

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

ANALYSE INTERSPECTRALE

J.L. LACOUME - C. LATOMBE

CEPHAG (Equipe de recherche associée au CNRS (ERA 93)) - B.P. 46 - 38402 SAINT-MARTIN-D'HERES

RESUME

L'analyse interspectrale a pour objectif la mesure de densités spectrales de puissance (dsp) et de densités spectrales de puissance d'interaction (dsp_i) de signaux à plusieurs composantes et les traitements issus de cette mesure. Ces grandeurs que l'on regroupe dans la matrice interspectrale permettent de caractériser les relations existant entre les composantes de multesignaux. Les applications de ces mesures sont très variées mais les domaines essentiels d'application sont le filtrage de signaux à plusieurs composantes, et le traitement d'antenne. La matrice interspectrale permet dans ce dernier cas de caractériser (complètement ou non) le champ de sources.

Les techniques utilisées pour estimer les éléments de la matrice interspectrale sont essentiellement de deux types :

- les méthodes non paramétriques, s'appuyant directement sur une transformation de Fourier numérique : ces méthodes sont les plus développées et plusieurs algorithmes de traitement, principalement pour l'élaboration d'une valeur moyenne, ont été développés.
- les méthodes paramétriques, utilisant un modèle du signal : il s'agit principalement de la méthode du modèle autorégressif.

Nous présentons les propriétés principales des estimateurs de la matrice interspectrale dans ces deux situations en insistant sur les aspects spécifiques à l'analyse interspectrale :

- position en temps de la fonction d'apodisation et propriétés statistiques de l'estimée.
- puissance du moyennage et rang de la matrice interspectrale.

L'exposé présenté est un essai de synthèse des débats de la journée sur l'analyse interspectrale tenue au CEPHAG le 29 Avril 1980.

SUMMARY

The cross spectral analysis is concerned with the measurement of spectral power densities and of cross spectral power densities of multicomponent signals. These quantities, gathered into the cross spectral matrix, characterize the relations between the signal components. The cross spectral matrix has a lot of applications essentially in multicomponent signal filtering and in array processing.

The cross spectral matrix estimation technics belong to two classes :

- the non parametric methods use a Fourier transform algorithm : these methods are commonly applied and a great number of algorithms, especially for obtention of mean values, have been developed.
- the parametric methods start from a signal modelization. The most common model is the autoregressive one.

We shall present the essential properties of the cross spectral matrix estimation focussing our interest on the properties specific to cross spectral analysis :

- relation between the time position of the smoothing window and the statistical properties of the estimate.
- number of degrees of freedom of the estimates and cross spectral matrix rank.

This lecture presents the essential results of the "cross spectral analysis symposium" held in the CEPHAG the 29th, April 1981.



1 - INTRODUCTION

L'analyse interspectrale concerne l'étude des relations entre les composantes d'un signal à N composantes.

Les grandeurs caractéristiques utilisées dans cette analyse sont les densités spectrales de puissance (dsp) et les densités spectrales de puissance d'interaction (dspi). Ces diverses grandeurs sont habituellement regroupées dans la matrice interspectrale $\underline{Y}(\nu)$. Cette matrice N x N a pour éléments les dspi $\gamma_{ij}(\nu)$.

Les applications de la matrice interspectrale sont très nombreuses. Elle intervient en particulier dans le filtrage des signaux à N composantes, issu du filtrage de WIENER, et dans le traitement d'antenne, essentiellement à la suite des travaux de MERMOZ.

L'expérimentateur dispose en général pour estimer les éléments de la matrice interspectrale d'un échantillon de durée finie des signaux étudiés. A partir de cet échantillon, une méthode d'estimation (estimateur) est définie. La forme de l'estimateur dépend du type de signal (certain ou aléatoire). Deux catégories de méthodes d'estimation ont été développées. Les méthodes non paramétriques utilisent la transformation de Fourier. De nombreux résultats théoriques sur les propriétés de ces estimateurs ont été donnés. L'ouvrage [18] est une somme de ces résultats. Les méthodes paramétriques postulent un modèle du signal. Le cas le plus général est celui du modèle autorégressif qui a été récemment étendu à l'analyse interspectrale.

2 - LA MATRICE INTERSPECTRALE : DEFINITION ET APPLICATIONS.

L'analyse interspectrale réalise l'étude des propriétés des signaux à N composantes. Nous noterons ces signaux :

$$\underline{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_N(t) \end{pmatrix}$$

Les N composantes $X_i(t)$ peuvent ne pas être de même "nature physique" et il sera courant de considérer des signaux formés de composantes représentant des grandeurs physiques différentes. Avant de définir les grandeurs entrant dans la matrice interspectrale, précisons le modèle du signal.

2.1 - Modèles de signaux

Le signal observé de durée T peut être considéré soit comme un signal certain, soit comme une réalisation particulière d'un signal aléatoire.

La distinction pratique entre ces deux situations est très largement arbitraire. On peut cependant faire quelques remarques générales permettant de déterminer le choix du modèle à partir de :

- la forme de la fonction de corrélation estimée,
- la forme de la dsp (ou dspi) non moyennée,
- le domaine de l'espace temps-fréquence occupé par le signal.

2.1.1 - Forme de la fonction de corrélation : pour des signaux aléatoires de bande passante équivalente B, l'estimée $\hat{\Gamma}_X(\tau)$ de la fonction de corrélation calculée sur un temps T_i a pour variance (1) (sous l'hypothèse gaussienne) :

$$\text{Var}[\hat{\Gamma}_X(\tau)] = \frac{\Gamma_X^2(0)}{2B \cdot T_i} \quad (1)$$

Par ailleurs, en règle générale la fonction d'auto ou d'intercorrélation présente une partie significative (au voisinage de 0 pour l'autocorrélation) et des zones latérales voisines de 0.

On cherchera donc à évaluer l'amplitude des fluctuations résiduelles de la fonction de corrélation vis à vis de leur valeur théorique (1).

Sur la figure 1b les fluctuations résiduelles maximum sont de l'ordre de la limite théorique. Le signal est donc du type certain. Sur la figure 2b les fluctuations résiduelles maximum sont de deux ou trois fois la limite théorique : le signal est donc du type aléatoire.

Le "critère" ci-dessous est soumis à de multiples limitations (pour un signal périodique par exemple la fonction de corrélation fera apparaître des variations non atténuées lorsque τ augmente) et une approche plus rationnelle, mais pas toujours réalisable, consiste à comparer plusieurs estimées de la fonction de corrélation obtenues à partir de plusieurs réalisations du même signal. Dans le cas certain, les fluctuations appréhendées à travers les différences des estimées sont nulles ou faibles vis-à-vis de la limite théorique (1). Dans le cas aléatoire au contraire, elles prennent des valeurs supérieures à (1). La figure 3 montre plusieurs réalisations de l'estimée de la fonction de corrélation d'un signal aléatoire (obtenu par filtrage RC d'un bruit blanc). La zone significative de l'estimée de la fonction de corrélation s'étend de 0 à 50 ms, au-delà apparaissent des fluctuations d'estimation mettant en évidence le caractère aléatoire du signal.

2.1.2. - Forme de la dsp ou de la dspi non moyennée :

En prenant une transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation (ou d'intercorrélation) non apodisée, on obtient une dsp (dspi) non moyennée. Cette fonction peut également être obtenue comme le module carré (ou le produit complexe) des transformées de Fourier du signal total.

Toujours dans le cas gaussien, l'écart-type relatif de cette estimation de la dsp (dspi) est voisin de 1 et les mesures seront donc très dispersées. Si les estimations de la dsp sont données à des valeurs de la fréquence distantes de $\Delta\nu = \frac{1}{T}$ (cela est fait naturellement dans tous les algorithmes numériques) les valeurs successives obtenues sont statistiquement indépendantes et leur répartition peut conduire à la dispersion statistique de la mesure.

En conclusion, l'estimée non moyennée de la dsp (dspi) sera, pour les signaux certains, une fonction de la fréquence relativement "lisse" et pour les signaux aléatoires une fonction de la fréquence extrêmement fluctuante.

Ceci se voit clairement sur les figures 1c et 2c et d. Sur la figure 1c, les dsp γ_{XX} et γ_{YY} présentent une allure "lisse" caractéristique du cas certain. Il en est de même du module de la dspi et de sa phase.

Sur la figure 2c, on voit apparaître des fluctuations de 100 % du module de la dspi. Quant à la phase de la dspi elle occupe toutes les valeurs possibles et apparaît donc comme "équipartie" entre $-\pi$ et π (en fait le nuage de points obtenu présente une certaine structure qui est l'indice d'un écart au cas aléatoire pur). Enfin, la figure 2d illustre une des techniques de moyennage qui doivent être utilisées dans le cas des signaux aléatoires. On a ici mis en oeuvre la méthode du périodogramme moyenné (sur 64 réalisations successives) et la structure des signaux (retard) apparaît alors assez clairement.

ANALYSE INTERSPECTRALE

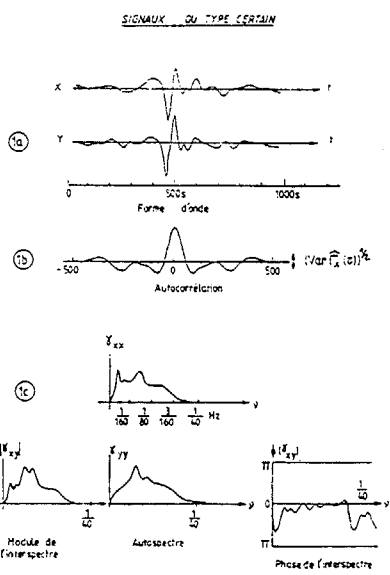


Figure 1

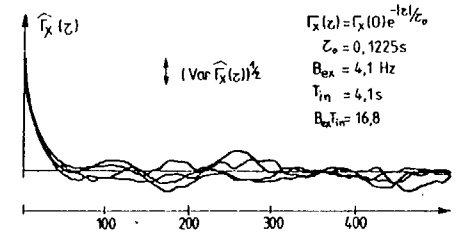
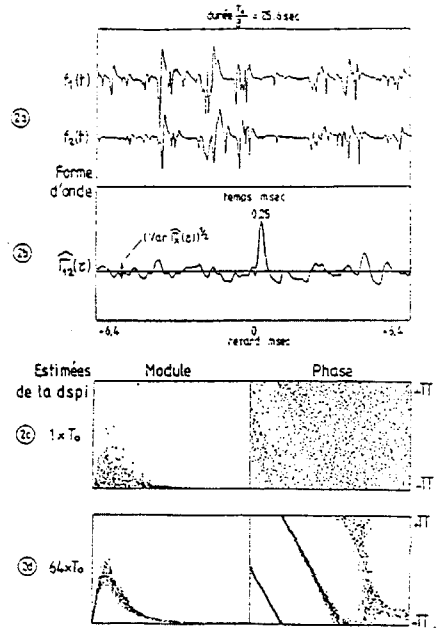


Figure 3

Réalisations de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation.

Figure 2

Signaux de type aléatoire

2.1.3 - Domaine de l'espace temps fréquence occupé par le signal : les caractérisations précédentes sont en quelques sortes partielles. La première concentre l'attention sur les propriétés temporelles du signal alors que la seconde fait appel à ses propriétés fréquentielles. Une vue plus complète de la situation est donnée par la représentation temps fréquence du signal.

Plusieurs types de représentations temps fréquence existent mais elles reviennent toutes à décrire la localisation de l'énergie d'un signal ou de l'énergie d'interaction de deux signaux en fonction du temps et de la fréquence. Pratiquement le moyen le plus employé consiste à représenter l'évolution en fonction du temps de la puissance de sortie d'une batterie de filtres contigus couvrant la gamme de fréquences étudiées.

Dans tous les cas pratiques, le signal étudié occupe une bande de fréquence finie B et dure un temps fini T (BT >> 1). L'incertitude temps fréquence qui se traduit par l'impossibilité d'une localisation infiniment précise à la fois en temps et en fréquence d'un signal a conduit plusieurs auteurs [11], [12] et [13], à la suite de Gabor, à montrer qu'un signal occupant le domaine BT de l'espace temps fréquence possède un nombre fini de degrés de liberté :

$$N = kBT \tag{2}$$

Dans cette relation k vaut en général quelques unités et sa valeur est liée à la précision avec laquelle on désire reconstruire le signal (fonction des erreurs de mesure). On peut paver le domaine temps fréquence BT de cellules élémentaires d'aire unité, chaque cellule pouvant être remplie par k signaux élémentaires. Tout signal se représente alors comme une combinaison de ces kBT signaux élémentaires.

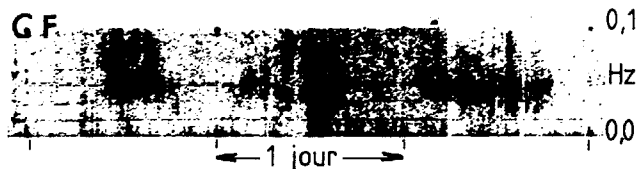


Figure 4 : Représentation temps fréquence de signaux aléatoires.

Cette façon de voir permet de formaliser précisément la notion de signal certain et de signal aléatoire. Un signal totalement aléatoire est un signal totalement inorganisé dans le plan temps fréquence et sa représentation temps fréquence occupe tout le domaine BT. Ce cas est évidemment limite et on peut en voir un exemple assez significatif sur la figure 4 où la représentation temps fréquence des signaux occupe à peu près tout le domaine disponible.

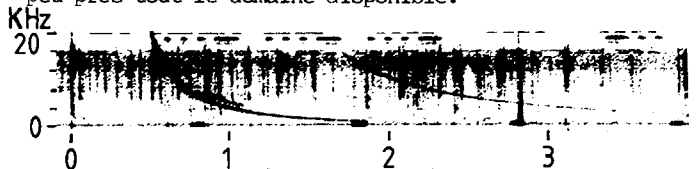


Figure 5 : Représentation temps fréquence de signaux "organisés" dans le plan temps fréquence.

Les signaux certains seront par contre des signaux "organisés" qui n'occuperont qu'une partie limitée de l'espace temps fréquence. Un exemple d'un tel type de signal apparaît sur la figure 5. Il est constitué par la partie du signal (additionnée à une composante aléatoire couvrant presque tout le domaine) qui donne une trace fine dans le diagramme temps fréquence.

En fait l'approche présentée ici permet d'introduire une évolution continue entre les signaux certains et les signaux aléatoires.

Dans un domaine possédant N degrés de liberté (kBT), nous considérons :

- comme aléatoires purs (ou intégraux) les signaux occupant les N degrés de liberté ;
- comme certains intégraux les signaux à 1 seul degré de liberté.

Enfin tous les intermédiaires possibles existeront et ils apparaîtront comme des signaux dépendant de M paramètres aléatoires (M < N).

Finalement il apparaît que la caractérisation d'un signal (certain ou aléatoire) peut s'approcher à travers - la forme de la fonction de corrélation ; - la forme de la dsp ou dspl. Une caractérisation plus fine, mais pas toujours complète, sera obtenue par la représentation temps-fréquence qui est à notre avis la méthode pratique la plus efficace pour répondre à cette question.



2.2 - Définition de la matrice interspectrale

Une définition unitaire peut être obtenue par l'intermédiaire de la matrice de corrélation. Nous nous limiterons ici aux signaux certains d'énergie finie ou de puissance moyenne finie et aux signaux aléatoires stationnaires ergodiques.

L'intercorrélation $\Gamma_{ij}(\tau)$ des composantes i et j du signal $\underline{X}(t)$ est :

$$\Gamma_{ij}(\tau) = \int X_i(t)X_j^*(t-\tau)dt$$

pour les signaux certains d'énergie finie.

$$\Gamma_{ij}(\tau) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} X_i(t)X_j^*(t-\tau)dt$$

pour les signaux certains de puissance moyenne finie.

$$\Gamma_{ij}(\tau) = E\{X_i(t)X_j^*(t-\tau)\} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} X_i(t)X_j^*(t-\tau)dt$$

pour les signaux aléatoires stationnaires ergodiques.

La matrice interspectrale $\Upsilon(\nu)$ est la matrice $N \times N$ dont les composantes $\Upsilon_{ij}(\nu)$ vérifient :

$$\Upsilon_{ij}(\nu) = \text{TF} \left\{ \Gamma_{ij}(\tau) \right\} \quad \text{TF : Transformée de Fourier}$$

On peut voir facilement à partir de cette définition que :

- pour les signaux à énergie finie, $\Upsilon_{ij}(\nu)$ est une densité spectrale d'énergie d'interaction (souvent notée $S_{ij}(\nu)$) donnée par :

$$S_{ij}(\nu) = X_i(\nu)X_j^*(\nu) \quad X_i(\nu) = \text{TF} \left\{ X_i(t) \right\}$$

- pour les signaux certains à puissance moyenne finie ou les signaux aléatoires stationnaires, soit :

$$X_i(\nu) = \text{TF} \left\{ \frac{1}{2\theta} X_i(t) \right\}$$

$\Upsilon_{ij}(\nu)$ est une densité spectrale de puissance donnée par :

$$\Upsilon_{ij}(\nu) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{X_i(\nu)X_j^*(\nu)}{2\theta} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} P_{ij}(\theta)$$

Pour les signaux certains, $P_{ij}(\theta)$ est un nombre certain (fonction de θ) et la limite est prise au sens ordinaire. Pour les signaux aléatoires $P_{ij}(\theta)$ est une variable aléatoire et la limite doit être prise en moyenne quadratique.

Cette remarque nous montre que la première partie des méthodes d'analyse spectrale (calcul de $P_{ij}(\theta)$) sera analogue quel que soit le type du signal (certain ou aléatoire). La différence apparaîtra dans l'utilisation de $P_{ij}(\theta)$ en vue d'obtenir sa moyenne. Pour les signaux certains une seule mesure donnera cette moyenne (pas de moyennage à appliquer) alors que pour les signaux aléatoires il sera nécessaire de moyenniser plusieurs réalisations indépendantes de $P_{ij}(\theta)$ pour estimer sa moyenne.

REMARQUE : Des définitions analogues peuvent être données pour les signaux à temps discret. Nous n'envisagerons pas ce cas ici.

La matrice interspectrale ainsi définie possède un certain nombre de propriétés. Indiquons les propriétés essentielles pour notre propos :

- La matrice interspectrale est définie non négative. Ceci entraîne que toutes ces valeurs propres sont ≥ 0 .
- Pour les signaux certains la matrice interspectrale est de rang 1 (1 seule valeur propre non nulle).

Pour les signaux aléatoires le rang p de la matrice interspectrale vérifie : $1 \leq p \leq N$

2.3 - Applications

Les applications principalement développées concernent le filtrage de signaux stationnaires à plusieurs composantes et le traitement d'antenne.

2.3.1 - Filtrage de signaux stationnaires à plusieurs composantes :

Le principe de ces méthodes est le suivant. Soit :

$$\underline{X}(t) = \underline{W}(t) + \underline{B}(t)$$

$$\underline{R}(t) = \underline{B}_R(t)$$

un signal aléatoire multicomposantes formé de deux parties :

- $\underline{R}(t)$ est la référence bruit seul (notion introduite par [1]) (P dimensions).
- $\underline{X}(t)$ est la somme d'une partie parasite $\underline{B}(t)$ corrélée à la référence bruit seul et d'une partie $\underline{W}(t)$ généralement composée de la somme du signal utile $\underline{S}(t)$ et d'un bruit résiduel $\underline{B}_{Res}(t)$ (N dimensions).

On veut éliminer de $\underline{X}(t)$ la partie du bruit $\underline{B}(t)$ corrélée à la référence bruit seul $\underline{B}_R(t)$ (filtrage de Wiener à N dimensions) par soustraction d'une filtrée de la référence bruit seul :

$$\hat{\underline{X}}(t) = \underline{W}(t) + \underline{B}(t) - \hat{\underline{B}}(t)$$

$$\hat{\underline{B}}(t) = F[\underline{R}(t)] : \text{filtrée de } \underline{R}(t)$$

Le filtre F est décrit par la matrice de transfert : $\underline{H}(\nu)$ (matrice $N \times p$).

Le principe d'orthogonalité nous indique que :

$$E\{(\underline{X}(t) - \hat{\underline{X}}(t)) \cdot \underline{B}_R^*(\theta)\} = 0 \quad \forall t \text{ et } \theta$$

$$\text{soit : } \underline{\Upsilon}_{XB_R}(t-\theta) = \underline{\Upsilon}_{\hat{X}B_R}(t-\theta)$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\underline{\Upsilon}_{XB_R}(\nu) = \underline{\Upsilon}_{\hat{X}B_R}(\nu) = \underline{H}(\nu) \cdot \underline{\Upsilon}_{B_R}(\nu)$$

D'où l'on déduit :

$$\underline{H}(\nu) = \underline{\Upsilon}_{XB_R}(\nu) \cdot \underline{\Upsilon}_{B_R}^{-1}(\nu)$$

Le filtre linéaire optimal (en moyenne quadratique) est déterminé par la matrice interspectrale de \underline{X} et \underline{B}_R et la matrice spectrale de \underline{B}_R .

Ce traitement s'applique lorsque l'on est capable de capter une référence bruit seul corrélée à une partie du signal observé. Un exemple d'application utilisant la composante de pression du signal de houle pour réduire le bruit de houle sur des signaux magnétiques est présentée dans [2]. On peut également utiliser ce principe pour retrouver dans un signal somme de plusieurs excitations aléatoires indépendantes la partie associée à une des excitations lorsque l'on dispose d'une référence de l'excitation cherchée.

Un exemple de recherche de la contribution d'une source sonore particulière dans le niveau sonore total d'un local industriel contenant de nombreuses sources émettant simultanément est présenté dans [3]. Dans cet exemple, le signal traité a deux composantes :

- le niveau sonore au point étudié ;
- une référence de la source étudiée.

En utilisant le principe défini ci-dessus on peut extraire de la dsp du signal reçu la partie corrélée à la source (autospectre cohérent) et donc déterminer la contribution particulière de la source étudiée. Cette application est illustrée sur la figure 6 où sont présentés la dsp du signal total (autospectre global) et la dsp (autospectre cohérent) de la partie de ce signal cohérente avec la source étudiée (torchère).

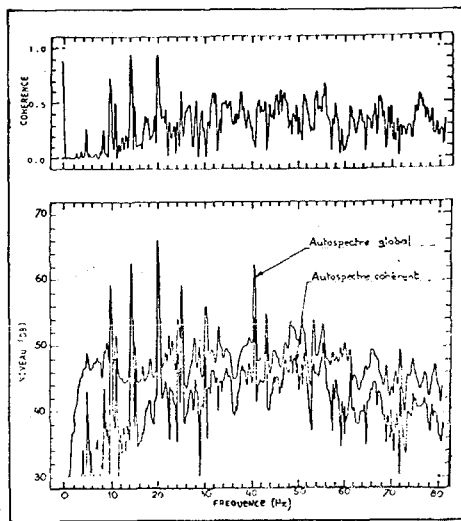


Figure 6 : Extraction de la partie cohérente d'un signal composite.

2.3.2 - Traitement d'antenne : nous considérons un réseau de capteurs C_i recevant des signaux somme de p excitations aléatoires indépendantes. Les p excitations aléatoires indépendantes sont dénommées sources car elles sont généralement associées à des phénomènes physiques élémentaires que l'on cherche à identifier. Le cas le plus simple est celui de sources ponctuelles émettant dans un milieu homogène infini : le problème de traitement est alors la localisation des sources ponctuelles.

Dans cette situation, l'identification des sources ne peut être faite à partir de la seule observation des signaux sur les N capteurs. Il faut ajouter à cette observation les connaissances a priori contenues dans un modèle [4]. Les "sources" obtenues à partir de la seule observation des signaux sont connues à un certain nombre de transformations près (filtrage linéaire identique de tous les signaux par exemple) on peut résoudre cette difficulté en dénommant les sources identifiées "sources virtuelles". On passe des sources virtuelles aux sources réelles par une transformation que seul le modèle physique permet de préciser. Ici nous dénommerons sources les excitations individuelles que la seule observation des N signaux permet d'identifier.

Des informations sur les sources sont contenues dans les matrices interspectrales des signaux reçus. La matrice interspectrale permet de :

- déterminer le nombre de sources ;
- identifier les sources (avec certaines indéterminations).

On a montré dans [6] que le rang de la matrice interspectrale est égal au nombre de sources linéairement indépendantes.

Le rang de la matrice interspectrale est déterminé par le nombre de valeurs propres non nulles de la matrice interspectrale. Ce résultat suppose que les signaux sont uniquement la somme des signaux issus des sources, il peut être étendu au cas où un bruit blanc spatialement (soit à composantes décorréliées) se superpose au signal des sources. Le nombre de sources est alors obtenu en observant l'évolution des valeurs propres classées par ordre décroissant : le nombre de sources (linéairement indépendantes) est égal au nombre de valeurs propres décroissantes au sens strict (fig. 7).

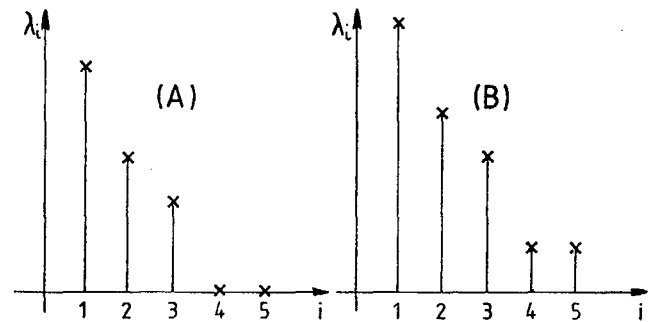


Figure 7 : Evolution des valeurs propres de la matrice interspectrale (3 sources).

L'identification des sources est faite en utilisant les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles (ou strictement décroissantes). Les vecteurs sources (vecteurs à N dimensions proportionnels aux sources vues par les capteurs) sont dans l'espace à p dimensions engendré par les p vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles (ou strictement décroissantes). Ce résultat permet d'identifier une seule source (à un filtrage près), il ne permet pas de séparer plusieurs sources. Le cas de plusieurs sources peut être traité par introduction d'un modèle (le modèle ondes planes est le plus utilisé) ou en utilisant la continuité des sources en fonction de la fréquence [7].

La matrice interspectrale connue sans erreur est un moyen puissant de filtrage de signaux à plusieurs composantes de traitement d'antenne. Dans les cas réels nous ne connaissons cependant qu'une estimation de cette matrice et il est donc important de confronter ces méthodes aux aléas introduits par les erreurs d'estimation.

3 - ESTIMATION DE LA MATRICE INTERSPECTRALE

Il existe deux catégories de méthodes permettant l'estimation des grandeurs spectrales :

- les méthodes non paramétriques utilisent comme algorithme fondamental la transformation de Fourier. Le résultat obtenu dépend essentiellement de la forme de la fonction d'apodisation introduite pour réaliser l'opération de moyennage.
- les méthodes paramétriques postulent un modèle du signal étudié. La classe la plus étudiée et celle du modèle autorégressif.

Il n'est pas possible de présenter sommairement de manière exhaustive l'ensemble des résultats connus dans l'estimation des grandeurs spectrales particulièrement dans la dsp. Nous nous limiterons aux points particuliers concernant les grandeurs caractéristiques de l'analyse interspectrale :

- coefficient de cohérence,
- rang de la matrice interspectrale,
- valeurs propres de la matrice interspectrale.



3.1 - Méthodes non paramétriques de Fourier

La précision de l'estimation obtenue par ces méthodes est fonction de deux paramètres :

- le temps d'intégration T_{in} qui est une mesure de la durée du signal traité. Lorsque l'on introduit une première fonction d'apodisation $g(t)$ sur les données (cette fonction est parfois une fonction porte de durée T représentant la durée finie de l'échantillon traité) :

$$T_{in} = \frac{(\int g^2(t) dt)^2}{\int g^4(t) dt}$$

- la bande passante équivalente d'analyse B_{eh} : Cette grandeur mesure la largeur de bande du système d'analyse. Elle caractérise la fonction d'apodisation $h(\tau)$ par laquelle on multiplie la fonction d'auto ou d'intercorrélacion ou de sa transformée de Fourier $H(\nu)$ qui lisse, par convolution, l'estimée non moyennée en fréquence.

$$B_{eh} = \frac{h^2(0)}{\int |h(t)|^2 dt} = \frac{[\int H(\nu) d\nu]^2}{\int |H(\nu)|^2 d\nu}$$

La "puissance du moyennage" du traitement est déterminée par le produit $T_{in} \cdot B_{eh}$ et la variance des estimées est proportionnelle à $1/(B_{eh} \cdot T_{in})^{\frac{1}{2}}$ (signaux aléatoires).

Le temps d'intégration est imposé par les conditions expérimentales et la forme de la fonction $g(t)$ n'est en général pas très importante. Les méthodes numériques utilisent une transformée de Fourier discrète qui périodise le signal. Il faut donc veiller à éviter les discontinuités entre le début et la fin du signal traité. Ceci peut être fait en choisissant une fonction $g(t)$ qui s'annule à ses deux extrémités ou en retranchant une rampe [8].

Le paramètre décisif est donc la fonction d'apodisation $h(\tau)$ qui multiplie l'estimée de la fonction d'auto ou d'intercorrélacion. Cette fonction fixe la variance de l'estimée par le biais du paramètre global B_{eh} mais une étude plus fine de cette fonction doit être réalisée.

Pour l'analyse interspectrale on doit veiller :

- au caractère défini non négatif de $h(\tau)$ (comme dans l'analyse spectrale) ;
- à sa position dans le temps ;
- enfin nous indiquerons le lien étroit qui existe entre la "puissance de moyennage" $B_{eh} T_{in}$ et le rang de la matrice interspectrale estimée.

Il est bien connu en analyse spectrale que pour obtenir une estimée de la dsp positive ou nulle, il faut appliquer une fonction d'apodisation $h(\tau)$ définie non négative. Ce caractère défini positif est nécessaire si l'on veut assurer que les estimées des valeurs propres soient positives ou nulles. Ce résultat a été obtenu dans [5] en considérant qu'une fonction d'apodisation identique est appliquée à tous les termes estimés de la matrice de corrélation. Il est bien clair que, en liaison avec la recherche du rang de la matrice interspectrale, cette sécurité ($\lambda_i \geq 0$) est utile. Indiquons enfin qu'une borne supérieure des erreurs commises sur les estimées des valeurs propres a été donnée dans [5].

La position de la fonction d'apodisation est un paramètre spécifique à l'analyse interspectrale très important dans cette situation. La fonction d'intercorrélacion n'est en général pas, comme la fonction d'autocorrélacion, centrée sur le retard $\tau = 0$. Il est donc nécessaire, pour conserver la partie significative de la fonction d'intercorrélacion, de centrer en conséquence la fonction d'apodisation. Dans le cas

simple de signaux présentant un retard τ_i , il faudra centrer la fonction d'apodisation sur τ_i . Notons que ce retard n'est en général pas connu et qu'il s'agira d'une procédure itérative s'appuyant sur l'observation de l'estimée non apodisée de la fonction d'intercorrélacion. Ce recalage en temps sera encore plus efficace s'il est réalisé directement sur les signaux avant l'estimation de l'intercorrélacion. On évitera ainsi une perte de précision due aux fluctuations introduites par les extrémités des signaux. Un exemple de cette procédure est présenté sur la figure (8) issue de [9]. Sur cette figure on voit l'estimée de l'intercorrélacion de signaux présentant plusieurs décalages temporels dus à des "rebonds". Selon la position occupée par la fonction d'apodisation, on étudiera l'effet d'un ou plusieurs trajets élémentaires. Le biais introduit par l'existence d'un retard dans le calcul des valeurs propres et du rang de la matrice interspectrale a été mis en évidence dans [10] en fonction du décalage temporel pour deux types de fonctions d'apodisation.

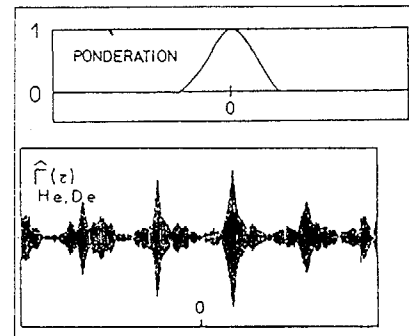


Figure 8 : Fonction d'intercorrélacion de signaux à plusieurs retards.

La "puissance du moyennage" $B_{eh} T_{in}$ est enfin un paramètre déterminant dans l'estimation du rang de la matrice interspectrale : le rang de la matrice estimée est inférieur à $B_{eh} T_{in}$. Pour estimer le nombre de sources, il est donc impératif que la puissance de moyennage $B_{eh} T_{in}$ soit nettement supérieure au nombre de sources présumé. Ce résultat est la généralisation d'un phénomène bien connu dans l'estimation du coefficient de cohérence (signaux à deux composantes). Dans cette situation on sait que le module du coefficient de cohérence $|C(\nu)|$ (dsp normé) estimé est égal à 1 si l'on n'introduit pas de moyennage ($B_{eh} T_{in} = 1$). Lorsque $|C(\nu)| = 1$ la matrice interspectrale (2×2) est en effet de rang 1 (une source dans notre interprétation).

Dans les méthodes d'analyse interspectrale par transformation de Fourier les paramètres déterminant de la mesure que nous aurons mis en évidence sont :

- le temps d'intégration T_{in} et la bande passante d'analyse B_{eh} . Le produit $B_{eh} T_{in}$ fixe la "puissance du moyennage" qui détermine la variance des estimées. Ce produit fixe également la borne supérieure du rang de la matrice interspectrale estimée.
- le "calage" en temps de la fonction d'apodisation des signaux : tout décalage introduit des erreurs en moyenne (biais) et diminue la précision. Nous avons proposé un réglage "itératif" de ce paramètre.

3.2. - Estimateurs paramétriques : méthode du modèle autorégressif

L'intérêt principal des méthodes du modèle A.R. est leur possibilité d'application à des signaux courts. Ces méthodes postulent l'existence d'un modèle autorégressif pour le signal. L'analyse spectrale ou interspectrale revient à l'estimation des coefficients du filtre autorégressif et de la puissance du bruit

blanc. Une importante littérature est consacrée à l'utilisation de ces méthodes en analyse spectrale (dsp). L'extension au cas de l'analyse interspectrale est formellement très simple : on remplace le modèle autorégressif à une entrée et une sortie par un modèle à N entrées et N sorties. Les coefficients du F.A.R. sont alors des matrices de coefficients (N x N) et le bruit blanc d'entrée a N composantes.

Des algorithmes généralisant les méthodes A.R. à une composante ont été proposés par [14], [15] et [16]. La mise en oeuvre et l'exploitation de ces techniques ont été abordées par [17]. Dans ce travail on a montré qu'il était possible de réaliser une analyse interspectrale fiable sur un échantillon du signal de durée nettement inférieure à la durée requise par les méthodes non paramétriques (pour une même finesse d'analyse et une même précision). Un important travail est cependant encore nécessaire afin d'établir de manière quantitative les propriétés statistiques de l'estimation de la matrice interspectrale ainsi réalisée.

4 - CONCLUSION

La matrice interspectrale intervient dans un grand nombre de techniques de traitement des signaux à plusieurs composantes. Dans le filtrage des signaux à plusieurs composantes, la matrice interspectrale permet de calculer la matrice de gain du filtre optimal en moyenne quadratique. Pour les traitements d'antenne le rang de la matrice interspectrale (obtenu par le nombre de valeurs propres non nulles) est égal au nombre de sources linéairement indépendantes et ses vecteurs propres engendrent le sous espace contenant les sources. Ces propriétés font apparaître l'importance des techniques d'estimation de la matrice interspectrale.

L'estimation de la matrice interspectrale est réalisée par des méthodes non paramétriques utilisant une transformation de Fourier ou par la méthode paramétrique du modèle autorégressif.

Dans les méthodes "de Fourier", les "qualités" de la matrice estimée sont fixées par le temps d'intégration et la bande passante équivalente d'analyse. Le "calage" en temps des fonctions d'apodisation est également un paramètre important. Ces méthodes sont bien connues et largement utilisées. Leurs propriétés ne sont cependant pas totalement maîtrisées, principalement en ce qui concerne les grandeurs déduites de la matrice interspectrale par des transformations non linéaires (valeurs propres). L'incidence de la forme et de la position des fonctions d'apodisation a été mise en évidence mais en ce domaine "l'art de l'expérimentateur" est encore de mise. Enfin la localisation du "seuil" permettant d'estimer les valeurs propres issues des sources où le rang de l'estimée de la matrice interspectrale reste un problème ouvert.

La méthode du modèle autorégressif appliquée à l'analyse interspectrale semble prometteuse mais elle reste encore dans la fraîcheur et l'innocence de l'enfance. La réponse à de nombreuses questions encore ouvertes devra être apportée avant qu'elle n'atteigne sa pleine maturité.

Nous avons cherché à caractériser la situation actuelle de ce domaine de recherche et ses domaines d'application. A notre avis, de nombreux résultats nouveaux viendront rapidement combler les zones d'ombre encore présentes.

REFERENCES

- [1] H. MERMOZ
Ecueils et diversité des traitements adaptatifs d'antenne.
Annales des Télécommunications, 28, n° 5-6, pp. 244-254, 1973.
- [2] J.L. LACOUME - F. GLANGEAUD - P. LORENZINO - D. BAUDOIS - G. PRETET
Filtrage de signaux multicomposantes utilisant les corrélations intercomposantes.
GRETSI 81.
- [3] S. CHAUDOURNE
Mesure de la contribution d'une source dans un milieu sonore complexe à l'aide de la fonction de cohérence.
Revue d'Acoustique, n° 5-4, pp. 213-218, 1980.
- [4] H. MERMOZ
Imagerie, corrélation et modèles.
Annales des Télécommunications, T.31, n° 1-2, pp. 17-36, 1976.
- [5] C. TURCAT
Problèmes liés à l'estimation d'une matrice de densité spectrale.
GRETSI 77, 16/1-16/6.
- [6] F. GLANGEAUD - C. LATOMBE - J.L. LACOUME
Identification d'ondes UBF dans la magnétosphère en utilisant la matrice interspectrale.
Annales des Télécommunications, 34, n° 3-4, pp. 243-248, 1979.
- [7] J.L. LACOUME - B. BOUTHEMY - F. GLANGEAUD - C. LATOMBE - A. SILVENT
Caractérisation par analyse interspectrale du champ d'ondes reçu sur un réseau de capteurs.
GRETSI 79, pp. 80/1-80/7.
- [8] F. GLANGEAUD
Applications de l'analyse interspectrale développées au CEPHAG.
Journée Analyse Interspectrale (Avril 80), J.L. LACOUME Editeur.
- [9] F. GLANGEAUD - J.L. LACOUME - H. FARGETTON - R. GENDRIN - S. PERRAUT - V.A. TROITSKAYA
Cross Spectral Analysis of PCL recorded at Different Stations.
Journal of Geophys. Research, 85, n° A8, pp. 4115-4124, 1980.
- [10] G. BIENVENU
Influence de la méthode d'estimation des densités spectrales croisées sur le rang de la matrice interspectrale.
Journée Analyse Interspectrale (Avril 80), J.L. LACOUME Editeur.
- [11] H.J. LANDAU - H.O. POLLAK
The Dimension of the Space of essentially Time Band limited Signals.
Bell. Syst. Tech. Jour., Vol. 41, n° 4, 1962.
- [12] J.L. LACOUME - W. KOFMAN
Description des processus non stationnaires par la représentation temps-fréquence - Application.
GRETSI 75, pp. 95-101.



-
- [13] B. ROY
Contribution à l'étude de la dimension d'un signal approximativement limité en temps et en fréquence.
Thèse de Docteur Ingénieur, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1979.
- [14] O.N. STRAND
Multichannel Complex Maximum Entropy (Autoregressive) Analysis.
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-22, n° 4, pp. 634-640, 1977.
- [15] A.H. NUTTAL
Multivariate linear predictive spectral analysis employing weighted forward and backward averaging : a generalisation of Burg's algorithm
Naval Underwater System Center (NUSC).
Tech. Doc. 5501, New London, CT, Oct. 1976.
- [16] M. MORF, A. VIERRA, D.T.L. LEE, T. KAILATH
Recursive multichannel maximum entropy spectral estimation.
IEEE Transactions on Geoscience Electronics, Vol. 6E 16, n° 2, 1978.
- [17] C. HANNA
Analyse spectrale et interspectrale de signaux par filtrage autorégressif.
Thèse de 3e cycle, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1979.
- [18] G.M. JENKINS - D.G. WATTS
Spectral analysis and its applications.
Holden Day series in time series analysis, Holden Day, 1968.
-