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

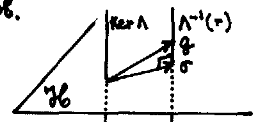
Comme

$$\mathrm{Ker}\, L = \mathcal{H}^\perp$$

Nous avons la décomposition orthogonale

(14) $$H^n[0,T] = \mathrm{Ker}\,\Lambda \oplus \mathcal{H}$$

Définition 7. - La Lg spline d'interpolation de r par rapport à Λ, soit $\sigma(.)$, est la projection orthogonale d'un élément quelconque de $\Lambda^{-1}(r)$ sur l'espace des contraintes $\mathcal{H}$.



C) Calcul explicite de la Lg - spline d'interpolation (5)

D'après la définition 7, $\sigma(\cdot)$ est de la forme

$$\sigma(\cdot) = \sum_{i=1}^N \alpha_i h_i(\cdot)$$

Soit $\mathcal{H}$ la matrice de Gram des vecteurs $\{h_j\}_{j=1}^N$

$$\mathcal{H} = (\langle\langle h_i, h_j \rangle\rangle)_{i,j=1\dots N} = \begin{pmatrix} I_{nn} & \vdots\ \times \\ \cdots \times \cdots & \times \end{pmatrix}$$

Alors

(15) $$\sigma(t) = h^T(t)\,\mathcal{H}^{-1} r$$

où $$h(\cdot) \triangleq \begin{pmatrix} h_1(\cdot) \\ \vdots \\ h_N(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ h_{n+1} \\ h_N \end{pmatrix} \quad , \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix}$$

Remarque

- Si n = N, alors $\mathcal{H} = I_{n \times n}$

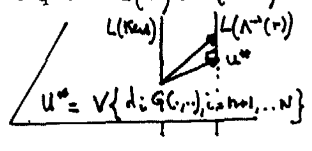
  et $\sigma(t) = \sum_{i=1}^n r_i z_i(t) \quad , \forall t \in [0,T]$

- lorsque N > n, par le procédé de Schmidt, on peut construire une base orthonormée de $\mathcal{H}$, soit $(z_1, \dots z_n, h^*_{n+1}, \dots h^*_N)$. La matrice de Gram de cette nouvelle base est alors $I_{N \times N}$. Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt étant par nature récursif, on peut ainsi construire la Lg - spline d'interpolation de $(r_1, \dots, r_{N+1})$ par rapport à $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N+1}$ directement à partir de la Lg-spline interpolant $(r_1, \dots, r_N)$ par rapport à $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$

D) Calcul explicite de la commande optimale du problème II, B

On montre que $L(\mathcal{H}) \oplus L(\mathrm{Ker}\,\Lambda) = L(H^n[0,T]) = L^2[0,T]$

(16)



La même méthode géométrique que la précédente permet de calculer explicitement u^* en fonction de G (. , . .) et $\{h_j\}_{j=1}^{N}$ (5).

E) Espace autoreproduisant (6)

Définition 8

Une fonction $K(t,\tau)$ de $[0,T]^2$ dans $\mathbb{R}$ est appelée noyau reproduisant de $(H^n[0,T], \ll , \gg)$ ssi

i) $K(\cdot,t) \in H^n[0,T] \quad , \forall t \in [0,T]$

(17) ii) $\ll K(\cdot,t), f(\cdot) \gg = f(t) \quad , \forall f \in H^n[0,T]$

La propriété ii) indique que $K(.,t)$ est le représentant dans $(H^n[0,T], \ll , \gg)$ de la mesure de dirac .
On dit alors que $(H^n[0,T], \ll , \gg)$ est autoreproduisant

Il faut remarquer que le noyau reproduisant, s'il existe dépend du produit scalaire choisi.

Proposition (5)

$(H^n[0,T], \ll , \gg)$ admet pour noyau reproduisant

(18) $$K(t,\tau) = \sum_{j=1}^{n} z_j(t) z_j(\tau) + \int_0^T G(t,u) G(\tau,u)\, du$$

la famille $\{K(\cdot,t), t \in [0,T]\}$ engendre $H^n[0,T]$

$$H^n[0,T] = \overline{\{f(\cdot) / f(\cdot) = \sum \alpha_i K(\cdot,t_i), \alpha_i \in \mathbb{R}, t_i \in [0,T]\}}^{\|\ \|}$$

où la notation $\overline{A}$ désigne la fermeture de A pour la norme $\|\ \|$.

Lien entre noyau reproduisant et spline d'interpolation

La connaissance du noyau reproduisant permet le calcul direct de la spline d'interpolation

a) L - Spline d'interpolation.

$$\lambda_j = \delta_{t_j} \quad , j = 1, \dots, N$$

Ainsi

(19) $$K(\cdot,t_j) = h_j(\cdot) \quad , j = 1, \dots, N$$

(20) $$\mathcal{H} = (\ll K(\cdot,t_i), K(\cdot,t_j) \gg)_{i,j} = (K(t_i,t_j))_{i,j}$$

b) Lg - spline d'interpolation

(21) $$\lambda_{j*} K(\cdot,*) = h_j(\cdot)$$

(22) $$\mathcal{H} = \{\lambda_{i*} \{\lambda_j . K(\cdot,*)\}\}_{i,j}$$

IV. - PROBLEME STOCHASTIQUE EQUIVALENT

A) Espace gaussien et espace autoreproduisant

On sait construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{a}, P)$ et un processus gaussien centré $Y(t)$ admettant pour covariance le noyau $K(t,\tau)$. (6)

(23) $$E(Y(t)) = 0$$

(24) $$E[Y(t)Y(\tau)] = \langle Y(t), Y(\tau) \rangle_{L^2(\Omega,a,P)} = K(t,\tau)$$

A $Y(t)$ correspond l'espace gaussien

$$G(Y) = \overline{\{Z \in L^2(\Omega,a,P) / Z = \sum \alpha_i Y(t_i), \alpha_i \in \mathbb{R}\}}^{L^2(\Omega,a,P)}$$

On sait construire un espace autoreproduisant à partir d'un espace gaussien. (6)

A toute variable aléatoire Z appartenant à $G(Y)$ faisons correspondre la fonction f (.) appartenant à $\mathbb{R}^{[0,T]}$ par l'application linéaire

(26) $$U : Z \longmapsto f(\cdot) = E[Z Y(\cdot)] = (UZ)(\cdot)$$

On note $\mathcal{R}(U)$ l'image de $G(Y)$ par U.

L'application U de G (Y) sur $\mathcal{R}(U)$ est un isomorphisme

(27) $$U^{-1} K(\cdot,t) = Y(t)$$

Si on munit $\mathcal{R}(U)$ du produit scalaire

(28) $$\langle f,g \rangle_{\mathcal{R}(U)} = \langle U^{-1}f, U^{-1}g \rangle_{L^2(\Omega,a,P)}$$

alors $\mathcal{R}(U)$ devient un espace de Hilbert isométrique à G (Y) , admettant $K(t,\tau)$ comme noyau reproduisant. En effet, si $f(\cdot) = (UZ)(\cdot)$,

$$\langle f(\cdot), K(\cdot,t) \rangle_{\mathcal{R}(U)} = \langle Z, Y(t) \rangle_{L^2(\Omega,a,P)} = (UZ)(t) = f(t)$$

Les espaces de Hilbert $(H^n[0,T], \ll , \gg)$ et $(\mathcal{R}(U), \langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{R}(U)})$ sont tous deux engendrés par $\{K(t,\tau), t \in [0,T]\}$ et fermés l'un pour la métrique $\ll , \gg$, l'autre pour $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{R}(U)}$.

Comme

(29) $$\ll K(\cdot,t), K(\cdot,\tau) \gg = K(t,\tau) = \langle K(\cdot,t), K(\cdot,\tau) \rangle_{\mathcal{R}(U)}$$

les deux espaces sont les mêmes.

Proposition

(30) $$(H^n[0,T], \ll , \gg) = (\mathcal{R}(U), \langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{R}(U)})$$

B) Equivalence entre interpolation par Lg-spline et estimation.

Le problème de minimisation qui nous avait servi à définir la Lg - spline dans $(H^n[0,T], \ll , \gg)$ se transpose dans l'espace gaussien $G(Y)$ par l'isométrie inverse U^{-1}.

Rappelons que

(27) $$U^{-1}(K(\cdot,t)) = Y(t).$$

Soit

(28) $$U^{-1}(h_j(\cdot)) = Z_j \quad , j = 1 \dots N$$

Les variables aléatoires Z_j sont gaussiennes et centrées. Elles engendrent un sous espace vectoriel de $G(Y)$ de dimension N, soit $\mathcal{Z}$.

(29) $$\mathcal{Z} \triangleq \{ z \in G(Y) / z = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j Z_j \}$$

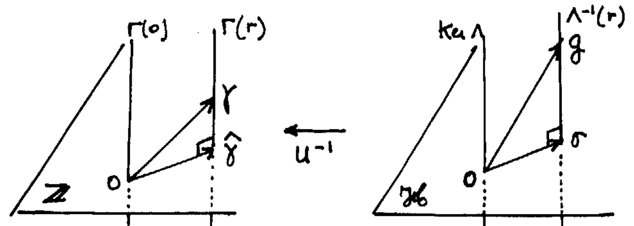
Au sous espace affine $\Lambda^{-1}(r)$ dans $H^n[0,T]$ correspond le sous espace affine $\Gamma(r)$ dans $G(Y)$ tel que

$$\forall \gamma \in \Gamma(r) \ , \ \langle Z_j, \gamma \rangle_{L^2(\Omega,a,P)} = E[Z_j \gamma] = r_j \ , \ j = 1 \dots N$$

A la Lg-spline d'interpolation de r par rapport à Λ correspond la variable aléatoire gaussienne $\hat{\gamma}$ telle que

$$\hat{\gamma} = \mathrm{proj}_{/\mathcal{Z}}\, \gamma \quad , \ \forall \gamma \in \Gamma(r)$$
$$= E[\gamma / Z_1, \dots, Z_N]$$

Nous avons donc la correspondance



D'après la propriété d'autoreproduction dans $H^n[0,T]$

$$\sigma(t) = \ll \sigma(\cdot), K(\cdot,t) \gg$$

D'après l'isométrie U^{-1}

$$\sigma(t) = \langle \hat{\gamma}, Y(t) \rangle_{L^2(\Omega,a,P)}$$
$$= \langle \gamma, \hat{Y}(t) \rangle_{L^2(\Omega,a,P)}$$

où

$\hat{Y}(t) = E[Y(t)/Z_1 \dots Z_N]$: regression linéaire de $Y(t)$ par rapport à $Z_1 \dots Z_N$

On trouve

(30) $$\sigma(t) = E[Y(t) \mathcal{Z}^T][\mathrm{cov}\, \mathcal{Z}]^{-1} r \quad \text{où} \quad \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que c'est la même formule que (15).

C) Génération du processus gaussien $Y(t)$ et des variables aléatoires $\{Z_j\}_{j=1}^{N}$

Jusqu'à présent nous n'avons fait que montrer la similitude parfaite entre un problème (déterministe) d'interpolation par Lg - spline et un problème (stochastique) simple d'estimation au sens des moindres carrés. Cette équivalence, interessante en soi-même, n'apporte pas encore de facilités de calcul de la Lg - spline. En effet pour l'instant le processus gaussien centré $Y(t)$ est construit à partir de sa covariance $K(t,\tau)$ (18), noyau lui même construit à partir d'un noyau de Green $G(t,\tau)$ (6-7) qui correspond à l'opérateur différentiel L et aux fonctionnelles de contrainte $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$. On sait que le calcul explicite d'un noyau de Green n'est pas chose aisée. Les variables aléatoires $\{Z_j\}_{j=1}^N$ servant à estimer $Y(t)$ sont elles-mêmes construites à partir des représentants $\{h_j(\cdot)\}_{j=1}^N$, dans $(H^n[0,T], \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle)$, des contraintes $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$

Rappelons que le noyau de Green $G(t,\tau)$ est solution de

$$
\begin{cases} L\,G(\cdot,\tau) = \delta(\cdot-\tau) & (6)\\ \lambda_j G(\cdot,\tau) = 0 \qquad j=1,\dots,n & (7)\end{cases}
$$

Bien que $G(\cdot,\tau)$ ne soit pas un élément de $H^n[0,T]$, on peut montrer que, formellement,

$$
\langle\langle G(t,\cdot), G(\tau,\cdot)\rangle\rangle = \delta(t-\tau) \tag{31}
$$

Formellement aussi, mais cela peut se justifier à l'aide des distributions aléatoires, si $v(t)$ est un bruit blanc

$$
\langle v(t), v(\tau)\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{Q},P)} = \delta(t-\tau) \tag{32}
$$

Comme

$$
L\,K(\cdot,t) = G(\cdot,t)
$$

et

$$
U^{-1}(K(\cdot,t)) = Y(t)
$$

On en déduit

$$
L\,Y(t) = v(t) \tag{33}
$$

$Y(t)$ est obtenu par passage d'un bruit blanc gaussien à travers un filtre linéaire non stationnaire. Ce filtre est le même que celui qui correspond au système (S')

$$
S'' \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + b\,v(t)\\ y(t) = C\,x(t)\end{cases}
$$

où $x(t) = \begin{pmatrix} Y(t)\\ \vdots \\ Y^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$, $E[v(t)v(\tau)] = \delta(t-\tau)$

Les variables aléatoires qui servent à estimer $Y(t)$ sont données par

$$
Z_j = \lambda_j Y(\cdot)
$$

Il reste à déterminer la condition initiale $X(0)$ du système (S''). La condition de Λ - observabilité du système (S'') permet d'y remonter.

Remarque :

On sait que les n premières composantes du vecteur aléatoire Z sont orthonormées (donc indépendantes car gaussiennes). De même que dans l'approche déterministe on pouvait construire une base orthonormée dans l'espace des contraintes $\mathcal{H}$, de même dans l'approche stochastique on peut extraire les innovations de la suite des variables aléatoires $\{Z_j\}_{j=1}^N$, soit $\{\tilde{Z}\}_{j=1}^N$

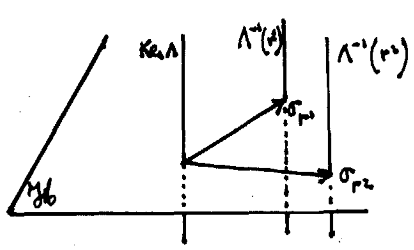
$$
\tilde{Z}_i = Z_i \quad i=1,\dots,n
$$

$$
\tilde{Z}_j = Z_j - E[Z_j / Z_1,\dots,Z_{j-1}] \ , \ j=n+1,\dots,N
$$

La matrice de covariance de $\tilde{Z}$ est alors diagonale.

D) Deux problèmes de détection équivalents.

Soit $r^k = (r_1^k,\dots,r_N^k)$, $k=1,2$ deux points de $\mathbb{R}^N$. Soit $\sigma_{r^k}(\cdot)$ la spline d'interpolation de r^k par rapport à Λ.



D'après la formule (15)

$$
\sigma_{r^k}(t) = (\alpha^k)^T h(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_i^k h_i(t) \ , \ k=1,2 \tag{34}
$$

où

$$
\alpha^k = \mathcal{H}^{-1} r^k
$$

On a donc

$$
\langle\langle \sigma_{r^1}, \sigma_{r^2}\rangle\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^1 \alpha_j^2 \langle\langle h_i, h_j\rangle\rangle
$$

$$
= (\alpha^1)^T \mathcal{H}\, \alpha^2
$$

$$
= (r^1)^T \mathcal{H}^{-1} \mathcal{H}\mathcal{H}\, r^2
$$

Dans $\mathcal{H} \subset H^n[0,T]$

$$
\langle\langle \sigma_{r^1}, \sigma_{r^2}\rangle\rangle = (r^1)^T \mathcal{H}^{-1} r^2 \tag{35}
$$

Si on munit l'espace $\mathbb{R}^N$ du produit scalaire

$$
\langle r^1, r^2\rangle_{\mathcal{H}^{-1}} \stackrel{\Delta}{=} (r^1)^T \mathcal{H}^{-1} r^2 \tag{36}
$$

et de la norme correspondante

$$
\| r \|_{\mathcal{H}^{-1}} \stackrel{\Delta}{=} r^T \mathcal{H}^{-1} r \tag{37}
$$

l'application qui à r fait correspondre la Lg - spline d'interpolation $\sigma_r(\cdot)$ devient une isométrie de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathcal{H}$.

$$
\| \sigma_r(\cdot) \| = \| r \|_{\mathcal{H}^{-1}} \tag{38}
$$

Considérons maintenant les deux problèmes de détection suivants

$$
D : \begin{cases} H_1 : Z(t) = \sigma_r(t) + Y(t)\\ H_0 : Z(t) = Y(t)\end{cases}
$$

$$
D' \begin{cases} H'_1 : z = r + w\\ H'_0 \ \ \ z = w\end{cases}
$$

où

- $\sigma_r(\cdot)$ est la Lg-spline d'interpolation de r par rapport à Λ.
- $Y(t)$ est un processus gaussien centré de covariance $K(t,\tau)$.
- w est un N-vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance $\mathcal{H}$

Calculons les rapports de vraisemblance dans les deux cas

$$
RV(Z) = \frac{dP_1}{dP_0}(Z) = \exp\left\{\langle\langle \sigma_r(\cdot), Z(\cdot)\rangle\rangle - \tfrac{1}{2}\|\sigma_r\|^2\right\} \tag{39}
$$

$$
RV'(z) = \frac{dP'_1}{dP'_0}(z) = \exp\left\{\langle r, z\rangle_{\mathcal{H}^{-1}} - \tfrac{1}{2}\| r\|^2_{\mathcal{H}^{-1}}\right\} \tag{40}
$$

Comme

$$
\| \sigma_r(\cdot) \|^2 = \| r \|_{\mathcal{H}^{-1}} , \tag{38}
$$

Ces deux problèmes D et D' ont même détectabilité et même probabilité d'erreur.

$\sigma_r(\cdot)$ et r $(r_j = \lambda_j(\sigma_r\cdot))$ contiennent la même information.

Conclusions

Trois problèmes

- le premier d'analyse numérique.
- le second de contrôle optimal.
- le troisième d'estimation

sont intimement liés.

Le dernier problème admet une solution simple, donc le passage du troisième au premier n'offre pas d'intérêt dans la pratique. En revanche le passage du premier au troisième, ou du second au troisième via le premier peut présenter des avantages.

La connaissance du noyau reproduisant dans le premier (ou le second) problème enlève tout intérêt à un recours au troisième.

BIBLIOGRAPHIE

1) T. N. E. GREVILLE - Theory and applications of spline functions - Academic Press 1969.

2) P. J LAURENT Approximation et optimisation - Hermann Paris 1972.

3) M.L. WIENERT et G.S. SIDHU. On uniqueness conditions for optimal curve fitting - JOTA vol. 23 p. 211-216. Oct. 1977.

4) M.L. WIENERT et G.S. SIDHU. A stochastic framework for recursive computation of spline functions. - Part. I. Interpolating Splines. IEEE vol. IT 24 n°1 p. 45-50 Janvier 1978.

5) M. GRANGER Spline d'interpolation, commande et filtrage - Revue du CETHEDEC n° 65 - 1980 -

6) N. ARONSZAJN Theory of reproducing Kernels Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 68. p. 337-407 - 1950.

7) J. NEVEU Processus aléatoires gaussiens. Les Presses de l'Université de Montréal 1968.