

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

229



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

ESTIMATION DES PARAMETRES DE CIBLE EN DETECTION MAGNETIQUE INFLUENCE DE LA PRECISION DES MESURES

PRETET GEORGES

G.E.S.M.A. D.C.A.N. BREST 29240 BREST NAVAL

RESUME

Pour des études de détection magnétique il est intéressant de pouvoir modéliser une cible à l'aide des moments magnétiques dipolaires, quadripolaires, etc... équivalents. On montre qu'il est théoriquement possible de déterminer les moments dipolaires et quadripolaires équivalents d'un objet ferromagnétique si on dispose des signaux obtenus sur des capteurs tridirectionnels lorsque l'objet se déplace suivant une trajectoire rectiligne connue. Si les signaux sont bruités et si la localisation relative objet-capteurs est entachée d'une erreur, la précision de détermination des moments équivalents est très difficile à évaluer par des méthodes générales. Une étude en simulation a été effectuée pour estimer l'influence des différentes sources d'erreurs sur la précision des résultats et juger de la validité de la détermination des différentes composantes des moments magnétiques équivalents dans des conditions réelles de mesures.

SUMMARY

In magnetic detection studies it is possible to use a mathematical model of the target based on magnetic dipole, quadrupole, equivalent moments.

Theoretically it is possible to calculate the equivalent magnetic dipole and quadrupole moments of a ferromagnetic object if the signals, on trirectangular sensors, due to the object moving along a straight track, are known. If the signals are mixed with noise and if the position of the sensors is known with errors it is very difficult to estimate by general methods the precision in calculating the equivalent moments. We use a computer simulation method in order to estimate the influence on the results of the measurement errors and judge the validity of the method when applied to real signals.



ESTIMATION DES PARAMETRES DE CIBLE EN DETECTION MAGNETIQUE

INFLUENCE DE LA PRECISION DES MESURES

1 - INTRODUCTION -

Dans le cadre d'études de modèles de simulation en détection magnétique on s'intéresse au problème suivant :

- étant donné des mesures de champ magnétique créé par un objet ferromagnétique quelconque trouver un modèle mathématique permettant de calculer le champ magnétique dans tout l'espace autour de l'objet.

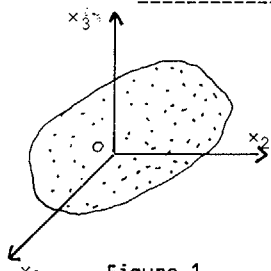
Dans toute sa généralité ce problème est très complexe et nous l'avons abordé ici avec les restrictions suivantes :

- les mesures de champ magnétique sont faites à des distances de l'objet grands par rapport aux dimensions de l'objet,
- on cherche à calculer le champ magnétique pour des distances supérieures à celles des mesures.
- De plus on s'impose les conditions de mesures suivantes :
- on mesure trois composantes orthogonales du champ magnétique,
- on effectue les mesures pendant un déplacement rectiligne relatif de l'objet par rapport aux capteurs de mesure (magnétomètres directs).

On obtient donc trois signaux correspondants aux variations spatiales des composantes du champ magnétique suivant une trajectoire rectiligne. On cherche un modèle mathématique permettant d'obtenir une expression analytique des signaux. L'identification des paramètres du modèle sera faite par analyse des signaux mesurés. Une étude sur l'influence des erreurs de positionnement et de mesure du champ magnétique permet d'estimer la précision des résultats de calcul des paramètres du modèle.

2 - CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UN OBJET DE FORME QUELCONQUE - (4)

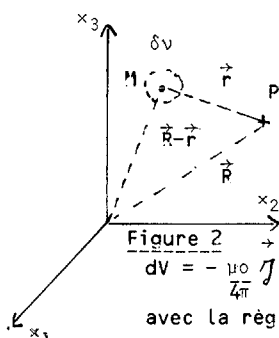
2.1 - Choix du référentiel :



On prend un repère orthonormé $Ox_1x_2x_3$ de centre O à l'intérieur de l'objet. La trajectoire rectiligne de déplacement relatif capteurs-objet sera parallèle à l'un des axes. Les composantes du champ magnétique seront mesurées suivant des directions parallèles aux axes du référentiel.

Figure 1

2.2 - Potentiel scalaire :



Soit dv un élément de volume de l'objet de coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dans le référentiel $Ox_1x_2x_3$ et d'aimantation $\vec{J} = J \vec{e}_3$. Au point P de coordonnées x_1, x_2, x_3 distant de \vec{r} de l'élément dv et de R du centre O, le potentiel scalaire du champ magnétique

Figure 2

créé par dv est :

$$dv = -\frac{\mu_0}{4\pi} J \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv = -\frac{\mu_0}{4\pi} J \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) dv$$

avec la règle $J \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = \sum_u J_u \frac{\partial}{\partial x_{iu}} \left(\frac{1}{r} \right)$

Pour tout le volume V de l'objet, au point P, le potentiel scalaire est :

$$V = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V J_u \frac{\partial}{\partial x_{iu}} \left(\frac{1}{r} \right) dv \quad [1]$$

2.3 - Composantes du champ magnétique :

Au point de mesure P le champ magnétique s'exprime par la formule

$$\vec{B} = -\text{grad } V$$

La composante suivant l'axe Ox_i est donc

$$B_{xi} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = \partial_i V \quad [2]$$

Dans le cas général on n'a évidemment pas d'expressions simples pour les composantes B_{xi} .

2.4 - Développement en termes multipolaires :

Dans le cas où le point P est tel que $|R| \gg |\vec{R}-\vec{r}|$ pour tout point M intérieur au volume de l'objet, on peut développer la fonction $\frac{1}{r}$ en série de Taylor. Avec nos notations en se limitant aux deux premiers termes on obtient :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \alpha_u \frac{\partial}{\partial x_u} \left(\frac{1}{R} \right) \quad [3]$$

$$V = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V J_u \frac{\partial}{\partial x_u} \left(\frac{1}{R} \right) dv - \int_V \alpha_v J_u \frac{\partial^2}{\partial x_u \partial x_v} \left(\frac{1}{R} \right) dv \right] \quad [4]$$

En posant $P_{uv} = \frac{1}{r} [\alpha_u J_u + \alpha_v J_v]$
 $\int_V J_u dv = M_u$ = composante u du moment dipolaire de l'objet
 $\int_V \alpha_u \alpha_v J_u dv = Q_{uv}$ = composante uv du tenseur du moment quadripolaire de l'objet

Le potentiel au point P est une somme de potentiels, chaque terme étant dû à un moment multipolaire de la source :

$$V = V_{\text{dipolaire}} + V_{\text{quadripolaire}} + \dots$$

Si on explicite le terme dipolaire on a :

$$V_D = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[M_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + M_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + M_{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \left(\frac{1}{R} \right)$$

ou en utilisant les coordonnées cartésiennes classiques :

$$V_D = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} + M_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \left(\frac{1}{R} \right) \quad [5]$$

Pour le terme quadripolaire en remarquant que

$$Q_{uv} = Q_{vu} \text{ donc que } Q_{uv} + Q_{vu} = 2Q_{uv}$$

$$\Delta = \frac{1}{R} = 0$$

et en posant $K_{uv} = Q_{uu} - Q_{vv}$

$$V_Q = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[K_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + K_{yz} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - 2Q_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 2Q_{yz} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - 2Q_{xz} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right] \left(\frac{1}{R} \right) \quad [6]$$

On remarque que

- dans V_D on utilise trois paramètres pour caractériser la source (les trois composantes du moment dipolaire),

- dans V_Q on utilise cinq paramètres pour caractériser la source (les cinq composantes indépendantes du moment quadripolaire).

Si on avait continué le développement on aurait trouvé que pour caractériser la source dans les termes suivants il aurait fallu 7 puis 9, etc... paramètres (correspondants aux moments 2^e polaires...).

On peut noter que V_D, V_Q etc... peuvent se mettre sous la forme d'une somme de produits des paramètres caractéristiques par des fonctions des coordonnées. Il en sera de même des composantes du champ magnétique. On pourra ainsi écrire :

$$B_{xi} = B_{xi}^D + B_{xi}^Q + \dots \quad (x_i = x, y, z)$$

$$B_{xi} = \sum_{j=1}^3 F_j^D \alpha_{xi,j} + \sum_{j=1}^5 F_j^Q \alpha_{xi,j} + \dots \quad [7]$$

ESTIMATION DES PARAMETRES DE CIBLE EN DETECTION MAGNETIQUE

INFLUENCE DE LA PRECISION DES MESURES

avec P_j^D = paramètre caractéristique du moment dipolaire de la source

P_j^Q = paramètre caractéristique du moment quadripolaire de la source

$\alpha_{xi,j}^D, \alpha_{xi,j}^Q, \dots$ = fonctions des coordonnées Le terme général d'ordre n (correspondant au moment 2ⁿ-polaire de la source) serait

$$B_{xi} = \sum_{j=1}^{2n+1} P_j \alpha_{xi,j}$$

Les fonctions α se calculent sans difficulté à partir des formules générales. A titre d'exemple on a pour la composante B_x du champ magnétique l'expression suivante pour le terme dipolaire :

$$B_x^D = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[(2x^2 - y^2 - z^2) M_x + 3xy M_y + 3xz M_z \right] \frac{1}{R^3}$$

donc ici $P_1^D = M_x \quad P_2^D = M_y \quad P_3^D = M_z$

$$\alpha_{x,1}^D = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{R^3}$$

$$\alpha_{x,2}^D = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3xy}{R^3}$$

$$\alpha_{x,3}^D = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3xz}{R^3}$$

3 - SIGNAUX MAGNETIQUES MESURES PENDANT UN DEPLACEMENT RELATIF OBJET-CAPTEUR SUIVANT UNE TRAJECTOIRE RECTILIGNE - (2) (3) (5) (6)

Pour simplifier on suppose que le déplacement s'effectue suivant une trajectoire Δ parallèle à l'un des axes, par exemple Oy. La droite Δ coupe le plan O_{xz} en un point de coordonnées x_0, z_0 . La distance xz de A à O est $d_0 = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$. En utilisant la

coordonnée réduite $u = \frac{y}{d_0}$ on montre que l'on peut écrire :

$$B_x^D = A_x^{D,0} f_0(u) + A_x^{D,1} f_1(u) + A_x^{D,2} f_2(u)$$

$$\text{avec } A_x^{D,0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{d_0^3} [3x_0 z_0 M_z + (2x_0^2 - z_0^2) M_x]$$

$$A_x^{D,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3x_0 M_y}{d_0^3}$$

$$A_x^{D,2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_x}{d_0^3}$$

$$f_0(u) = \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} \quad f_1(u) = \frac{u}{(1+u^2)^{3/2}} \quad f_2(u) = \frac{u^2}{(1+u^2)^{3/2}}$$

On a des expressions du même type pour B_y^D et B_z^D et on

peut écrire

$$B_{xi}^D = \sum_{j=0}^2 A_{xi}^{D,j} \frac{u^j}{(1+u^2)^{3/2}}$$

On a de même pour les B_{xi}^Q

$$B_{xi}^Q = \sum_{j=0}^3 A_{xi}^{Q,j} \frac{u^j}{(1+u^2)^{5/2}}$$

et d'une manière générale

$$B_{xi}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n+1} A_{xi}^{(n),j} \frac{u^j}{(1+u^2)^{n+3/2}}$$

Ainsi

$$B_{xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n+1} A_{xi}^{(n),j} \frac{u^j}{(1+u^2)^{n+3/2}} \quad [8]$$

Les coefficients $A_{xi}^{(n),j}$ ne dépendent que des coordonnées fixes x_0 et z_0 et des paramètres caractéristiques $P_j^{(n)}$ des moments multipolaires de la source.

Les fonctions $f_n^j = \frac{u^j}{(1+u^2)^{n+3/2}}$ appartiennent à une

classe de fonctions particulières que nous allons étudier rapidement.

3.1 - Espace fonctionnel des signaux magnétiques (1)(5)
Les fonctions f_n^j sont des fonctions définies pour

$-\infty \leq u \leq +\infty$ et de carré sommable. En effet

$$I_{n,j} = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n^j)^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2j} du}{(1+u^2)^{n+3/2}} \quad \text{avec } m \text{ entier impair}$$

et j entier $\leq \frac{m-1}{2}$

En posant $u^2 = x$ on a $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ et

$$I_{n,j} = 2 \int_0^{\infty} \frac{u^{2j} du}{(1+u^2)^{n+3/2}} = \int_0^{\infty} \frac{x^{j-1/2} dx}{(1+x)^{n+3/2}}$$

$I_{n,j}$ est à rapprocher de la fonction Eulérienne de seconde espèce :

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{(1+x)^{p+q}}$$

avec $t = \frac{x}{x+1}$

On voit que

$$I_{n,j} = B(j+\frac{1}{2}, n-j-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(j+\frac{1}{2}) \Gamma(n-j-\frac{1}{2})}{\Gamma(n)}$$

avec $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$

$$\text{et } \Gamma(\beta + \frac{1}{2}) = \frac{1.3.5 \dots (2\beta-1) \sqrt{\pi}}{2^\beta}$$

(Γ = fonction eulérienne gamma)

f_n^j étant de carré sommable on peut dire que les fonctions f_n^j appartiennent à un espace fonctionnel \mathcal{F} sur lequel on peut définir la norme et le produit scalaire des fonctions f_n^j

$$\text{Norme de la fonction } f_n^j = N(f_n^j) = (I_{n,j})^{1/2}$$

$$\text{Produit scalaire des fonctions } f_n^j, f_{n'}^{j'} = \langle f_n^j, f_{n'}^{j'} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^j f_{n'}^{j'} du$$

On peut noter que si $j + j'$ est impaire alors

$$\langle f_n^j, f_{n'}^{j'} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{j+j'} du}{(1+u^2)^{n+n'+3/2}} = 0$$

dans ce cas les fonctions $f_n^j, f_{n'}^{j'}$ sont orthogonales.

\mathcal{F} est constitué des fonctions permettant d'exprimer les signaux magnétiques dus aux moments dipolaire, quadripolaire, etc... de la source. Soit $\mathcal{F}^{(n)}$ le sous espace des fonctions des signaux dus au moment 2ⁿ polaire de la source.

Toutes les $f_n^j \in \mathcal{F}^{(n)}$ sont indépendantes. Par contre les $f_n^j \in \mathcal{F}^{(n)}$ et les $f_{n'}^{j'} \in \mathcal{F}^{(n')}$ ne sont pas indépendantes. En effet on a par exemple

$$f_n^0 + f_n^2 = f_{n-1}^0$$

et d'une manière générale.

$$f_n^j + f_n^{j+2} = f_{n-1}^j$$

Ainsi l'ensemble des fonctions des signaux magnétiques ne forment pas un ensemble de fonctions indépendantes.

3.2 - Ensemble de fonctions f_n^j indépendantes. Base orthonormée de l'espace fonctionnel : (5) (6) (7)

Les fonctions f_n^j des signaux dus au moment 2ⁿ polaires se combinent entre elles à l'aide de n relations pour donner des fonctions f_{n-1}^j . Il y a donc 2 fonctions f_n^j indépendantes des fonctions f_{n-1}^j avec $n < n'$. Ce ci veut dire que si on considère les signaux dus aux moments dipolaire, quadripolaire, ... jusqu'à 2ⁿ polaire on aura 3 (les trois fonctions des signaux dipolaires) + 2(n-1) = 2n + 1 fonctions indépendantes. Si on appelle $\mathcal{F}^{(n)}$ le sous espace de \mathcal{F} correspondant aux fonctions dus aux moments dipolaire, quadripolaire, ... 2ⁿ polaire, on a :



ESTIMATION DES PARAMETRES DE CIBLE EN DETECTION MAGNETIQUE
INFLUENCE DE LA PRECISION DES MESURES

$$F^1(n) = F^1(1) \cup F^1(2) \cup \dots \cup F^1(n)$$

et $F^1(n)$ est de dimension $2n + 1$.
Par exemple si on va jusqu'à l'ordre 2, ce qui revient à limiter le développement de B_{xi} aux termes

dipolaires et quadripolaires, $F^1(2)$ est de dimension 5. On n'a donc que cinq fonctions indépendantes, qui sont par exemple les trois fonctions f_1^1, f_2^1, f_3^1 dues au moment dipolaire et les fonctions f_1^2, f_2^2, f_3^2 dues au moment quadripolaire.
Dans $F^1(n)$ les $2n + 1$ fonctions indépendantes forment une base et toute expressions de B_{xi} limitées à

l'ordre n est une combinaison linéaire des fonctions de base.
Si on note $|f_q\rangle$ ces fonctions de base on peut écrire $B_{xi} = \sum_{q=0}^{2n} K_{xi}^q |f_q\rangle$ $xi = x, y, z$.

Les $3(2n + 1)$ coefficients K_{xi}^q sont des combinaisons linéaires des coefficients $A_{xi}^{(n),j}$ du développement [8] donc des paramètres caractéristiques $P_i^{(n)}$ des moments jusqu'à l'ordre 2^n polaire de la source. Ainsi en se limitant à l'ordre quadripolaire on a 15 coefficients K_{xi}^q combinaisons des 8 paramètres caractéristiques (3 composantes du moment dipolaire + 5 composantes indépendantes du tenseur de moment quadripolaire). Ces 8 paramètres caractéristiques pourront être calculés si on peut déterminer les K_{xi}^q .
Il suffit de résoudre le système de 15 équations

$K_{xi}^q |f_q\rangle = 0$ -
Si on choisit les $|f_q\rangle$ de manière quelconque les expressions des K_{xi}^q en fonction des $P_i^{(n)}$ peuvent être très compliquées. On peut choisir, pour simplifier, les fonctions de base de manière qu'elles forment une base orthonormée permettant un calcul aisé des composantes du moment dipolaire. Soit $|q\rangle$ les fonctions de la base orthonormée. On a

$$\langle q | q' \rangle = \delta_{qq'} \quad \begin{cases} = 1 \text{ si } q = q' \\ = 0 \text{ si } q \neq q' \end{cases}$$

$$\text{et } B_{xi} = \sum_{q=0}^{2n} K_{xi}^q |q\rangle$$

Ainsi $\langle q | B_{xi} \rangle = K_{xi}^q$

Ou en utilisant le développement [8]

$$K_{xi}^q = \sum_{n=1}^q \sum_{j=0}^{n-1} \langle q | f_n^j \rangle \cdot A_{xi}^{(n),j}$$

En notant que les $A_{xi}^{(n),j}$ sont reliés d'une manière simple aux $M_{xi}^{(n)}$:

$$A_{xi}^{(1),0} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_{xi}^{(1)}}{d_0^3} \quad A_{xi}^{(2),0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3M_{xi}^{(2)}}{d_0^5} \quad A_{xi}^{(2),2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_{xi}^{(2)}}{d_0^5}$$

On choisit $|1\rangle$ telle que $\langle 1 | f_1^0 \rangle = \alpha$ et $\langle 1 | f_n^j \rangle = 0$ pour $n \neq 1$ $j \neq 0$
On aura dans ce cas $K_{xi}^1 = \alpha A_{xi}^{(1),0}$ ou $M_{xi}^{(1)} = \beta K_{xi}^1$
par exemple $M_z^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d_0^3}{\alpha} K_z^1$

La détermination de K_{xi}^q obtenue en faisant le calcul du produit scalaire de $|1\rangle$ avec le signal mesuré suivant la composante x_i permet ainsi de calculer $M_{xi}^{(n)}$ facilement.

Le calcul de $|1\rangle$ et de α se ramène à la résolution des équations $\langle 1 | f_1^0 \rangle = \alpha$, $\langle 1 | 1 \rangle = 1$

et $\langle 1 | f_n^j \rangle = 0$ pour $n \neq 1$ et $j \neq 0$

en choisissant $|1\rangle$ sous forme d'une combinaison linéaire des $2n + 1$ fonctions indépendantes

$$|1\rangle = \sum_{p=0}^{2n} a_{1,p} |f_p\rangle$$

Le calcul est facilité en notant que les fonctions paires et impaires f_p sont orthogonales.

On obtient ainsi : dans $F^1(1)$

$$|1\rangle^{(1)} = 4\sqrt{\frac{7}{2\pi}} \left(f_1^0 - \frac{1}{7} f_1^2 \right) = \frac{4}{\sqrt{14\pi}} \frac{7u^2 - 1}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{14}} \text{ et } M_z^{(1)} = -\frac{4\pi}{\mu_0} d_0^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{9}{\pi} \frac{7u^2 - 1}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}} B_z(u) du$$

dans $F^1(2)$

$$|1\rangle^{(2)} = \frac{4}{\sqrt{21\pi}} \left[21 f_1^0 + f_1^2 - 10 f_2^2 \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{21}}$$

et $M_z^{(2)} = -\frac{4\pi}{\mu_0} d_0^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{15}{\pi} \frac{21u^4 - 18u^2 + 1}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}} B_z(u) du$

dans $F^1(3)$

$$|1\rangle^{(3)} = \frac{4}{3\sqrt{77\pi}} \left[231 f_1^0 - 5 f_1^2 - 56 f_2^2 - 296 f_3^2 \right]$$

et $M_z^{(3)} = -\frac{4\pi}{\mu_0} d_0^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16}{3\pi} \frac{231u^6 - 495u^4 + 165u^2 - 5}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}} B_z(u) du$

Le calcul des autres fonctions de base est fastidieux mais sans difficultés réelles. A titre d'exemple dans $F^1(2)$ on a :

- $|1\rangle^{(2)} = \frac{4}{\sqrt{21\pi}} \frac{21u^4 - 18u^2 + 1}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}} \quad [9.1]$
- $|2\rangle^{(2)} = \frac{16}{\sqrt{70\pi}} \frac{5u - 7u^3}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}} \quad [9.2]$
- $|3\rangle^{(2)} = 9\sqrt{\frac{2}{21\pi}} \frac{1 - 3u^2}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}} \quad [9.3]$
- $|4\rangle^{(2)} = \frac{32}{\sqrt{35\pi}} \frac{u^3}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}} \quad [9.4]$
- $|5\rangle^{(2)} = \frac{32}{\sqrt{7\pi}} \frac{u^2}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}} \quad [9.5]$

4 - CALCUL DES PARAMETRES CARACTERISTIQUES DES MOMENTS DIPOLAIRE ET QUADRIPOLAIRE DE LA SOURCE A PARTIR DES SIGNAUX MESURES - (3) (7)

4.1 - Principe :
Si on admet que les termes d'ordre supérieur aux termes quadripolaires sont négligeables on peut écrire que le signal mesuré peut se mettre sous la forme

$$B_{xi} = \sum_{n=1}^2 \sum_{j=0}^{n-1} A_{xi}^{(n),j} f_n^j$$

Les $A_{xi}^{(n),j}$ étant des fonctions connues des paramètres caractéristiques de la source limitée à ses moments dipolaire et quadripolaire, $M_x^{(1)}, M_y^{(1)}, M_z^{(1)}, Q_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}, K_{xy}$ et K_{xz} .

On a aussi $B_{xi} = \sum_{q=1}^9 K_{xi}^q |f_q\rangle$

En prenant $|f_1\rangle = f_1^0, |f_2\rangle = f_1^2, |f_3\rangle = f_1^0$

$|f_4\rangle = f_2^0, |f_5\rangle = f_2^2$ on a entre les K_{xi}^q et les $A_{xi}^{(n),j}$

$$\left. \begin{aligned} K_{xi}^1 &= A_{xi}^{(1),0} \\ K_{xi}^2 &= A_{xi}^{(2),0} + A_{xi}^{(2),2} \\ K_{xi}^3 &= A_{xi}^{(1),0} + A_{xi}^{(2),0} \\ K_{xi}^4 &= A_{xi}^{(2),2} - A_{xi}^{(2),0} \\ K_{xi}^5 &= A_{xi}^{(2),2} - A_{xi}^{(2),0} \end{aligned} \right\} [10]$$

On a donc entre les K_{xi}^q et les paramètres M, Q

ESTIMATION DES PARAMETRES DE CIBLE EN DETECTION MAGNETIQUE
INFLUENCE DE LA PRECISION DES MESURES

et K des relations connues en nombre supérieur au nombre de paramètres.

Le problème est donc de déterminer les $k_{x_i}^q$ à partir des signaux mesurés B_{x_i} et de résoudre le système d'équation correspondant aux relations entre les $k_{x_i}^q$ et les M, Q et K. Il y a en fait deux méthodes pour déterminer les $k_{x_i}^q$.

4.2 - Détermination des $k_{x_i}^q$ par la méthode de projection sur une base orthonormée :

On a vu que si dans $\mathcal{P}^{(2)}$ on prend une base orthonormée $|q\rangle$, par exemple celle définie par les fonctions [9,1] à [9,5], on a

$$B_{x_i} = \sum_{q=0}^{2n} k_{x_i}^q |q\rangle$$

En comparant avec $B_{x_i} = \sum_{q=0}^{2n} k_{x_i}^q |q\rangle$ avec

les $|q\rangle$ du paragraphe précédent on a entre les $k_{x_i}^q$ et les $k_{x_i}^q$ les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} K_{x_i}^1 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{21}} k_{x_i}^1 \\ K_{x_i}^2 &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{7\pi}{10}} k_{x_i}^2 \\ K_{x_i}^3 &= \frac{1}{16} \left[\sqrt{42\pi} k_{x_i}^3 - \sqrt{2\pi} k_{x_i}^1 \right] \\ K_{x_i}^4 &= \frac{1}{8} \left[3\sqrt{\frac{\pi}{5}} k_{x_i}^2 + \frac{5}{4}\sqrt{\frac{\pi}{5}} k_{x_i}^4 \right] \\ K_{x_i}^5 &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi}{7}} \left[3 k_{x_i}^1 + 7 k_{x_i}^3 + \frac{7}{4} k_{x_i}^5 \right] \end{aligned} \right\} [11]$$

On calcule les $k_{x_i}^q$ en projetant les signaux mesurés sur les signaux de base, c'est-à-dire en calculant le produit scalaire des signaux mesurés avec les signaux de base $|q\rangle$. On a vu en effet que

$$k_{x_i}^q = \langle q | B_{x_i} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{x_i} |q\rangle du$$

On calcule ensuite les $k_{x_i}^q$ à partir des relations [11]

4.3 - Détermination des $k_{x_i}^q$ par la méthode des moindres carrés :

Pour chaque valeur de la coordonnée y on a une valeur de u et une valeur de B_{x_i} . Supposons que l'on ait $2N + 1$ points de mesures répartis entre $-y_0$ et $+y_0$ avec un pas $\Delta y = \frac{y_0}{N}$. Soit y_j la coordonnée d'un

point auquel correspond u_j et $B_{x_i}(u_j)$. On peut considérer que le signal mesuré est un vecteur colonne (B_{x_i}) à $2N + 1$ éléments. A chaque valeur u_j correspond une valeur $f_q(u_j)$ des $|q\rangle$ et on peut mettre la relation

2n
 $B_{x_i} = \sum_{q=0}^{2n} k_{x_i}^q |q\rangle$

sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} B_{x_i}(u_1) \\ B_{x_i}(u_2) \\ \vdots \\ B_{x_i}(u_{2N+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(u_1) f_1(u_1) \dots f_4(u_1) \\ f_0(u_2) f_1(u_2) \dots \\ \vdots \\ f_0(u_{2N+1}) \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{x_i}^0 \\ k_{x_i}^1 \\ \vdots \\ k_{x_i}^4 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} B_{x_i}(u_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_q(u_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{x_i}^q \end{bmatrix}$$

Pour calculer les $k_{x_i}^q$ on peut résoudre le système ci-dessus par la méthode des moindres carrés.

4.4 - Comparaison des méthodes de détermination des paramètres caractéristiques :

Dans le but d'évaluer les méthodes et d'estimer les précisions de calcul, de nombreux tests ont été effectués à l'aide d'un programme de simulation sur ordinateur. Ce programme permet de générer des signaux magnétiques, correspondant à une source de composition connue (source dipolaire, dipolaire + quadripolaire, dipolaire + quadripolaire + octopolaire, ou multipolaire). A partir de ces signaux, sur lesquels on peut éventuellement ajouter un bruit blanc centré d'écart quadratique donné, on peut calculer les $k_{x_i}^q$ et les com-

posantes des moments dipolaire et quadripolaire de la source.

A la suite de ces tests notre choix de la méthode de calcul des $k_{x_i}^q$ s'est porté sur la méthode des moindres

carrés pour les raisons suivantes :

a) la méthode des projections est une méthode globale qui nécessite des signaux magnétiques mesurés entre $-y_0$ et $+y_0$ avec y_0 suffisamment grand pour ne pas avoir

trop d'erreur. En effet au lieu de calculer

$$k_{x_i}^q = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{x_i} |q\rangle du$$

on calcule une valeur approchée de $k_{x_i}^q$

$$\tilde{k}_{x_i}^q = \int_{-y_0}^{+y_0} B_{x_i}(u) |q\rangle du$$

Si on veut une estime raisonnable de $k_{x_i}^q$ on constate

qu'il faut $y_0 = 6 d_0$ pour avoir une précision de calcul de $k_{x_i}^q$ meilleure que 10^{-2} , quand on traite des signaux

d'origine dipolaire et quadripolaire. Avec des signaux d'origine dipolaire quadripolaire et octopolaire il faut $y = 8 d_0$. On a rarement, dans les conditions courantes de mesure, des signaux exploitables sur d'aussi grandes distances.

b) la méthode des projections nécessite deux étapes de calcul pour obtenir les $k_{x_i}^q$. Il faut d'abord calculer

les $k_{x_i}^q$ puis à l'aide du système [11] calculer les

$$K_{x_i}^q$$



ESTIMATION DES PARAMETRES DE CIBLE EN DETECTION MAGNETIQUE
INFLUENCE DE LA PRECISION DES MESURES

Si les valeurs calculées des $k_{x_i}^q$ sont entachées d'erreurs on risque d'avoir une mauvaise précision sur le calcul des $K_{x_i}^q$.

c) la méthode des moindres carrés peut s'étendre facilement au cas où on s'intéresse à des signaux provenant de moment multipolaire d'ordre élevé. Il n'y a en effet pas de difficulté à trouver les fonctions f_q correspondantes. Par contre les calculs extrêmement

laborieux pour calculer les bases orthonormées dans les espaces \mathcal{H}^n pour $n > 3$ interdisent pratiquement l'utilisation de la méthode des projections. On a donc pour la suite choisi la méthode des moindres carrés pour le calcul des $k_{x_i}^q$. Il faut cependant noter

que la méthode des projections peut conserver son intérêt dans certains cas particuliers :

- mesurées spéciales permettant d'avoir des signaux exploitables sur de grandes distances,
- cas où on ne désire déterminer que les composantes du moment dipolaire. Dans ce cas l'utilisation de la formule

$$M_{x_i} = \beta_{x_i} < a / B_{x_i} >$$

du paragraphe 3.2 peut être très utile.

5 - INFLUENCE DES ERREURS DE POSITIONNEMENT RELATIF CAPTEURS DE MESURE-OBJET ET DU BRUIT DES CAPTEURS SUR LA DETERMINATION DES PARAMETRES CARACTERISTIQUES - (7)

Le programme de simulation du paragraphe précédent a été modifié pour permettre d'introduire en plus du bruit sur les signaux, des erreurs de positionnement des capteurs et de l'objet. Les capteurs sont supposés fixes, et leurs positions connues avec une cer-

taine précision en x et y.

Le bruit des capteurs (magnétomètres directifs) est simulé par un bruit blanc gaussien à large bande avec σ variant de 0,1 à 1 nT efficaces (1 nT = 10⁻⁸ Tesla), valeurs couramment admises pour ce type de capteurs.

Les erreurs de positionnement, supposées gaussiennes, sont données en fonction de d_0 et prises dans une gamme allant de 1 % à 10 % de d_0 avec $\sigma_x = \sigma_y$ et $\sigma_z = \frac{3}{4} \sigma_x$.

La source considérée comporte un moment dipolaire (dipole \vec{M} centré à l'origine) et un moment quadripolaire (deux dipôles \vec{p} anticparallèles, de même module p , placés symétriquement par rapport à l'origine à une distance δ de celle-ci).

Le module de \vec{M} est choisi pour donner un champ magnétique d'environ 100 nT à la distance d_0 . On a pris d'autre part $p = 0,4 M$ et $\delta = 0,08 d_0$.

L'étude a été faite pour différentes orientations de \vec{M} , différentes orientations et positions de \vec{p} , différentes valeurs de d_0 ; différentes valeurs efficaces

de bruit et différentes erreurs de positionnement. Pour chaque cas on a fait une étude statistique sur environ 50 résultats.

Une synthèse des résultats obtenus est présentée dans le tableau 1. Dans ce tableau on donne, pour chaque composante des moments dipolaire et quadripolaire, l'écart relatif entre la moyenne des valeurs calculées et la valeur réelle (noté m dans le tableau) et l'écart quadratique moyen (noté σ dans le tableau) des valeurs calculées rapporté à la valeur réelle, pour différentes valeurs de l'écart quadratique de bruit σ_B et dif-

férentes valeurs des erreurs de positionnement (en ne donnant que σ_x puisque $\sigma_y = \sigma_x$ et $\sigma_z = \frac{3}{4} \sigma_x$). On peut considérer que m est représentatif du biais et σ de la dispersion des résultats.

Conditions		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
		$\sigma_B = 0$	$\sigma_B = 0,1 nT$	$\sigma_B = 0,8 nT$	$\sigma_B = 1 nT$	$\sigma_B = 0$	$\sigma_B = 0$	$\sigma_B = 0$	$\sigma_B = 0,1$
Composantes		$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$	$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$	$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$	$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$	$\sigma_x = 2 \cdot 10^{-2} d_0$	$\sigma_x = 4 \cdot 10^{-2} d_0$	$\sigma_x = 10^{-1} d_0$	$\sigma_x = 2 \cdot 10^{-2} d_0$
Mx	m	< 10 ⁻³	0,02	0,11	0,22	0,007	0,006	0,004	0,015
	σ		0,08	0,41	0,82	0,008	0,016	0,045	0,08
My	m	< 10 ⁻³	0,01	0,03	0,06	0,007	0,006	0,003	0,013
	σ		0,02	0,10	0,20	0,007	0,017	0,047	0,02
Mz	m	< 10 ⁻³	0,004	0,02	0,04	0,007	0,006	0,003	0,003
	σ		0,017	0,08	0,16	0,007	0,017	0,043	0,02
Qxy	m	< 10 ⁻³	0,12	0,70	1,39	0,03	0,10	0,35	0,166
	σ		0,59	3,07	6,14	0,34	0,70	1,88	0,69
Qyz	m	< 10 ⁻³	0,001	0,01	0,01	0,009	0,008	0,007	0,012
	σ		0,02	0,10	0,20	0,02	0,04	0,096	0,02
Qxz	m	~ 0,056	0,03	0,09	0,25	0,03	0,009	0,243	0,004
	σ		0,10	0,48	0,95	0,11	0,20	0,55	0,012
Kxy	m	~ 0,26	0,26	0,22	0,17	0,21	0,14	0,76	0,20
	σ		0,05	0,25	0,50	0,40	0,82	2,62	0,41
Kxz	m	~ 0,013	0,02	0,03	0,23	0,002	0,009	0,071	0,005
	σ		0,03	0,15	0,30	0,12	0,18	0,43	0,09

TABLEAU 1

$m = \frac{\text{moyenne des valeurs calculées} - \text{valeur théorique}}{\text{valeur théorique}}$ $\sigma = \frac{\text{écart quadratique des valeurs calculées}}{\text{valeur théorique}}$



ESTIMATION DES PARAMETRES DE CIBLE EN DETECTION MAGNETIQUE
INFLUENCE DE LA PRECISION DES MESURES

On trouve dans le tableau 1 :

- dans la colonne 1 les résultats obtenus sans erreurs de positionnement et sans bruit de mesure. m représente donc l'erreur relative introduite par le calcul sur la valeur des composantes du moment.
- dans les colonnes 2, 3 et 4 les résultats obtenus en fonction du bruit des capteurs.
- dans les colonnes 5, 6 et 7 les résultats obtenus en fonction des erreurs de positionnement des capteurs.
- dans la colonne 8 les résultats correspondant à un cas classique de mesure.
On peut observer que les résultats sont beaucoup plus sensibles au bruit des capteurs qu'aux erreurs de positionnement.

6 - CONCLUSIONS - (8)

L'étude abordée ici n'est pas terminée et l'application des méthodes que nous avons indiquées à des cas de mesures réelles n'a pas encore été complètement essayée. Le modèle de simulation pour tester l'influence des erreurs de données a été très utile pour choisir les conditions de mesures qui seront adoptées par la suite. A la place de l'étude en simulation une étude plus exhaustive aurait pu être faite en utilisant des techniques générales d'analyse de systèmes linéaires avec erreurs sur les données. Une telle analyse ne nous a pas paru nécessaire au stade actuel de l'étude.

7 - BIBLIOGRAPHIE -

- [1] G. BONNET
Considérations sur la représentation et l'analyse harmonique des signaux déterministes ou aléatoires.
Annales des Télécommunications
T.23 N° 3-4 Mars-Avril 1968
- [2] E.P. LOANE
Speed and Depth Effects in Magnetic Anomaly Detection
EPL Analysis Memorandum 12 Octobre 1976
- [3] G. PRETET
Détermination des aimantations principales d'un sous-marin à partir des signatures
Rapport GESMA 986 Novembre 1976
- [4] G. PRETET
Développement multipolaire du champ magnétique d'un sous-marin.
Rapport GESMA 990 Janvier 1977
- [5] JPR LE TOUZEY
Estimation de la position, de l'immersion de la vitesse et du cap d'une cible sous-marine
Tomes I à IX Documents CROUZET
1976-1979
- [6] R. BLANPAIN
Traitement en temps réel du signal visé d'une sonde magnétométrique pour la détection d'anomalies magnétiques.
Thèse Ingénieur Docteur GRENOBLE
Octobre 1979
- [7] G. PRETET
Méthode de détermination du moment magnétique dipolaire équivalent d'un sous-marin à partir des signaux magnétiques comportant des termes d'ordres quelconques.
Rapport GESMA Juin 1980
- [8] A. TARANTOLA
Une méthode générale de résolution des problèmes inverses linéaires.
C.R. Académie des Sciences PARIS
T. 290 (14 janvier 1980)

