HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981



# RESSOURCES ET LIMITATIONS DE LA MATRICE INTERSPECTRALE EN TRAITEMENT SPATIAL

H. MERMOZ

ATTACHE AU SERVICE TECHNIQUE DE L'ARMEMENT - DTCN - DCAN TOULON -


## RESUME

Un des enjeux actuels du traitement spatial est la détection des signaux dont le front d'onde serait inconnu a priori. Il est nécessaire, pour approcher une solution, d'exploiter à fond la matrice interspectrale fournie par l'antenne, à condition de faire confiance à la qualité de l'estimation de cette matrice.

Sous cette condition, cet exposé précise ce qu'on peut extraire, au maximum, de la matrice, en tant qu'information sur les fronts d'ondes des sources, et ce qui reste à apporter pour les déterminer entièrement. Par ailleurs, l'exposé s'efforce de suivre la démarche normale de l'ingénieur confronté à une matrice expérimentale.

## SUMMARY

What is now at stake in spatial processing is the detection of signals carried by a priori unknown wavefronts. Closing to a solution, it appears necessary to fully exploit the cross-spectral densities matrix yielded by the array, subject to trusting the quality of the matrix estimation. Under this assumption, this paper is trying to describe accurately what can be extracted, at the most, from the matrix, itself, about the sources wavefronts, and what is to be brought from outside, for them to be fully determined.

Besides, this paper is trying to follow the practical approach of a scientist, confronted with an experimental matrix.

1) -

Lorsqu'on utilise une antenne de réception "riche" en capteurs séparément accessibles (50 par exemple), on peut présumer que le nombre P de sources bien localisées - celles auxquelles on s'intéresse le plus - est inférieur au nombre N de capteurs.

Les sources en question n'ont en général aucun lien physique entre elles et leurs émissions sont - au sens spectro-temporel du terme - indépendantes.

De ce fait, chaque source participe additivement à la matrice interspectrale mesurable aux sorties des capteurs, par une matrice carrée (N, N) de rang égal à l'unité et bâtie sur son "vecteur-source" S.

Ce vecteur est le produit de la racine carrée de la densité spectrale, par un vecteur dont les N composantes sont les gains complexes des filtres exprimant le transfert entre la source et les sorties des capteurs.

Il en résulte que le vecteur-source normé

$$S/\,|S|$$

n'est autre que la "traduction" du front d'onde par la traversée de l'antenne. Un peu abusivement, on l'appelle encore ici "front d'onde".

Rien n'est présumé a priori sur ce front d'onde - pas plus que sur la densité spectrale - et sur la structure du milieu qui le fabrique sinon d'être exprimable en termes de filtrages linéaires (trajets simples, multiples, interférences, diffraction, etc...).

La contribution de la p source

$$1 \leqslant p \leqslant P < N$$

est alors la matrice (N, N) de rang 1

$$S_p^+ \; S_p$$

(les vecteurs sont, par convention, représentés par des matrices-ligne, et le signe + désigne la matrice adjointe).

La matrice interspectrale des sources (bien localisées) est la matrice singulière, hermitienne, définie et semi-positive

$$\sum_p S_p^+ \; S_p$$

Toutes les quantités sont des fonctions de la fréquence et les relations exprimées sont valables fréquence par fréquence.

2) -

La matrice précédente devrait en principe être égale à la matrice expérimentale "brute" mesurée aux sorties des capteurs.

En fait cette matrice brute $M_b$ est bien hermitienne par construction (on mesure l'interspectre dans un sens et on en déduit l'imaginaire congugué) mais elle peut n'être pas singulière ni même définie positive.

Seul ce dernier défaut paraît forcément imputable à des erreurs de mesure et physiquement inacceptable. Il signifie en effet qu'à partir de $M_b$ on peut définir un vecteur V tel que le scalaire réel

$$V^+ \quad M_b \quad V$$

soit négatif.

Or ce scalaire est la puissance de sortie d'une combinaison de capteurs parfaitement définie par le vecteur V ; on peut donc la construire et on peut estimer la puissance de façon banale par une moyenne de carrés, à coup sûr positive. Il paraît donc nécessaire de corriger de façon ou d'autre la matrice $M_b$ soit en fonction d'une information a priori sur les erreurs d'estimation, soit en vertu d'un critère de "distance minimale" avec la matrice définie positive la plus proche.

Supposons cette correction faite et appelons encore le résultat M matrice expérimentale, mais hermitienne définie positive.

3) -

Même alors, $M_e$ ne sera pas généralement singulière ; mais si la richesse de l'antenne surmonte la complexité du milieu, elle aura des valeurs propres grandes par rapport à d'autres. Les capteurs reçoivent en effet, outre les sources localisées, des "parasites" moins intéressants et représentables seulement par des sources diffuses. Peut-on éliminer ces parasites ?

La démarche la plus simple et la plus classique est de considérer $M_e$ comme résultant de (N-1) sources localisées et de bruits indépendants et de même densité spectrale sur tous les capteurs.

Cette densité est alors nécessairement égale à la valeur propre minimale $\lambda m$ de $M_e$ , et il en résulte que la matrice des sources localisées seules, est la matrice singulière

$$M_e \; - \lambda_m \, \mathbb{I}$$

où $\mathbb{I}$ est la matrice unité (à N dimensions). Mais il ne s'agit là que d'une "représentation" compatible avec les mesures, non pas nécessairement de la réalité (car d'autres schémas sont aussi compatibles). Cependant cette

.../...

représentation prend un crédit et un sens physique certains si plusieurs valeurs propres sont égales à la plus petite $\lambda_m$ .

Dans ce cas, d'ailleurs, le rang de $M_e$ tombe au-dessous

de (N-1)

Par ailleurs, il existe une analogie formelle entre "l'élimination" d'un bruit équiréparti sur les capteurs, et celle de "turbulences" qui seraient proches des capteurs, indépendantes d'un capteur à l'autre, et de même puissance moyenne.

On peut donc penser que l'opération

$$M = M_e - \lambda_m \qquad [1]$$

peut effectivement débarrasser la matrice expérimentale de fluctuations non significatives et que M, mieux que $M_e$ , représente la matrice des sources localisées.

4) -

On peut utiliser des méthodes plus raffinées et moins arbitraires pour "épurer" la matrice expérimentale de ses plus petites valeurs propres. Le principe général en est d'utiliser des modèles généraux plausibles de bruits et de turbulences et d'en formuler la matrice interspectrale en fonction de plusieurs paramètres libres $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ soit :

$$G(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$$

L'art consiste alors à calibrer ces paramètres de telle sorte que la matrice différence

$$M_e - G$$

soit d'un rang aussi faible que possible.

Le critère de réussite (de sens physique) est alors que le rang tombe d'un plus grand nombre d'unités qu'il n'y a de paramètres libres dans G.

5) -

Au terme de ces opérations, on se retrouve avec une matrice M issue de l'expérience et réputée être la matrice des sources localisées. Elle est singulière et le nombre de sources P est défini "expérimentalement" par son rang.

Pour trouver les P vecteurs-sources, on a :

$$M = \sum_p S_p^+ \; S_p \qquad [2]$$

où M est connu par ses éléments, ou de façon équivalente par ses vecteurs/valeurs propres.

Le problème est : peut-on calculer les $S_p$ ?

Il est clair tout d'abord qu'on ne peut demander plus à une antenne que de fournir des vecteurs-sources et, par là, des fronts d'ondes. L'antenne ne connaît en effet d'une source que le front d'onde (et une amplitude). Quand on cherche à "localiser" une source on "remonte", en fait, du front d'onde aux coordonnées grâce à un modèle du milieu qu'on s'est donné en plus des résultats de l'antenne. Implicite ou non, une modélisation du milieu est indispensable pour passer du front d'onde à la position d'une source.

Mais nous n'en sommes pas là, car nous cherchons seulement les vecteurs-sources $S_p$ . Or il se trouve que la relation [2] à elle seule (c'est-à-dire l'antenne à elle seule) ne donne pas les $S_p$ , sauf dans le cas "facile" où P = 1.

Pour déterminer les $S_p$ il faut, outre la relation [2], des hypothèses supplémentaires sur les fronts d'onde (sur le milieu). Dès ce stade, une certaine modélisation est nécessaire, que nous appellerons "légère" (justifié plus loin), par rapport à la "modélisation de localisation" précédemment évoquée et considérée comme "lourde". Nous ne parlerons ici que des limites de la modélisation "légère" destinée à la détermination des vecteurs-sources.

6) -

Essayons d'abord d'exprimer sous la forme la plus "physique" possible le contenu de la relation [2].

La première contrainte bien connue - mais pas la seule - imposée aux $S_p$ par la relation [2] est de les "enfermer" dans le sous-espace complexe à P dimensions défini par les P vecteurs propres de M correspondant aux P valeurs propres non nulles.

Les vecteurs-sources sont donc orthogonaux au sous-espace complémentaire, à (N-P) dimensions. Plus concrètement, on sait, à partir de M, fabriquer (N-P) combinaisons de capteurs sur lesquelles aucune des sources présentes ne peut se manifester (ce qui ne signifie pas nécessairement qu'une autre source ne le ferait pas).

Ces relations d'orthogonalité sont indépendantes du module de $S_p$ . C'est une contrainte sur le seul front d'onde, sur chacun et sur tous.

Toute hypothèse ultérieure et supplémentaire sur les fronts d'ondes doit donc respecter ces conditions d'orthogonalité. La modélisation "légère"

.../...

qu'il faudra bien introduire, doit en tenir compte.

Il ne s'agit donc pas, pour le plaisir de compléter la relation [2], d'inventer n'importe quelle condition. Qu'en est-il par exemple de l'hypothèse "d'ondes planes" qui gouverne en pratique tous les systèmes actuels ? Si un vecteur-source représente une onde plane reçue par une antenne connue, il est déterminé à 3 paramètres près :

- une amplitude (qui ne joue aucun rôle dans des relations d'orthogonalité) ;

- deux angles qui définissent la direction de l'onde plane.

Si un tel "modèle" de front d'onde doit satisfaire à plus de deux relations d'orthogonalité, il peut ne pas exister de solution. Donc la situation

$$N-P > 2$$

peut rendre l'hypothèse d'onde plane irrecevable, incompatible avec la structure de M, c'est-à-dire avec l'expérience.

On peut choisir alors de mettre en doute l'estimation de M mais ce n'est pas nécessairement l'option la plus raisonnable. Nous explorons ici, comme il a été dit, l'option inverse.

7) -

Les relations d'orthogonalité précédentes sont assez faciles à percevoir parce qu'elles portent sur les fronts d'ondes individuels des sources présentes.

Il en est d'autres plus délicates parce qu'elles portent sur l'ensemble des vecteurs-sources (fronts d'ondes et densités spectrales mélangés).

Dans le sous-espace à P dimensions où les $S_p$ se trouvent confinés, ils n'y sont pas n'importe où, ni n'importe comment.

La relation [2] montre en effet que les P combinaisons de capteurs $C_p$ , construites à partir des P vecteurs propres normés de M (correspondant aux valeurs propres non nulles) possèdent des vertus spéciales.

Chacune de ces combinaisons - qu'on sait construire - fournit un mélange additif des P sources ; mais ces mélanges particuliers se trouvent être non corrélés entre eux.

Rappelons que les P sources elles-mêmes sont non corrélées ; mais la propriété précédente ne signifie pas du tout (hélas !) qu'à chaque $C_p$ correspond une seule source. L'individualisation totale de chaque source est justement ce dont l'antenne est incapable à elle seule (sauf à la limite si sa résolution tend vers l'infini avec N).

Malgré tout, l'antenne indique quelles combinaisons de capteurs donnent des mélanges non corrélés. Elle dit même que la densité spectrale du mélange sur $C_p$ est donnée par la valeur propre correspondante $\lambda_p$ , valeur propre qui est aussi connue à partir de M.

Dans toute modélisation ultérieure des $S_p$ , ces conditions doivent aussi être respectées, bien que ce soit d'une exploitation plus difficile que des conditions individuelles d'orthogonalité.

8) -

Si on veut donner une expression mathématique de la quantité d'indétermination qui demeure sur l'ensemble des $S_p$ , on peut le faire de la façon ci-après.

Partons d'une matrice unitaire Z dans l'espace complexe à P dimensions. Cette matrice carrée (P, P) possède $P^2$ éléments. Mais chacune de ses lignes, représentée par le vecteur (matrice-ligne)

$$z_p$$

est un vecteur unitaire et orthogonal à tous les autres. D'où la relation classique :

$$ZZ^+ = \mathbb{I}_{(p)} \qquad [3]$$

ou $\mathbb{I}_{(p)}$ est la matrice unité dans l'espace à P dimensions complétée par

$$\sum_p z_p^+ \; z_p = \mathbb{I}_{(p)} \qquad [4]$$

Au total, Z dépend de P(P-1)/2 paramètres scalaires "libres".

Choisissons une matrice Z et formons les vecteurs (matrice-ligne) dans l'espace à P dimensions :

$$x_p = z_p \; D$$

ou D est la matrice diagonale (P,P) des racines carrées des valeurs propres non nulles de la matrice M (connues).

Dès lors, le jeu de vecteurs-sources correspondant au choix de Z et compatible avec M, s'écrit :

$$\underset{(1,N)}{S_p} = \underset{(1,P)}{x_p} \; \underset{(P,N)}{\sqcup}$$

où $\sqcup$ est la matrice rectangulaire (P,N) des P vecteurs propres normés de M, correspondant aux valeurs propres non nulles et rangés dans le même ordre que celles-ci dans D.

A partir des relations [3], [4], [5] et [6] on retrouve facilement tous les liens entre les vecteurs source $S_p$ et la matrice M, tels qu'ils ont été présentés dans les paragraphes 6 et 7.

Donc la quantité d'indétermination qui subsiste - après le plein usage de M - sur les vecteurs-sources, est représenté par une matrice Z unitaire - mais unitaire quelconque.

9) -

Modéliser les vecteurs-sources (ou le milieu) de façon compatible avec M, c'est donc limiter le choix de Z ; modéliser suffisamment pour déterminer les $S_p$ , consiste à choisir Z;

Il n'est pas très facile de répercuter dans l'espace complexe à P dimensions, des limitations physiques établies (ou supposées) dans l'espace réel à 3 dimensions. L'étude de cette "traduction" est donc une rubrique difficile (mais peut-être féconde) du traitement spatial.

L'indétermination étant représentée par Z, on retrouve immédiatement que :

a) - Si P = 1 (une seule source) le vecteur-source est complètement déterminé. Réciproquement une matrice de rang 1 donne sans hypothèse supplémentaire le front d'onde de la source unique.

b) - Si P = 2 (matrice Z d'ordre 2 ne dépendant que d'un seul scalaire), il suffit d'une seule relation scalaire supplémentaire entre les 2N composantes des 2 vecteurs-sources (pensons à N = 50) pour les déterminer complètement.

c) - Même avec P = 6, il suffirait de 15 relations scalaires entre 6 N (300) composantes pour déterminer les 6 vecteurs-sources.

C'est dans ce sens qu'on peut dire que la modélisation a priori qui est requise pour déterminer les vecteurs-sources est relativement "légère", grâce précisement à l'utilisation exhaustive de l'antenne.

Cette "légèreté" n'est cependant pas facile à mettre en pratique compte tenu des habitudes acquises. Songeons pourtant que l'hypothèse (facile) d'ondes planes, dans le cas de P = 2, correspond à (N-2) relations entre les N composantes de chacun des deux fronts d'onde (96 relations entre 100 composantes), là où une seule suffirait pour être en accord sûr avec l'expérience. C'est bien l'hypothèse d'onde plane qui est "lourde" et contraignante.

10) - Conclusion

Que peut essayer de faire l'ingénieur en présence d'une matrice interspectrale, qu'il considère comme correctement estimée, pour en tirer le maximum d'information avec le minimum d'hypothèses ?

a) - D'abord la "ré-équilibrer" si elle n'est pas tout à fait définie positive car il semble essentiel qu'elle le soit, du point de vue de son sens physique.

b) - Puis la débarrasser des "parasites" correspondant, en gros, aux plus petites valeurs propres, ceci de façon plus ou moins élaborée ; essayer de ne laisser subsister qu'une matrice singulière représentative des seules sources localisées.

c) - Essayer d'en tirer les vecteurs-sources de façon compatible avec la matrice, c'est-à-dire en introduisant le minimum d'information supplémentaire requis pour cette résolution (modélisation légère).

Les méthodes pour ce faire restent à étudier et à comparer.

d) - Enfin, et à partir des vecteurs-sources, localiser les sources, au prix s'il le faut d'une modélisation plus complète (lourde) plus arbitraire du milieu, avec les risques supplémentaires inhérents à l'opération, mais risques qui n'auront pas inutilement pesé sur le calcul des vecteurs-sources eux-mêmes.