

# HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

285



NICE du 1<sup>er</sup> au 5 JUIN 1981

---

APPLICATION DE LA QUANTIFICATION A REFERENCE STOCHASTIQUE AU CONTROLE  
DES CYCLES LIMITES EN FILTRAGE NUMERIQUE RECURSIF

D. DUBE, F. CASTANIE

GAPSE, Institut National Polytechnique, 2, rue Ch. Camichel, 31071 Toulouse Cedex

---

## RESUME

## SUMMARY

La présente communication traite de l'application de la quantification à référence stochastique au contrôle des cycles limites en filtrage numérique récursif.

La première partie est consacrée à un rappel de quelques notions sur la quantification aléatoire et la quantification à référence stochastique.

L'opération d'arrondi aléatoire est ensuite abordée dans la deuxième partie, et la variance du bruit introduite par ce type d'arrondi est calculée.

Dans la troisième partie, nous présentons les résultats obtenus d'une simulation sur microcalculateur, du contrôle des cycles limites pour une section du 2<sup>o</sup> ordre d'un filtre numérique utilisant la quantification à référence stochastique.

The present paper deals with the application of Random Reference Quantization to the control of limit cycle oscillations in digital recursive filtering.

The first section is devoted to a brief review of Random Quantization and Random Reference Quantization (RRQ) principles.

The Random Rounding operation is dealt with in the second section and the mathematical expression of the variance of the noise introduced by this type of rounding is given.

In the last section experimental results are presented based on the simulation on a microcomputer of limit cycles for a 2<sup>o</sup> order recursive section with RRQ. These results are shown to be in good agreement with the theoretical expressions.



APPLICATION DE LA QUANTIFICATION A REFERENCE STOCHASTIQUE AU CONTROLE  
DES CYCLES LIMITES EN FILTRAGE NUMERIQUE RECURSIF

### 1 - INTRODUCTION

Les cycles limites sont de petites oscillations périodiques qui peuvent apparaître à la sortie d'un filtre numérique récursif. Ce phénomène est lié à la quantification des produits de la partie récursive du filtre, pour une entrée constante ou petite [24], [21].

Il s'agit là d'un effet bien connu dans les systèmes non linéaires bouclés.

Les cycles limites sont particulièrement gênants dans un milieu de communication, où le comportement du filtre au repos peut conduire à des cycles limites indésirables. Leur amplitude devient un facteur déterminant de la qualité du filtre et affecte, de ce fait, la longueur de mot utilisée et la complexité du filtre. C'est pourquoi différentes caractéristiques de ces oscillations ont été étudiées : classification [8], [23], [26], amplitude [16], [26], [27], [25], [7], longueur [19], etc...

Et, vu l'intérêt de l'élimination des cycles limites, différentes approches de contrôle ont été développées [9], [10], [15], [18], [12], [11], [13], [20], [22], [4], [3], [29], [30], [14], [1].

Une nouvelle approche, plus générale, est proposée ici. Cette méthode est basée sur l'application du principe de la quantification à référence stochastique (Q.R.S.) aux opérations d'arrondi après les multiplications du filtre. L'arrondi déterministe des produits est remplacé par un arrondi aléatoire qui introduit un bruit, mais "linéarise" cette opération (au sens des valeurs moyennes) supprimant ainsi la cause des cycles limites.

Notre étude porte sur des filtres implantés en arithmétique virgule fixe bien qu'il existe, mais de façon moins importante, des cycles limites en arithmétique virgule flottante [17].

### 2 - RAPPELS SUR LA QUANTIFICATION ALEATOIRE (Q.A.)

On peut définir une opération de quantification comme suit : soit  $X$  un processus d'entrée (stochastique ou déterministe) et  $X_Q$  sa version quantifiée telle que

$$X_Q = \alpha_k \quad \text{lorsque } b_k \leq X < b_{k+1}$$

où  $\{\alpha_k\}$  est la suite croissante des niveaux de sortie et  $\{b_k\}$  la suite croissante des points de transition.

Cette définition a été généralisée [6], [5], en introduisant à la place des points de transition déterministes  $\{b_k\}$ , des points de transition qui sont des variables aléatoires (v.a.)  $\{B_k\}$ . Si la variable d'entrée  $X$  et les  $\{B_k\}$  sont statistiquement indépendants

et si la caractéristique de transfert du quantificateur conserve sa monotonie, alors ce mode de quantification est appelé Quantification Aléatoire (Q.A.).

Il a été démontré dans [6] qu'il existe, dans le cas de Q.A., une relation entre les moments du signal d'entrée et ceux du signal de sortie  $X_Q$  telle que :

$$E(X_Q^m) = E(\lambda_m(X))$$

où  $E(X_Q^m)$  est le moment d'ordre  $m$  de  $X_Q$

et  $\lambda_m(x)$  une fonction complètement déterminée par l'ensemble des fonctions de répartition  $\{F_k(x)\}$  des points de transition.

La Q.A. transforme donc le moment d'ordre  $m$  suivant  $\lambda_m(x)$ .

Si on se limite à la transformation du moment d'ordre 1, il vient :

$$E(X_Q) = E(\lambda_1(X)) \quad (1)$$

Ici  $\lambda_1(x)$  décrit l'effet d'une Q.A. sur la valeur moyenne de la variable d'entrée.

Un cas particulier de la Q.A. est la Quantification à Référence Stochastique (Q.R.S.). Soit maintenant un quantificateur, à pas constant  $\Delta$  avec  $B_{k+1} = B_k + \Delta$ ; les points de transition "vibrent" toujours aléatoirement mais les seuils de décision restent équidistants : ce type de quantificateur est appelé quantificateur à R.S. car seule l'origine de la caractéristique de transfert du quantificateur est aléatoire.

La figure 1 présente les schémas de principe d'un Q.A. et d'un Q.R.S.

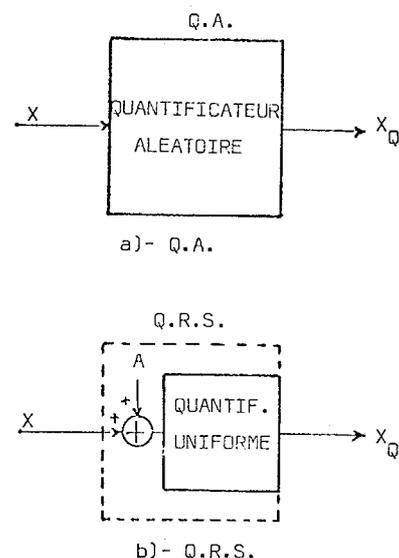


Figure 1

APPLICATION DE LA QUANTIFICATION A REFERENCE STOCHASTIQUE AU CONTROLE DES CYCLES LIMITES EN FILTRAGE NUMERIQUE RECURSIF

Dans le cas de la Q.R.S., A correspond à l'origine aléatoire du quantificateur et est appelée Source Auxiliaire (S.A.) La source à distribution uniforme (U.D.) sur un pas de quantification est la plus intéressante à divers points de vue [6] (en particulier au niveau de la variance minimale). Dans ce cas  $\lambda_1(x)$  est une fonction linéaire.

Dans la pratique, la S.A. peut être discrète et équirépartie sur  $(0, 2^k - 1)$  (nombres aléatoires à k bits).

Dans ce cas, la relation 1 n'est plus linéaire en toute rigueur :  $\lambda_1(x)$  est une fonction en escalier de pas  $2^{-k}$ . Si  $X_Q$  est quantifié sur  $2^n$  niveaux (n bits), on obtient :

$$E \{X_Q\} = E \{Q_{[n+k]}(x)\}$$

où  $Q_{[m]}(x)$  est l'opération de quantification à  $2^m$  niveaux avec  $m = n+k$  bits. La performance moyenne (i.e. le biais du quantificateur) est liée à  $n+k$ . La figure 2 illustre cette opération.

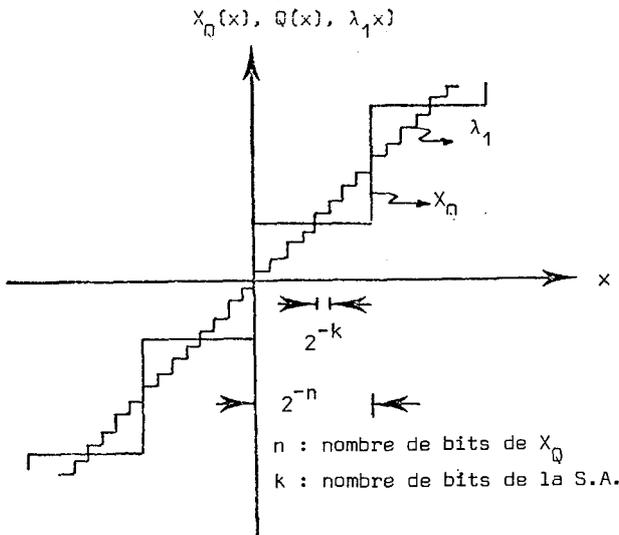


Figure 2

3 - L'ARRONDI ALEATOIRE

L'opération d'arrondi est nécessaire si l'on veut conserver une structure constante à un type d'opérateur. Puisque l'opération d'arrondi est une re-quantification des résultats, il est possible de linéariser cette opération dans sa moyenne en appliquant la Q.R.S.

Le pas de cette quantification sera de  $\Delta = 2^{-n}$  ( $n \leq m$ ) si m est le nombre de bits de chacune des v.a. avant la quantification et n leur nombre de bits après la quantification. Si  $X_Q$  est la v.a. X après Q.R.S. en n bits, on démontre que :

$$E \{X_Q\} = E \{X\} \quad (2-a)$$

$$\text{Var} \{X_Q\} \approx \text{Var} \{X\} + \frac{\Delta^2}{6} \quad (2-b)$$

si  $\Delta$  est suffisamment petit, avec dans tous les cas

$$\text{Var} \{X\} \leq \text{Var} \{X_Q\} \leq \text{Var} \{X\} + \frac{\Delta^2}{4} \quad (2-c)$$

La relation (2-b) découle de la relation :

$$\text{Var} \{X_Q\} = \text{Var} \{X\} + \frac{\Delta^2}{4} - E \left\{ \left( |x| \bmod \frac{\Delta}{2} \right)^2 \right\}$$

et de SHEPPARD [28] :

$$E \left\{ |X_Q - X|^2 \right\} \approx \frac{\Delta^2}{12}$$

L'équation (2-b) est une approximation dont la validité reste liée à la tendance vers la loi uniforme des v.a. de type "modulo". Si cette tendance n'est pas vérifiée (2-b) peut s'avérer une mauvaise approximation. La valeur maximale de la variance est donnée par (2-c), qui peut servir de base à un calcul de "pire-cas".

L'implantation de l'arrondi stochastique est particulièrement simple en technologie digitale. La figure 3 donne le principe appliqué à un mot de  $n+p$  bits réduit à n bits [6]. Elle se résume à un arrondi déterministe appliqué après addition d'un nombre aléatoire de p bits.

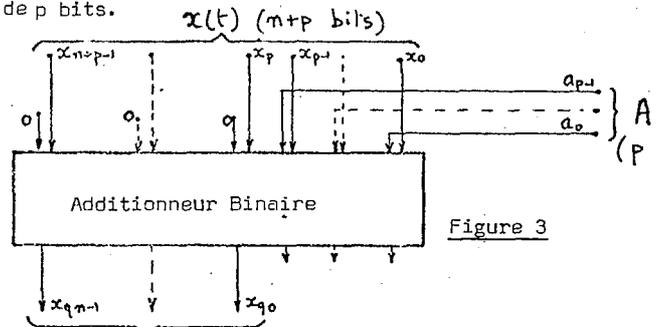


Figure 3

Si la source aléatoire utilisée est "blanche" (i.e. à échantillons indépendants), chaque arrondi stochastique est équivalent à un générateur de bruit blanc discret, dont la moyenne est nulle et la variance évaluée par 2-b) ou majorée à l'aide de 2-c).

L'injection de ce bruit à tous les points d'arrondi va produire à la sortie du filtre une perturbation de type "bruit filtré", dont le schéma équivalent a été donné par [2]. On peut ainsi calculer la variance en sortie du filtre, de même que sa densité spectrale de puissance.

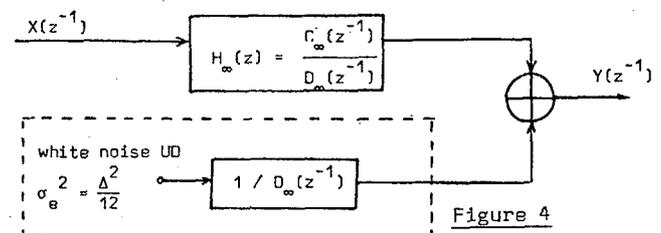


Figure 4



APPLICATION DE LA QUANTIFICATION A REFERENCE STOCHASTIQUE AU CONTROLE DES CYCLES LIMITES EN FILTRAGE NUMERIQUE RECURSIF

4 - SUPPRESSION DES CYCLES LIMITES

Il existe différentes façons de contrôler ou d'éliminer des cycles limites [9], [10]. Parmi celles-ci, on retrouve l'application de la troncature aux opérations de quantification [18], [12], [11], [13]. Un autre principe consiste à utiliser de façon aléatoire la troncature ou l'arrondi [20]. On retrouve aussi dans [4] une méthode qui se rapproche de la quantification aléatoire sur 1 bit.

Il existe aussi des techniques de quantification contrôlée en fonction des états du filtre [3], [22] et enfin l'introduction de quantificateurs à mémoire [1] permet l'élimination presque totale des cycles limites.

Ces différentes techniques ont principalement été étudiées pour des sections récursives du 2° ordre. Nous proposons ici une étude, par simulation sur micro-ordinateur d'une section récursive du 2° ordre. La figure 5 présente ce filtre de même que l'emplacement des opérations d'arrondis aléatoires (Q.A.) effectuées pour une implantation en arithmétique virgule fixe et pour une représentation des nombres en "signe et amplitude".

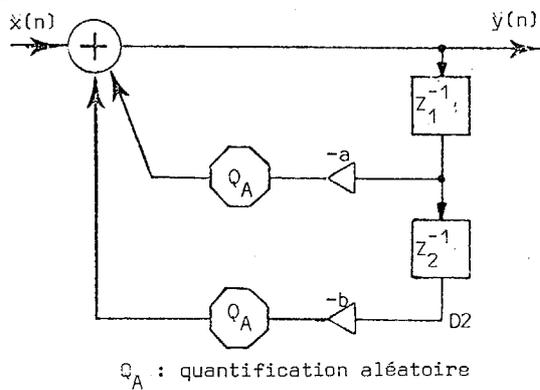


Figure 5

Si un nombre à m bits après la virgule doit être arrondi de façon aléatoire à n bits après la virgule, l'opération est réalisée de la façon suivante :

```

S X X . . . X X . X X X X X   m = 5 bits
+
X X X                           k = m - n = 3 bits
-----
S X X . . . X X . X X X X X   le nombre est tronqué
S X X . . . X X . X X         tel que n = 2 bits
    
```

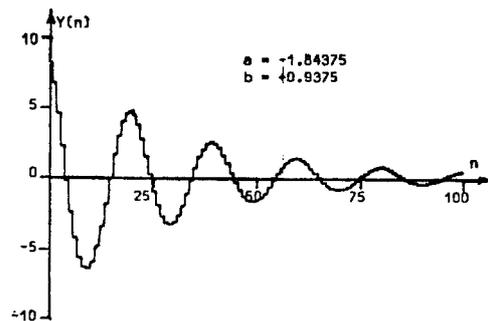
Le programme de simulation consiste à appliquer à l'entrée du filtre un niveau continu constant et à mesurer la moyenne et la variance du bruit en sortie. Les conditions initiales sont telles que le filtre se trouve dans un état appartenant au plus grand cycle limite du filtre utilisant l'arrondi déterministe des produits.

La moyenne et la variance du signal en sortie sont alors calculées sur des moyennes d'ensemble.

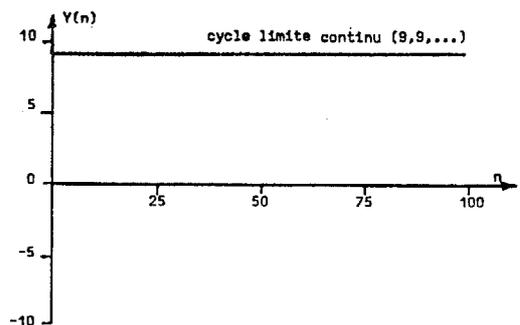
Nous présentons sur les figures 5 et 6 les résultats obtenus pour deux simulations de filtre. Sur ces figures, l'ordonnée représente l'amplitude de la mesure normalisée par rapport au pas de quantification utilisé ; l'abscisse représente l'évolution temporelle du phénomène.

Le filtre des figures 6 et 7 a été choisi parmi ceux étudiés dans [22]. La figure 6-a) représente la sortie idéale (i.e. sans quantification des produits) du filtre à entrée nulle et pour les conditions initiales  $Z_1^{-1} = 9$ ,  $Z_2^{-1} = 9$ . Sur la figure 6-b) on retrouve le cycle limite obtenu (cycle limite continu) dans le cas d'un arrondi des produits. Enfin la figure 6-c) illustre le résultat de la mesure de la moyenne et de la variance du bruit en sortie du filtre pour un arrondi aléatoire des produits. La moyenne du bruit correspond à la réponse du filtre sans arrondi (fig. 6-a), alors que la variance, après avoir atteint un niveau maximum, diminue lentement puisque la probabilité d'atteindre un état permanent ( $D1 = 0$ ,  $D2 = 0$ ) augmente en fonction du temps.

La figure 7 présente le résultat obtenu pour le même filtre, mais pour un signal d'entrée d'amplitude  $\Delta$  (entrée = 1) et des conditions initiales  $Z_1^{-1} = 4$ ,  $Z_2^{-1} = 4$ .



A) SANS ARRONDI



B) AVEC ARRONDI (RD)

Figure 6 -a) et b)

APPLICATION DE LA QUANTIFICATION A REFERENCE STOCHASTIQUE AU CONTROLE DES CYCLES LIMITES EN FILTRAGE NUMERIQUE RECURSIF

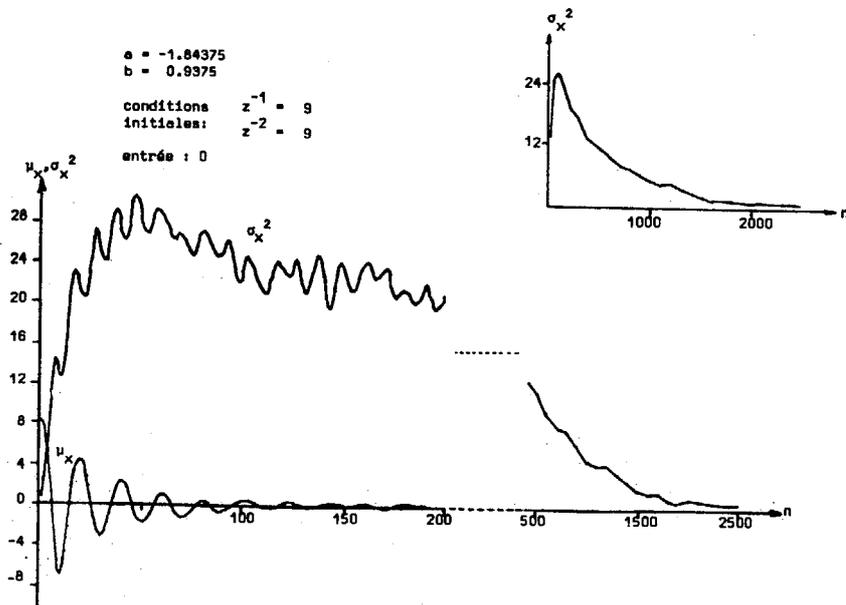


Figure 6 c)

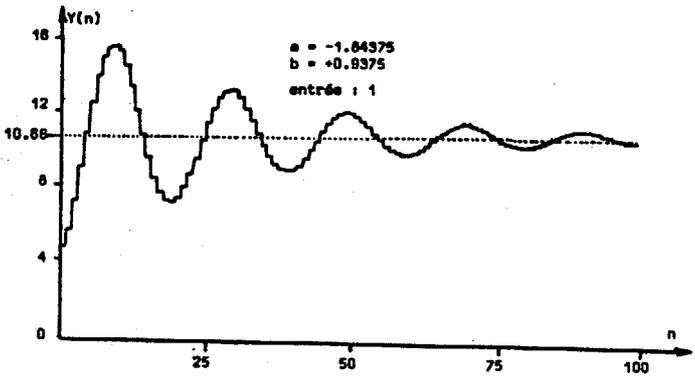


Figure 7 a)

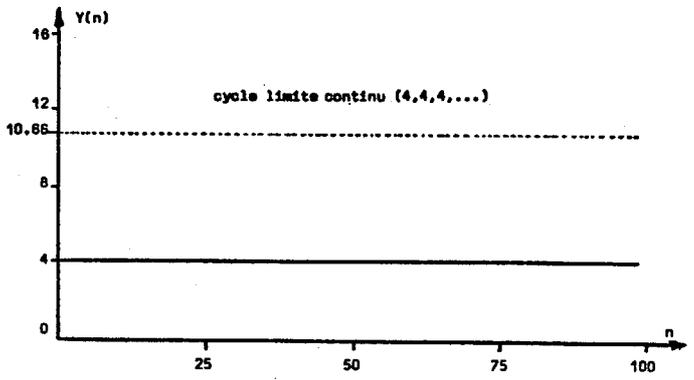


Figure 7 b)

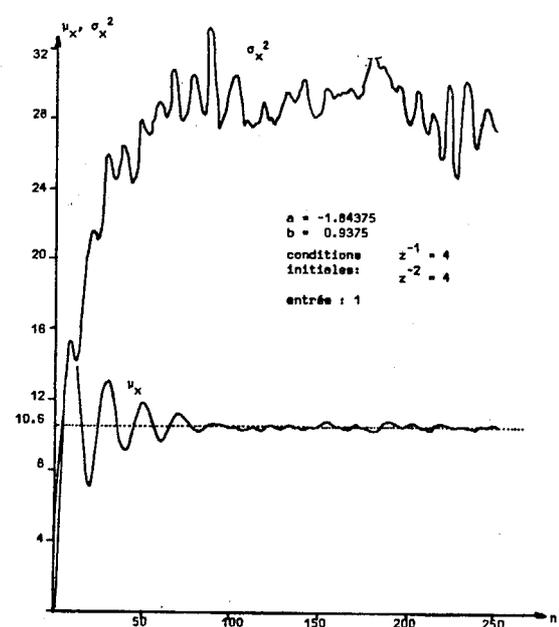


Figure 3.21

Figure 7 c)



APPLICATION DE LA QUANTIFICATION A REFERENCE STOCHASTIQUE AU CONTROLE DES CYCLES LIMITES EN FILTRAGE NUMERIQUE RECURSIF

On constate encore une fois que la moyenne du bruit en sortie correspond bien à la valeur du signal du filtre sans arrondi. Aucun état absorbant n'apparaît dans le cas d'une entrée non nulle, et la variance reste à peu près constante en fonction du temps.

Le tableau 1 nous permet de comparer les mesures de variances théoriques et pratiques.

Les valeurs théoriques sont calculées à l'aide du schéma équivalent de la figure 4

$$a = - 1.84375 \quad ; \quad b = + 0.9375$$

Amplitude de l'entrée	Var. théor. maximale $\sigma_e^2 = \Delta^2/4$ (cf. eq. 4)	Var. théorique avec $\sigma_e^2 = \Delta^2/6$ (cf. eq.2-b)	Variance mesurée
0	43.73	29.15	30.28 (maximum)
1	43.73	29.15	29.16 (moyenne)

Tableau 1

On remarque sur le tableau 1 que la variance mesurée est du même ordre de grandeur que celle calculée avec  $\sigma_e^2 \sim \frac{\Delta^2}{6}$ . Des résultats similaires ont été obtenus pour des mesures faites sur les filtres traités en [22] (cf. [32]).

#### 5 - CONCLUSION

Les simulations rapportées au § précédent et en [22] permettent de conclure que l'approche théorique de la Q.R.S. s'applique parfaitement au filtrage numérique.

On peut résumer ainsi les principaux apports dans le domaine du filtrage digital de l'arrondi stochastique :

- Élimination des effets non linéaires : les cycles limites sont "remplacés" par un bruit blanc discret, sensiblement gaussien, dont la variance est connue. L'écart-type de ce bruit est en général nettement inférieur à l'amplitude du cycle limite qu'il remplace.
- Pour une entrée nulle, il existe un "état absorbant" qui assure qu'asymptotiquement le filtre se stabilise avec probabilité 1.
- Introduction d'un degré de liberté supplémentaire pour le concepteur : la perturbation ramenée en sortie par l'arrondi stochastique peut être rendue aussi faible qu'on le veut par l'implantation, entre deux périodes d'échantillonnage, d'un estimateur convergent de moyenne. Si par exemple chaque calcul de l'équation de filtrage est répété M fois, la variance

peut être diminuée comme  $1/M$ . On peut montrer que la "performance" du filtre représentée comme le rapport Signal/bruit en sortie varie comme  $\frac{1}{M2^n}$  [32] (où n est la longueur de mot (en bits) utilisée dans le calcul).

En conséquence, la longueur de mot n'est plus imposée. Nous avons d'ailleurs montré en [31] qu'à la limite, un filtre digital peut être implanté avec des mots de 1 à 2 bits.

La Quantification à Référence Stochastique appliquée au filtrage digital semble ainsi être un principe très intéressant pour de larges classes d'applications où la longueur de mot est un paramètre matériel important: filtres à base de microprocesseurs à mots courts, filtres digitaux rapides (câblés ou à microprocesseurs en tranches), structures câblées spécialisées (calculateurs stochastiques)...

#### BIBLIOGRAPHIE :

- [1] - ABU-EL-HAIJA A.I. and PETERSON A.M.  
"An approach to eliminate roundoff errors in digital filters".  
IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-27, n° 2, April 1979, pp. 195-198.
- [2] - AVENHAUS E., SCHUESSLER H.W.  
"On the approximation problem in the design of digital filters with limited wordlength".  
Arch. Elek. Übertragung, 24, 1970, pp. 571-572.
- [3] - BUTTERWECK H.J.  
"Suppression of parasitic oscillations in second-order digital filters by means of controlled rounding arithmetic".  
Arch. Elek. Übertragung., Vol. 29, Sept. 1975, pp. 371-374.
- [4] - BUTTNER M.  
"A novel approach to eliminate limit cycles in digital filters with a minimum increase in the quantization noise".  
IEEE Proc. ISACAS, Munich, 1976, pp. 291-294.
- [5] - CASTANIE F.  
"Signal Processing by random reference quantizing".  
Signal Processing, Vol. 1, n° 1, January 1979, pp. 27-43.
- [6] - CASTANIE F.  
"Estimation de moments par quantification à référence stochastique".  
Thèse Dr-ès-Sciences, 1977, Toulouse, France.
- [7] - CHANG T.L.  
"A note on upper bounds on limit cycles in digital filters".  
IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-24, Feb. 1976, pp. 99-100.

APPLICATION DE LA QUANTIFICATION A REFERENCE STOCHASTIQUE AU CONTROLE  
DES CYCLES LIMITES EN FILTRAGE NUMERIQUE RECURSIF

- [8] - CLAASEN T.A.C.M. et al.  
"Some remarks on the classification of limit cycles in digital filters".  
Philips Research Reports, Vol. 28, August 73, pp. 297-305.
- [9] - CLAASEN T.A.C.M. et al.  
"Effects of quantization and overflow in recursive digital filters".  
IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ASSP-24, n° 6, Dec. 1976, pp. 517-529.
- [10] - CLAASEN T.A.C.M. et al.  
"A survey of quantization and overflow effects in recursive digital filters".  
IEEE Proc. ISACAS, Munich, 1976, pp. 621-624.
- [11] - CLAASEN T.A.C.M. et al.  
"Second order digital filter with only one magnitude-truncation quantizer and having practically no limit cycles".  
Electron. Letters, Vol. 9, Nov. 1, 1973, pp. 531-532.
- [12] - CLAASEN T.A.C.M. et al.  
"Frequency domain criteria for the absence of zero input limit cycles in non-linear discrete-time systems, with applications to digital filters".  
IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. CAS-22, March 1975, pp. 232-239.
- [13] - CLAASEN T.A.C.M. et al.  
"Quantization noise analysis for fixed-point digital filters using magnitude truncation for quantization".  
IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-22, n° 11, Nov. 1975.
- [14] - FAM A.T. and BARNES C.W.  
"Nonminimal realizations of fixed-point digital filters that are free of all finite wordlength limit cycles".  
IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-27, n° 2, April 1979, pp. 149-153.
- [15] - FETTWEIS A. and MEERKOTTER  
"Suppression of parasitic oscillations in wave digital filters".  
IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-22, n° 3, March 1975, pp. 239-246.
- [16] - JACKSON L.B.  
"An analysis of limit cycles due to multiplication rounding in recursive digital (sub.) filters".  
Proc. 7 th Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory, 1969, pp. 69-78.
- [17] - KANETO T.  
"Limit-cycle oscillations in floating-point digital filters".  
IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-21, April 1973, pp. 100-106.
- [18] - KAD C.  
"An analysis of limit cycles due to sign magnitude truncation in multiplication in recursive digital filters".  
in Proc. 5 th Asilomar Conf. Circuit and System Theory, Pacific Grove, CA., 1971, pp. 349-353.
- [19] - KIEBURTZ R.B.  
"An experimental study of roundoff effects in a tenth-order recursive digital filter".  
IEEE Trans. Commun. Vol. COM-21, June 1973, pp. 757-763.
- [20] - KIEBURTZ R.B. et al.  
"Control of limit cycles in recursive digital filters by randomized quantization".  
Proc. IEEE ISACAS, Munich, 1976, pp. 624a-627.
- [21] - KNOWLES J.B. and EDWARDS R.  
"Effects of a finite-wordlength computer in a sampled data feedback system".  
Proc. Inst. Elec. Eng., Vol. 112, June 1965, pp. 1197-1207.
- [22] - LAWRENCE V.B. and MINA K.V.  
"Control of limit cycles oscillations in second-order recursive digital filters using constrained random quantization".  
IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-26, n° 2, April 1978, pp. 127-134.
- [23] - LAWRENCE V.B. and MINA K.V.  
"Discovery of a new and interesting class of limit cycles in recursive digital filters".  
presented at the Int. Symp. on Circuits and Systems, ISCAS, Phoenix, AZ, April 1977.
- [24] - LIU BEDE  
"Effect of finite length on the accuracy of digital filters. A review".  
IEEE Trans. on Circuit theory, Digital Signal Processing n° 1, Nov. 1971, pp. 361-368.
- [25] - LONG V.L. and TRICK T.N.  
"An absolute bound on limit cycles due to roundoff errors in digital filters".  
IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-21, N° 1, Feb. 1973.
- [26] - PARKER S.R. and HESS S.F.  
"Limit cycles oscillations in digital filters".  
IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, n° 6, Nov. 1971, pp. 687-697.
- [27] - SANDBERG I.W. and KAISER J.F.  
"A bound on limit cycles in fixed-point implementation of digital filters".  
IEEE Trans. Audio-Electroacoust., Vol. AU-20, N° 2, June 1972.
- [28] - SHEPPARD W.F.  
"On the most probable value of frequency-constants".  
Proc. of the London Math. Soc., Vol. XXIX, N° 634, March 1898, pp. 353-377.
- [29] - VERKROOST G.  
"A general second-order digital filter with controlled rounding to exclude limit cycles for constant input signals".  
IEEE Trans. on Circuits and systems, Vol. CAS-24, N° 8, August 1977, pp. 428-431.
- [30] - VERKROOST G. and BUTTERWECK H.J.  
"Suppression of parasitic oscillations in wave digital filters and related structures by means of controlled rounding".  
Arch. Elek Übertragung., May 1976, pp. 181-186.
- [31] - F. CASTANIE, D. DUBE  
"Filtres digitaux câblés à mots de 2 bits utilisant la quantification à référence stochastique".  
7° Col. sur le Traitement du Signal et ses Applications, Nice 28 Mai au 2 Juin 1979.
- [32] - D. DUBE  
"La quantification à référence stochastique appliquée au filtrage numérique".  
Thèse Dr-Ingénieur, Février 1981, INP Toulouse.

