HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981

COMPARAISON DE L'ESTIMATEUR QUADRATIQUE OPTIMAL ET DE L'ESTIMATEUR ERGODIQUE DE LA VARIANCE D'UN BRUIT BLANC DANS UN MODELE AUTOREGRESSIF

G. Favier

Laboratoire de Signaux et Systèmes - Equipe de Recherche Associée au CNRS n°835
41, boulevard Napoléon III - 06041 Nice Cedex

RESUME

On considère un modèle autorégressif (AR) d'ordre n :

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \, x_{k-i} + e_k$$

En supposant que les paramètres $a_i (i \in [1,n])$ sont connus et en considérant la variance Q du bruit blanc gaussien e_k comme une variable aléatoire, on montre que :

- l'estimateur quadratique optimal de Salut présente l'avantage, sur l'estimateur ergodique, de pouvoir tenir compte d'une certaine information a priori, relative à la variance à estimer: $\hat{Q}_{o/o}$ et $E[\tilde{Q}^2_{o/o}]$;
- dans le cas où l'on dispose d'aucune information a priori ($\hat{Q}_{o/o} = o$, $E[\tilde{Q}^2_{o/o}] = \infty$) l'estimateur quadratique optimal est alors confondu avec l'estimateur ergodique.

SUMMARY

We consider an n-order autoregressive model (AR) :

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \, x_{k-i} + e_k$$

Assuming the parameters $a_i (i \in [1,n])$ are known and Considering the variance Q of the white gaussian noise process e_k as a random variable, we show that :

- unlike the ergodic estimator, the optimal quadratic estimator of Salut presents the advantage to allow for a certain a priori information, relative to the variance to be estimated : $\hat{Q}_{o/o}$ and $E[\tilde{Q}^2_{o/o}]$;
- when no a priori information is available ($\hat{Q}_{o/o} = o$, $E[\tilde{Q}^2_{o/o}] = \infty$), the two estimators are identical.

COMPARAISON DE L'ESTIMATEUR QUADRATIQUE OPTIMAL ET DE L'ESTIMATEUR ERGODIQUE DE LA VARIANCE D'UN BRUIT BLANC DANS UN MODELE AUTOREGRESSIF

I - INTRODUCTION

On considère un modèle autorégressif (AR) d'ordre n, décrit par l'équation récurrente :

$$y_k = a_1\, y_{k-1} + \dots + a_n\, y_{k-n} + e_k \qquad (1)$$

où :

- y_k est le signal mesuré ($k \in [1-n, N]$), supposé scalaire,
- e_k est un bruit blanc gaussien, stationnaire, ergodique, de moyenne nulle et de variance Q inconnue.

Dans le cas où l'on suppose les paramètres a_i ($i \in [1,n]$) connus, l'estimation de la variance Q peut être effectuée en prenant la moyenne temporelle du carré du signal e_k, puisque dans le cas d'un signal aléatoire ergodique la moyenne temporelle tend vers la moyenne d'ensemble.

y_k étant mesuré sur l'intervalle $[1-n, N]$, e_k peut être calculé pour $k \in [1, N]$, et par suite

$$\hat{\hat{Q}}_{N/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e_k^2 \ . \qquad (2)$$

L'estimateur correspondant est appelé «estimateur ergodique» et il peut être réalisé sous forme séquentielle en utilisant l'expression suivante :

$$\hat{\hat{Q}}_{k/k} = \hat{\hat{Q}}_{k-1/k-1} + \frac{1}{k}\left[e_k^2 - \hat{\hat{Q}}_{k-1/k-1}\right] \qquad (3)$$

avec

$$\hat{\hat{Q}}_{o/o} = o \ . \qquad (4)$$

En définissant le gain

$$K_k = \frac{1}{k} \qquad (5)$$

une autre manière de calculer récursivement $\hat{\hat{Q}}_{k/k}$ est

$$\boxed{\hat{\hat{Q}}_{k/k} = \hat{\hat{Q}}_{k-1/k-1} + K_k\left[e_k^2 - \hat{\hat{Q}}_{k-1/k-1}\right] \qquad (6)}$$

avec

$$\boxed{K_{k+1} = \frac{K_k}{K_k + 1} \qquad (7)}$$

et les conditions initiales :

$$\boxed{\hat{\hat{Q}}_{o/o} = o \qquad (8)}$$

$$\boxed{K_1 = 1 \qquad (9)}$$

Le but de la présente communication est de comparer l'estimateur quadratique optimal de [Salut - 1976] avec l'estimateur ergodique *(6)-(9)*. Nous montrons que :

- d'une part, à la différence de l'estimateur ergodique, l'estimateur quadratique optimal permet de tenir compte d'une certaine information a priori relative à la variance Q à estimer (i.e. moyenne et incertitude initiales $\bar{Q}_o$ et $E[\tilde{Q}^2_{o/o}]$, avec $\tilde{Q}_{o/o} = Q_o - \bar{Q}_o$) ;
- d'autre part, dans le cas où l'on dispose d'aucune information a priori ($\bar{Q}_o = o$, $E[\tilde{Q}^2_{o/o}] = \infty$), l'estimateur optimal est alors confondu avec l'estimateur ergodique.

II - COMPARAISON DE L'ESTIMATEUR QUADRATIQUE OPTIMAL ET DE L'ESTIMATEUR ERGODIQUE

II-1 L'estimateur quadratique optimal

Etant donné la classe des estimateurs quadratiques, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires définies sur le champ de mesures bidimensionnel :

$$Y(\tau,\tau') = \{y_\tau\ y_{\tau'}\ ,\ 1-n \leqslant \tau,\ \tau' \leqslant k\} \qquad (10)$$

l'estimateur quadratique optimal $\hat{Q}_{k/k}$ de Q_k, au sens de la variance minimum, est tel que l'erreur d'estimation $\tilde{Q}_{k/k} = Q_k - \hat{Q}_{k/k}$ soit orthogonale à toute information quadratique de l'ensemble $Y(\tau,\tau')$.

$$E\{\tilde{Q}_{k/k}\ B(y_\tau,\ y_{\tau'})\} = o \qquad (11)$$

pour toutes valeurs de $B(y_\tau, y_{\tau'})$, avec $1-n \leqslant \tau, \tau' \leqslant k$.

L'équation *(11)* est appelée équation de projection. [Salut - 1976] a montré que l'estimateur optimal $\hat{Q}_{k/k}$ peut s'écrire

$$\hat{Q}_{k/k} = \hat{Q}_{k-1/k-1} + \sum_{i=o}^{n} M_k^i\ \tilde{E}\,[y_k\ y_{k-i}/k-1] \qquad (12)$$

avec

$$\tilde{E}\,[y_k\ y_{k-i}/k-1] \triangleq y_k\, y_{k-i} - \hat{E}\,[y_k\ y_{k-i}/k-1] = \qquad (13)$$

= processus d'innovation quadratique

où $\hat{E}[y_k y_{k-i}/k-1]$ représente l'estimateur quadratique optimal, au sens de la variance minimum, de la variable $y_k\ y_{k-i}$.

Par analogie avec le filtre de [Kalman - 1960] l'équation de projection *(11)* est utilisée pour calculer les gains M_k^i en prenant comme information quadratique $B(y_\tau, y_\tau)$ l'innovation quadratique $\tilde{E}[y_k\ y_{k-i}/k-1]$, $i \in [o,n]$.

L'application de l'estimateur quadratique *(12)* pour l'identification de la variance Q_k du bruit e_k intervenant dans le modèle *(1)*, conduit au théorème suivant :

Théorème :

« *Etant donné un processus* $\{y_k\}$ *modélisé à l'aide d'un modèle* AR *d'ordre* n *(équation (1)) dont les coefficients* a_i *sont supposés connus, l'estimateur quadratique optimal* $\hat{Q}_{k/k}$ *au sens de la variance minimum, de la variance* Q_k *est donné par :*

$$\boxed{\hat{Q}_{k/k} = \hat{Q}_{k-1/k-1} + M_k^o\left[e_k^2 - \hat{Q}_{k-1/k-1}\right] \qquad (14)}$$

$$\boxed{M^o_{k+1} = \frac{M^o_k}{M^o_k + 1} \qquad (15)}$$

avec les conditions initiales

$$\boxed{\hat{Q}_{o/o} = \bar{Q}_o \qquad (16)}$$

$$\boxed{M_1^o = \frac{E[\tilde{Q}^2_{o/o}]}{C^{te} + E[\tilde{Q}^2_{o/o}]} \qquad (17)}$$

où $\bar{Q}_o$ *et* $E[\tilde{Q}^2_{o/o}]$ *représentent respectivement une valeur moyenne et l'incertitude autour de cette moyenne que l'on se fixe a priori.* »

Démonstration.

De manière à simplifier les calculs, nous démontrons ce théorème dans le cas $n=1$. Par une démarche analogue, la démonstration peut être étendue au cas $n>1$.

Soit

$$y_k = a\, y_{k-1} + e_k\,. \qquad (18)$$

D'après *(12)*, nous avons pour $n=1$:

$$\boxed{\hat{Q}_{k/k} = \hat{Q}_{k-1/k-1} + M_k^{\circ}\, \tilde{E}[\,y_k^2/y_{k-1}] + M_k^1\, \tilde{E}[\,y_k\, y_{k-1}/k-1]} \qquad (19)$$

★ Calcul de l'innovation quadratique $\tilde{E}[\,y_k\, y_{k-i}/k-1]$, $i \in [o,1]$:

La variance Q_k étant supposée constante ($Q_k = Q_{k-1}$), nous avons :

$$\hat{Q}_{k/k-1} = \hat{Q}_{k-1/k-1} \qquad (20)$$

(avec $\hat{Q}_{o/o} = \bar{Q}_o$ = valeur moyenne a priori).

D'autre part, d'après *(18)* nous pouvons déduire que :

$$\hat{E}[\,y_k^2/k-1\,] = a^2\, y_{k-1}^2 + \hat{Q}_{k-1/k-1} \qquad (21)$$

et

$$\hat{E}[\,y_k\, y_{k-i}/k-1\,] = a\, y_{k-i}^2\,. \qquad (22)$$

D'où

$$\tilde{E}[\,y_k^2/k-1\,] = 2a\, y_{k-1}\, e_k + e_k^2 - \hat{Q}_{k-1/k-1} \qquad (23)$$

et

$$\tilde{E}[\,y_k\, y_{k-1}/k-1\,] = y_{k-1}\, e_k\,. \qquad (24)$$

★ Calcul des gains M_k° et M_k^1 :

Comme nous l'avons signalé précédemment, l'expression des gains M_k° et M_k^1 est obtenue en écrivant que l'erreur d'estimation $\tilde{Q}_{k/k}$ est orthogonale à l'innovation quadratique $\tilde{E}[\,y_k\, y_{k-i}/k-1]$:

$$E[\,\tilde{Q}_{k/k}\, \tilde{E}(y_k\, y_{k-i}/k-1\,] = o \quad , \; i \in [o,1] \qquad (25)$$

L'équation de projection *(25)* pour $i \in [o,1]$ est équivalente à un système de deux équations algébriques à deux inconnues M_k° et M_k^1.

Nous développons ci-dessous ces deux équations .

D'après *(19)* et compte tenu que $Q_k = Q_{k-1}$, nous avons

$$\tilde{Q}_{k/k} = \tilde{Q}_{k-1/k-1} - M_k^{\circ}\, \tilde{E}[\,y_k^2/k-1] - M_k^1\, \tilde{E}[y_k\, y_{k-1}/k-1]\,. \qquad (26)$$

Par suite, l'équation de projection *(25)* devient

$$\boxed{\begin{aligned} E[\,\tilde{Q}_{k-1/k-1}\, \tilde{E}(y_k\, y_{k-i}/k-1)] = {} & M_k^{\circ}\, E[\,\tilde{E}(y_k^2/k-1)\, \tilde{E}(y_k\, y_{k-i}/k-1)] + \\ & M_k^1\, E[\,\tilde{E}(y_k\, y_{k-1}/k-1)\, \tilde{E}(y_k\, y_{k-i}/k-1)] \end{aligned}} \qquad (27)$$

– • **Expression de** $E[\,\tilde{Q}_{k-1/k-1}\, \tilde{E}(y_k\, y_{k-i}/k-1)]$:

pour $i=o$:

D'après *(23)*, nous avons :

$$\begin{aligned} E[\,\tilde{Q}_{k-1/k-1}\, \tilde{E}(y_k^2/k-1)] &= E[\,\tilde{Q}_{k-1/k-1}\,(2a\, y_{k-1}\, e_k + e_k^2 - \hat{Q}_{k-1/k-1})] \\ &= E[\,\tilde{Q}_{k-1/k-1}\, e_k^2] = E[\,\tilde{Q}_{k-1/k-1}^2]\,. \end{aligned} \qquad (28)$$

(Remarque : dans les calculs, l'espérance mathématique E est prise à la fois relativement aux quantités d'ordre 1 (y_k, e_k) et relativement aux quantités d'ordre 2 (P_k, Q_k), où $P_k \triangleq E[y_k^2]$; $E[\bullet]$ doit donc être considéré comme une abréviation de $E_{y,e,P,Q}[\bullet]$ qui, d'après la règle de Bayes, peut aussi être calculée comme $E_{P,Q}\left\{E_{y,e/P,Q}[\bullet]\right\}$).

pour $i=1$:

D'après *(24)*, nous avons :

$$E[\,\tilde{Q}_{k-1/k-1}\, \tilde{E}(y_k\, y_{k-1}/k-1)] = E[\,\tilde{Q}_{k-1/k-1}\, y_{k-1}\, e_k] = o \qquad (29)$$

– • **Expression de** $E[\,\tilde{E}(y_k^2/k-1)\, \tilde{E}(y_k\, y_{k-i}/k-1)]$:

pour $i=o$:

$$\begin{aligned} E[\,\tilde{E}(y_k^2/k-1)\, \tilde{E}(y_k^2/k-1)] &= E\left\{[2a\, y_{k-1}\, e_k + e_k^2 - \hat{Q}_{k-1/k-1}]^2\right\} \\ &= 4a^2\, E[P_{k-1}\, Q_k] + E[e_k^4] - E[\hat{Q}_{k-1/k-1}^2]\,. \end{aligned} \qquad (30)$$

pour $i=1$:

$$\begin{aligned} & E[\,\tilde{E}(y_k^2/k-1)\, \tilde{E}(y_k\, y_{k-1}/k-1)] = \\ & E\left\{[2a\, y_{k-1}\, e_k + e_k^2 - \hat{Q}_{k-1/k-1}]\, y_{k-1}\, e_k\right\} = 2a\, E[\,P_{k-1}\, Q_k]\,. \end{aligned} \qquad (31)$$

– • **Expression de** $E[\,\tilde{E}(y_k\, y_{k-1}/k-1)\, \tilde{E}(y_k\, y_{k-1}/k-1)]$:

$$\begin{aligned} E[\,\tilde{E}(y_k\, y_{k-1}/k-1)\, \tilde{E}(y_k\, y_{k-1}/k-1)] &= E[\,y_{k-1}^2\, e_k^2] \\ &= E[\,P_{k-1}\, Q_k]\,. \end{aligned} \qquad (32)$$

Par suite, en utilisant d'une part les expressions *(28)*, *(30)-(31)*, et d'autre part *(29)*, *(31)-(32)*, l'équation de projection *(27)* nous donne :

pour $i=o$:

$$\begin{aligned} E[\,\tilde{Q}_{k-1/k-1}^2] = {} & M_k^{\circ}\left\{4a^2\, E[P_{k-1}\, Q_k] + E[\,e_k^4] - E[\,\hat{Q}_{k-1/k-1}^2]\right\} + \\ & M_k^1\left\{2a\, E[P_{k-1}\, Q_k]\right\}. \end{aligned} \qquad (33)$$

pour $i=1$:

$$0 = M_k^{\circ}\left\{2a\, E[\,P_{k-1}\, Q_k]\right\} + M_k^1\left\{E[\,P_{k-1}\, Q_k]\right\} \qquad (34)$$

Les gains M_k° et M_k^1 sont donc obtenus en résolvant le système algébrique constitué des équations *(33)* et *(34)*. A partir de *(34)*, nous pouvons déduire que

$$\boxed{M_k^1 = -\,2a\, M_k^{\circ}} \qquad (35)$$

Et en reportant cette expression de M_k^1 dans *(33)*, nous obtenons

$$M_k^\circ \left\{ E[e_k^4] - E[\hat{Q}^2_{k-1/k-1}] \right\} = E[\tilde{Q}^2_{k-1/k-1}] \qquad (36)$$

En notant que

$$E[\hat{Q}^2_{k-1/k-1}] = E[(Q_{k-1} - \tilde{Q}_{k-1/k-1})^2]$$
$$= E[Q^2_{k-1}] - E[\tilde{Q}^2_{k-1/k-1}] \qquad (37)$$

et compte tenu de l'hypothèse sur le bruit blanc e_k (gaussien et stationnaire) nous avons

$$E[e_k^4] - E[\hat{Q}^2_{k-1/k-1}] = C + E[\tilde{Q}^2_{k-1/k-1}] \qquad (38)$$

où C est une constante.
D'où l'expression suivante de M_k° :

$$\boxed{M_k^\circ = \frac{E[\tilde{Q}^2_{k-1/k-1}]}{C + E[\tilde{Q}^2_{k-1/k-1}]}} \qquad (39)$$

En remplaçant M_k^1 par son expression *(35)* et compte tenu des expressions *(23)-(24)* de l'innovation quadratique, l'estimateur quadratique $\hat{Q}_{k/k}$ défini en *(19)* s'écrit :

$$\hat{Q}_{k/k} = \hat{Q}_{k-1/k-1} + M_k^\circ [e_k^2 - \hat{Q}_{k-1/k-1}] \, . \qquad (40)$$

Cette expression est bien de la forme *(14)*.

Il nous reste maintenant à montrer que le calcul du gain M_k° peut être effectué de manière récursive à l'aide de la formule *(15)*.

D'après *(39)*, nous avons

$$M^\circ_{k+1} = \frac{E[\tilde{Q}^2_{k/k}]}{C + E[\tilde{Q}^2_{k/k}]} \, . \qquad (41)$$

D'autre part, en utilisant l'expression *(26)* de $\tilde{Q}_{k/k}$ ainsi que les relations *(28) - (32)*, nous obtenons

$$E[\tilde{Q}^2_{k/k}] = (1-M_k^\circ)^2 E[\tilde{Q}^2_{k-1/k-1}] + (M_k^1 + 2\, a M_k^\circ)\; E[P_{k-1} Q_k] + C(M_k^\circ)^2 \qquad (42)$$

Compte tenu de la relation *(35)*, *(42)* se simplifie en

$$E[\tilde{Q}^2_{k/k}] = (1-M_k^\circ)^2 E[\tilde{Q}^2_{k-1/k-1}] + C(M_k^\circ)^2 \, . \qquad (43)$$

Et en remplaçant $E[\tilde{Q}^2_{k-1/k-1}]$ par son expression en fonction de M_k° tirée de *(39)*, nous avons

$$E[\tilde{Q}^2_{k/k}] = C\, M_k^\circ \, . \qquad (44)$$

Par suite, en reportant *(44)* dans *(41)* et après simplification, nous vérifions que le gain M_k° peut être calculé à l'aide de la formule récursive *(15)*, avec comme valeur d'initialisation

$$M_1^\circ = \frac{E[\tilde{Q}^2_{o/o}]}{C + E[\tilde{Q}^2_{o/o}]} \qquad (45)$$

C.Q.F.D.

II-2 <u>Comparaison de l'estimateur quadratique optimal et de l'estimateur ergodique</u>

Cette comparaison s'effectue très simplement à partir des équations *(6)-(9)* d'une part et *(14)-(17)* d'autre part.

Nous constatons que :

- à la différence de l'estimateur ergodique $\hat{\hat{Q}}_{k/k}$ l'estimateur quadratique $\hat{Q}_{k/k}$ permet de tenir compte d'une certaine information a priori : moyenne et incertitude initiales $\bar{Q}_o$ et $E[\tilde{Q}^2_{o/o}]$;
- si $\bar{Q}_o = o$ et $E[\tilde{Q}^2_{o/o}] = \infty$ *(46)*
  (i.e. si on dispose d'aucune information a priori) les deux estimateurs $\hat{\hat{Q}}_{k/k}$ et $\hat{Q}_{k/k}$ sont identiques.

III - CONCLUSION

Dans cette communication nous avons montré que, dans le cas d'un modèle AR d'ordre n dont les paramètres a_i sont supposés connus, l'estimateur de la variance Q_k utilisant l'algorithme quadratique de Salut permet de tenir compte d'une certaine information a priori sur Q_k.

Cependant, l'intérêt de cet estimateur quadratique apparaît de manière beaucoup plus évidente pour l'estimation des matrices de covariance de bruit d'un modèle d'état. Dans ce cas, la connaissance des paramètres dynamiques ne suffit plus pour calculer la séquence des valeurs de bruit et par suite il n'est plus possible d'utiliser l'estimateur ergodique.

Malheureusement, la solution offerte par l'estimateur quadratique optimal qui est attrayante d'un point de vue théorique, est d'une très grande complexité, ce qui rend très difficile sa mise en oeuvre (voir [Favier, Alengrin, Guillermin - 1979]).

• Remerciements •

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur B.Picinbono qui est à l'origine de l'étude présentée dans cette communication, et avec qui nous avons eu de nombreuses discussions.

REFERENCES

[G.Favier, G.Alengrin, P.Guillermin - 1979] : *Algorithmes de filtrage adaptatif. Estimation des covariances de bruit dans un système linéaire stochastique.* Rapport de fin de contrat DRET-CETHEDEC. Laboratoire de Signaux et Systèmes, Nice, mai 1979.

[R.E.Kalman - 1960] : *A new approach to linear filtering and prediction problems.* Trans. of A.S.M.E., Jnl.Basic Engineering, vol 82 D, pp 34-45, March 1960.

[G.Salut - 1976] : *Identification optimale des systèmes linéaires stochastiques.* Thèse de Docteur ès Sciences, Toulouse, juin 1976.