

HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

171



NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

APPROXIMATION DE LA PROBABILITE D'ERREUR DES RECEPTEURS A
TRAITEMENT QUADRATIQUE
ERROR PROBABILITY APPROXIMATION FOR A QUADRATIC RECEIVER

Georges TZIRITAS

CEPHAG BP 46 - 38420 St-MARTIN d'HERES
Equipe de recherche associée au CNRS (ERA 93)

RESUME

Dans cet article nous donnons de nouvelles approximations de la probabilité d'erreur du récepteur optimal après traversée d'un canal aléatoire et dispersif. Nous envisageons le problème de la détection simple et celui de la communication binaire symétrique. Dans le premier cas, la probabilité d'erreur est approchée à l'aide d'une fonction gamma incomplète. Dans le deuxième cas, elle est approchée à l'aide d'une fonction hypergéométrique.

Nous établissons une relation directe entre la probabilité d'erreur et la fonction d'ambiguïté du signal émis. Ceci permet d'aborder d'une nouvelle façon le problème de la conception des signaux à transmettre dans un canal aléatoire et dispersif. Nous donnons la condition de l'optimisation de la forme du signal à émettre et deux exemples d'applications pour illustrer cette méthode de conception des signaux.

SUMMARY

In this paper new approximations for the error probability of the optimal receiver after a randomly dispersive channel are given. The problem of simple detection and of binary symmetric communication is considered. For the first case, an approximate expression of the error probability is given in terms of the incomplete gamma function. For the second case the error probability is given in terms of the hypergeometric function.

A direct relation between the error probability and the transmitted signal ambiguity function is established. This allows a new approach to the problem of signal design for randomly dispersive channels. The optimization condition for the signal's form is given, and two examples of applications which explain this method of signal design are considered.



APPROXIMATION DE LA PROBABILITE D'ERREUR DES RECEPTEURS
A TRAITEMENT QUADRATIQUE
ERROR PROBABILITY APPROXIMATION FOR A QUADRATIC RECEIVER

1-INTRODUCTION

Il est bien connu que, pour la détection ou la classification des signaux aléatoires, on procède à un traitement quadratique [1]. Donc après traversée d'un canal aléatoire, les récepteurs réalisent une statistique qui est une fonctionnelle quadratique du signal reçu et la comparent à un seuil prédéterminé. Le signal reçu étant considéré comme une réalisation d'un processus aléatoire, le dispositif de la réception peut être caractérisé, du point de vue de ses performances, par la probabilité de fausse décision. En général, l'évaluation de cette probabilité d'erreur est extrêmement difficile à cause du traitement quadratique, même pour le cas des signaux gaussiens. Une méthode d'approximation est donnée par L. COLLINS [2]. Mais elle nécessite d'énormes calculs et relie la probabilité d'erreur aux paramètres du signal à la sortie du canal et non à ceux du signal émis.

Dans cet article nous proposons une nouvelle approximation de la probabilité d'erreur, en approchant la densité de probabilité par la loi gamma. Nous avons pu ainsi relier les performances du récepteur en fonction des paramètres dépendant du signal émis et du canal de transmission

La description du modèle de transmission et de la structure du récepteur sont donnés au deuxième paragraphe. Au paragraphe 3, nous présentons les expressions de la probabilité d'erreur du récepteur optimal après traversée d'un canal aléatoire, pour le cas de la détection simple et de la communication binaire symétrique.

Les expressions données permettent d'aborder le problème de la conception des signaux à transmettre pour mieux utiliser le canal, puisqu'elles relient les performances aux propriétés du signal émis et précisément à sa fonction d'ambiguïté en translation. Ceci fait l'objet du quatrième paragraphe. Au dernier paragraphe, nous donnons deux exemples d'application pour la conception des signaux à transmettre.

2 -MODELE DE TRANSMISSION ET STRUCTURE DU RECEPTEUR OPTIMAL

On s'intéresse à la structure et aux performances d'un dispositif de réception après traversée d'un canal aléatoire et dispersif. Ce type de canal décrit les phénomènes de propagation d'ondes dans un milieu de transmission fluctuant au cours du temps, de façon aléatoire. Tel est le cas des transmissions troposphériques, ionosphériques, détection radar ou sonar, transmissions d'ondes acoustiques dans un milieu turbulent (comme l'air ou la mer).

On s'intéresse à l'action du canal sur le signal émis. On considère donc le canal comme un opérateur agissant sur les signaux à son entrée, et donc comme un système à une entrée et une sortie. Ce système, qui, en général, est linéaire et non homogène, se caractérise par sa réponse impulsionnelle $H(t, u)$ (fig.1).

On utilise une écriture en amplitudes complexes des signaux, car ces derniers sont à bande étroite autour de la fréquence porteuse.

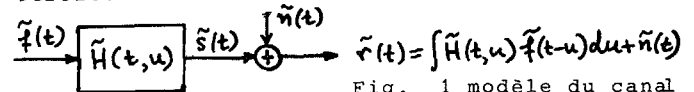


Fig. 1 modèle du canal
Pour exprimer le phénomène de fluctuations aléatoires, on considère que la réponse impulsionnelle du canal est une réalisation d'un processus aléatoire [3]. Donc pour décrire le canal, on utilise, soit les densités de probabilité (d.d.p.) de ce processus, soit on se contente des moments au premier et deuxième ordre. On fait souvent l'hypothèse que le processus est gaussien. Dans ce cas une description statistique au deuxième ordre est suffisante. On suppose aussi que la moyenne du processus est nulle, hypothèse qui est vérifiée en pratique pour certaines transmissions (par ex. ionosphérique, troposphérique sans visibilité directe, en acoustique sous-marine[4]). On fait encore l'hypothèse que le milieu est stationnaire au sens large et qu'il est composé de diffuseurs non corrélés (milieu WSSUS). Un tel milieu se caractérise par une fonction de diffusion, qui exprime la dispersion en retard et l'élargissement fréquentiel de l'énergie du signal émis.

Le signal à la sortie du canal est aléatoire et gaussien, si le canal est gaussien. La covariance de ce signal est donnée par :

$$\tilde{K}_{\xi}(t, u) = \iint \tilde{f}(t-\xi) \tilde{S}(\nu, \xi) \tilde{f}^*(u-\xi) e^{j2\pi\nu(t-u)} d\nu d\xi \quad (1)$$

où $\tilde{S}(\nu, \xi)$ est la fonction de diffusion du canal. Alors le problème de détection et de classification des signaux résultant de la transmission d'un signal certain dans un canal aléatoire, amène à la détection et la classification des signaux aléatoires perturbés additivement par un bruit, qui est supposé blanc pour faciliter les calculs.

Les deux types de problème qu'on va envisager sont la détection simple et la communication binaire symétrique. Dans le premier cas il s'agit de tester l'hypothèse de présence d'un signal aléatoire dans un bruit blanc.

$$\begin{aligned} H_1: \tilde{r}(t) &= \tilde{s}(t) + \tilde{n}(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ H_0: \tilde{r}(t) &= \tilde{n}(t), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (2)$$

Dans le deuxième cas, il s'agit de la classification entre deux signaux aléatoires, qui ont les mêmes valeurs propres et des fonctions propres disjointes.

$$\begin{aligned} H_1: \tilde{r}(t) &= \tilde{S}_1(t) + \tilde{n}(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ H_0: \tilde{r}(t) &= \tilde{S}_0(t) + \tilde{n}(t), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (3)$$

Nous supposons que les signaux en question sont gaussiens, de moyenne nulle. Il en est de même pour le bruit additif. En utilisant le critère de maximum de vraisemblance, on obtient une certaine statistique suffisante, pour tester les hypothèses ci-dessus.

Dans le cas de la détection simple, le test réalisé, par le récepteur optimal, consiste à comparer la statistique l au seuil γ

APPROXIMATION DE LA PROBABILITE D'ERREUR DES RECEPTEURS A
 TRAITEMENT QUADRATIQUE
 ERROR PROBABILITY APPROXIMATION FOR A QUADRATIC RECEIVER

$$l = \frac{1}{N_0} \int_0^T \tilde{r}^*(t) \tilde{h}(t, u) \tilde{r}(u) dt du \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\lambda_i}{N_0} \right) \quad (4)$$

où λ_i sont les valeurs propres de la covariance du signal à la sortie du canal et N_0 l'énergie du bruit blanc. Le récepteur optimal comprend un filtre-estimateur du signal à la sortie du canal à partir du signal observé et un corrélateur (fig.2)

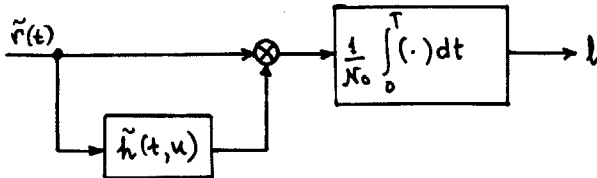


Fig. 2 Le récepteur optimal

La réponse impulsionnelle $\tilde{h}(t, u)$ du filtre-estimateur est solution d'une équation intégrale de Wiener

$$N_0 \tilde{h}(t, u) + \int_0^T \tilde{h}(t, z) \tilde{K}_r(z, u) dz = \tilde{K}_r(t, u); \quad 0 \leq t, u \leq T \quad (5)$$

Notre but est d'approcher la probabilité d'erreur. En général on utilise les probabilités de détection P_D et de fausse alarme P_F

$$P_D = \int_{\gamma}^{\infty} p_{e|H_1}(x) dx, \quad P_F = \int_{\gamma}^{\infty} p_{e|H_0}(x) dx \quad (6)$$

où $p_{e|H_i}(\cdot)$ ($i=0,1$) est la d.d.p. de la statistique l sous l'hypothèse H_i ($i=0,1$). Nous voulons approcher ces probabilités sans résoudre l'équation intégrale (5) pour $\tilde{h}(t, u)$. Pour y parvenir, nous étudions certaines propriétés de la statistique l , qui est fonctionnelle quadratique d'un processus gaussien. Ces propriétés portent sur les moments du premier et du deuxième ordre de l . Nous donnons ci-après ces moments :

$$\left. \begin{aligned} E\{l|H_1\} &= \frac{\bar{E}r}{N_0} \\ \text{var}\{l|H_1\} &= \frac{1}{N_0^2} \int_0^T \int_0^T |\tilde{K}_r(t, u)|^2 dt du \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} E\{l|H_0\} &= \int_0^T \tilde{h}(t, t) dt \\ \text{var}\{l|H_0\} &= \int_0^T \int_0^T |\tilde{h}(t, u)|^2 dt du \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Les démonstrations des propriétés ci-dessus est donnée dans [5].

Propriété 1 : la moyenne et la variance de la statistique l sous l'hypothèse H_1 sont supérieures aux quantités respectives sous l'hypothèse H_0 .

Propriété 2 : le seuil γ est compris entre les valeurs moyennes sous les deux hypothèses

Propriété 3 : la variance de la statistique l est inférieure au carré de sa moyenne, sous les deux hypothèses.

L'expression du seuil γ dans (4) nécessite la connaissance des valeurs propres λ_i . Etant donné qu'il est extrêmement difficile de les obtenir, nous cherchons une autre expression du seuil. Ceci fait l'objet de la propriété suivante.

Propriété 4 : le seuil γ s'exprime à l'aide de la fonction génératrice des moments de la statistique l , sous les deux hypothèses

$$\gamma = -\ln \phi_{e|H_1}(-1) = -\ln E\{e^l | H_1\} \quad (9)$$

$$\gamma = \ln \phi_{e|H_0}(1) = \ln E\{e^l | H_0\}$$

Les moments de la statistique l sous l'hypothèse H_i sont exprimés en fonction de $\tilde{h}(t, u)$ (8). Or notre but est de chiffrer les performances sans résoudre l'équation (5). Pour y arriver nous exprimons les moments en question comme dérivées du seuil γ par rapport au niveau du bruit N_0 .

Propriété 5 : la moyenne de l sous l'hypothèse H_1 s'exprime à l'aide de la dérivée première du seuil γ par rapport à N_0

$$E\{l|H_0\} = -N_0 \frac{d\gamma}{dN_0} \quad (10)$$

Propriété 6 : la variance de la statistique l sous l'hypothèse H_0 s'exprime à l'aide de deux premières dérivées du seuil γ par rapport à N_0 .

$$\text{var}\{l|H_0\} = -\frac{d}{dN_0} \left(N_0^2 \frac{d\gamma}{dN_0} \right) \quad (11)$$

Dans le cas de la communication binaire symétrique, le récepteur optimal compare deux statistiques l_1 et l_0 , du type fonctionnelle quadratique d'un processus aléatoire. Ces deux statistiques sont indépendantes, à cause de la symétrie.

Une autre conséquence de la symétrie est que les probabilités d'erreur sous les deux hypothèses sont les mêmes.

$$Pr\{E\} = Pr\{E|H_1\} = Pr\{E|H_0\}$$

$$Pr\{E\} = \int \int_{l_1 < \gamma, l_0 > \gamma} p_{e|H_1}(x) p_{e|H_0}(y) dx dy \quad (12)$$

Des propriétés identiques à celles établies pour la détection simple peuvent être obtenues pour les moments de l_1 et l_0 sous l'hypothèse H_1 . Il suffit de remplacer les moments de l sous H_0 (sous H_1) pour la détection simple, pour les moments de l_1 (de l_0) sous H_1 pour la communication binaire symétrique.

Ayant étudié les propriétés des statistiques à tester, nous pouvons envisager des approximations de la densité de probabilité de ces statistiques et de la probabilité d'erreur.

3-APPROXIMATION DE LA PROBABILITE D'ERREUR

Nous savons que la somme des modules carrés de variables aléatoires (v.a.) complexes gaussiennes et indépendantes, de moyenne nulle et de variance identique suit la loi gamma, ayant comme paramètres le nombre de v.a. et la variance commune. On peut obtenir une forme de somme de v.a. complexes gaussiennes pour la statistique l .



Mais cette somme comporte un nombre infini de v.a., qui n'ont pas la même variance. Cette remarque indique qu'on peut penser approcher la d.d.p. de la statistique l par la loi gamma, en utilisant deux paramètres : un correspondant au nombre effectif de v.a. et un correspondant à la variance "moyenne" de ces v.a.. Nous donnons cette approximation pour les deux types de problèmes présentés au paragraphe précédent.

3-1 Détection simple

Pour la détection simple nous avons effectivement deux d.d.p. à approcher, celles de l conditionné aux deux hypothèses. Nous proposons l'approximation suivante

$$P_{l|H_i}(x) = \begin{cases} \frac{x^{a_i} e^{-x/b_i}}{b_i^{a_i+1} \Gamma(a_i+1)} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad i=0,1 \quad (13)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma et a_i, b_i ($i=0,1$) sont les paramètres introduits. Vu l'expression de la d.d.p., on peut interpréter a_i+1 comme le nombre (non entier) effectif de v.a. indépendantes de variance "moyenne" b_i . Nous allons revenir sur cette interprétation des paramètres. Pour les définir, nous imposons la condition d'égalité de moments du premier et du deuxième ordre de l avec celles qu'on obtient en utilisant la d.d.p. approchée. Cette condition conduit à l'expression des paramètres de l'approximation à l'aide des moments de la statistique l

$$a_i+1 = \frac{(E\{l|H_i\})^2}{\text{var}\{l|H_i\}} \quad i=0,1 \quad (14)$$

$$b_i = \frac{\text{var}\{l|H_i\}}{E\{l|H_i\}}$$

On approche ainsi la probabilité de détection P_D et de fausse alarme P_F à l'aide d'une fonction gamma incomplète $I_\Gamma(\cdot, \cdot)$ forme de Pearson [6]

$$P_D \approx 1 - I_\Gamma\left(\frac{\gamma}{b_1 \sqrt{a_1+1}}, a_1\right) \quad (15)$$

$$P_F \approx 1 - I_\Gamma\left(\frac{\gamma}{b_0 \sqrt{a_0+1}}, a_0\right)$$

En vertu de la propriété 4 et en utilisant l'approximation de la d.d.p. de l sous l'hypothèse H_1 nous exprimons γ en fonction de a_1 et b_1 :

$$\gamma = (a_1+1) \ln(1+b_1) \quad (16)$$

En utilisant les propriétés 5 et 6 et γ comme en (16), nous pouvons exprimer les moments de l sous H_0 en fonction de a_1 et b_1

$$E\{l|H_0\} = (a_1+1) \frac{b_1}{1+b_1} \quad (17)$$

$$\text{var}\{l|H_0\} = (a_1+1) \frac{b_1^2}{(1+b_1)^2}$$

Nous constatons que les propriétés 1, 2 et 3 sont respectées. Il nous reste à exprimer

a_0 et b_0 en fonction de a_1 et b_1 . On obtient

$$a_0 = a_1$$

$$b_0 = \frac{b_1}{1+b_1}$$

Finalement les probabilités P_D, P_F sont approchées par

$$P_D \approx 1 - I_\Gamma\left(\sqrt{a_1+1} \frac{\ln(1+b_1)}{b_1}, a_1\right)$$

$$P_F \approx 1 - I_\Gamma\left(\sqrt{a_1+1} \frac{(1+b_1) \ln(1+b_1)}{b_1}, a_1\right) \quad (19)$$

Nous complétons notre étude en donnant l'expression des moments de l, qui définissent en (14) les paramètres a_1 et b_1 , à l'aide des fonctions caractérisant le canal et le signal émis ; la moyenne d'après (7) est égale au rapport signal sur bruit (r.s.b.) à la réception. Pour la variance nous rapportons (1) dans (7) et nous obtenons :

$$\text{var}\{l|H_1\} = \left(\frac{E_r}{N_0}\right)^2 \iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(t, \xi) \tilde{S}(v, \zeta) |\tilde{\Theta}_T(\xi-\zeta, t-v)|^2 d\xi d\zeta dt dv \quad (20)$$

où $\tilde{\Theta}_T(\dots)$ est la fonction d'ambiguïté en translation de l'amplitude complexe du signal émis, définie par

$$\tilde{\Theta}_T(\tau, \nu) = \frac{1}{E_t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) \tilde{f}^*(t-\tau) e^{j2\pi\nu t} dt \quad (21)$$

où E_t est l'énergie du signal $\tilde{f}(t)$. En plus la fonction de diffusion du canal est normalisée, i.e.

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(t, \xi) d\xi dt = 1$$

Ainsi nous avons obtenu une relation directe entre les performances du récepteur (19) et la fonction d'ambiguïté du signal émis (20).

Nous rappelons ici, après l'expression de paramètres a_1 et b_1 à l'aide des fonctions caractérisant le signal émis et le canal, que a_1+1 peut être interprété comme "nombre effectif de chemins de diversité" et b_1 comme "le rapport signal sur bruit par chemin". Par ailleurs [7], le paramètre a_1+1 est utilisé de la même façon que la "diversité effective" ou implicite de la transmission.

3-2 Communication binaire symétrique

Pour la communication binaire symétrique, nous avons à comparer les deux variables aléatoires l_1 et l_0 , qui sont indépendantes, à cause de la symétrie. Elles ont la même forme de fonctionnelle quadratique d'un processus gaussien et peuvent être approchés de façon identique à celle présentée pour la détection simple, compte-tenu aussi de la remarque à la fin du deuxième paragraphe. Nous avons donc

$$P_{l_i|H_i}(x) = \begin{cases} \frac{x^{a_i} e^{-x/b_i}}{b_i^{a_i+1} \Gamma(a_i+1)} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad i=0,1 \quad (22)$$



APPROXIMATION DE LA PROBABILITE D'ERREUR DES RECEPTEURS
A TRAITEMENT QUADRATIQUE
ERROR PROBABILITY APPROXIMATION FOR A QUADRATIC RECEIVER

L'interprétation des paramètres a_i et b_i est identique à celle pour la détection simple. En suivant la même procédure nous exprimons ces paramètres en fonction des moments du premier et deuxième ordre de la v.a. l_1 sous l'hypothèse H_1 . Ayant approché les d.d.p de l_1 et l_2 , nous pouvons évaluer la probabilité d'erreur approchée. Cette probabilité donnée dans (12) s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique ${}_2F_1(a, b, c; x)$ comme suivant

$$P_r\{\varepsilon\} = \frac{\Gamma(2a_1+2)}{\Gamma(a_1+1)\Gamma(a_1+2)} \left(\frac{1+b_1}{2+b_1}\right)^{a_1+1} {}_2F_1\left(2a_1+2, 1, a_1+2; \frac{1}{2+b_1}\right) \quad (23)$$

Si le paramètre a_1 est un nombre entier ($a_1 = m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) la fonction hypergéométrique prend la forme d'un polynôme d'ordre m . Sous cette condition, la probabilité d'erreur est

$$P_r\{\varepsilon\} = \left(\frac{1}{2+b_1}\right)^{m+1} \sum_{n=0}^m \binom{m+n}{n} \left(\frac{1+b_1}{2+b_1}\right)^n \quad (24)$$

Cette expression de probabilité d'erreur est connue pour les systèmes de communications utilisant le principe de diversité et pour des signaux orthogonaux à l'émission, ce qui correspond à la "symétrie" [8]. Cette constatation apporte une autre confirmation de l'interprétation donnée aux paramètres a_1+1 et b_1 .

Ayant établi une relation directe entre les performances du récepteur et la fonction d'ambiguïté du signal émis, nous pouvons envisager le problème de la conception des signaux à transmettre. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

4-CONCEPTION DES SIGNAUX A TRANSMETTRE

Nous avons donné la statistique suffisante pour la transmission dans un canal aléatoire et dispersif, et nous avons évalué ses performances. Ainsi la réception est optimale, suivant le critère de maximum de vraisemblance, mais ses performances dépendent de l'émetteur, i.e. de l'énergie émise et en général de la forme du signal émis. Pour l'optimisation de l'ensemble du système de transmission, on doit concevoir des signaux à l'émission qui minimisent la probabilité d'erreur. En principe, on fixe le rapport signal sur bruit à la réception et on cherche la forme optimale du signal émis, sachant que celui-ci a une durée finie. Les réponses apportées jusqu'à présent à ce problème font intervenir les propriétés du signal à la sortie du canal, et précisément les valeurs propres de sa covariance [7,9]. Or, il n'existe aucune méthode permettant d'obtenir un ensemble de valeurs propres désirées en agissant sur l'entrée du canal. Donc les méthodes connues sont pratiquement inexploitable. D'autre part rien n'assure que l'optimum établi existe, autrement dit qu'on peut l'atteindre.

L'importance des approximations proposées est qu'elles établissent une relation directe entre la probabilité d'erreur et la fonction d'ambiguïté en translation du signal émis.

Donc elles permettent d'envisager le problème de la conception des signaux à transmettre d'une nouvelle façon.

Nous considérons deux types de transmission : celle de la détection simple (ASK) et la transmission FSK, qui est pratiquement un cas particulier de communication binaire symétrique. Dans ce dernier cas, on émet sous les deux hypothèses des signaux de même amplitude complexe, mais suffisamment séparés en fréquence, de façon qu'on puisse considérer que les covariances des signaux à la sortie du signal ont des fonctions propres essentiellement disjointes. Celle-ci est la condition de symétrie pour la communication binaire.

Les moments du premier et du deuxième ordre de la statistique l pour la détection simple sont données en (7) et (20). Il en est de même pour les moments de la statistique l_1 sous l'hypothèse H_1 pour la transmission FSK.

Donc, pour un r.s.b. à la réception fixé, la moyenne est fixée, et il reste un seul paramètre influançant la probabilité d'erreur, qui est la variance de la statistique l (l_1) sous l'hypothèse H_1 , pour la transmission ASK (FSK). Nous avons étudié l'évolution de la probabilité d'erreur en fonction du paramètre b_1 (14), tant pour la détection simple que pour la communication binaire symétrique. Cette étude montre que pour un rapport signal sur bruit à la réception fixé, il existe une valeur de b_1 qui minimise la probabilité d'erreur. Nous donnons dans les fig: 3 et 5 l'évolution de b_1 optimum en fonction de r.s.b. à la réception (de 0 à 20 db), pour la détection simple (fig. 3) et pour la communication binaire symétrique (fig. 5). On constate que le rapport optimal signal sur bruit par chemin de diversité se stabilise vers 3,5 pour la détection et vers 3 pour la communication binaire symétrique, pour les fortes r.s.b. à la réception. Nous donnons aussi la probabilité d'erreur minimale, résultant pour un b_1 optimum, pour les deux cas de détection simple (fig. 4) et de communication binaire symétrique (fig. 6).

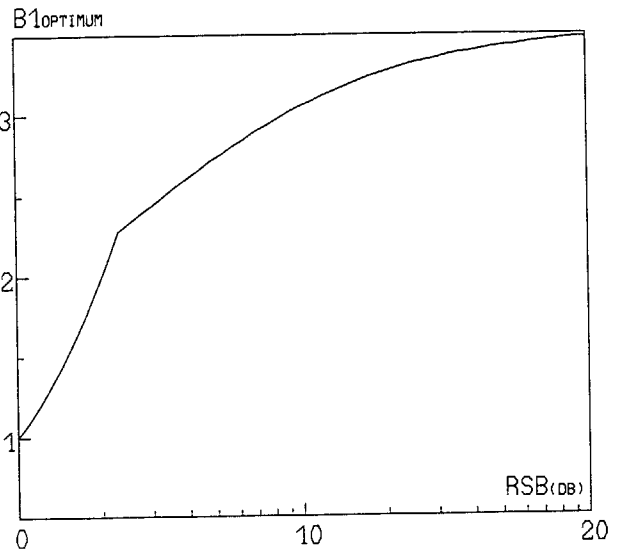


Fig. 3 Rapport signal sur bruit par chemin de diversité optimal, pour la détection simple



APPROXIMATION DE LA PROBABILITE D'ERREUR DES RECEPTEURS
A TRAITEMENT QUADRATIQUE
ERROR PROBABILITY APPROXIMATION FOR A QUADRATIC RECEIVER

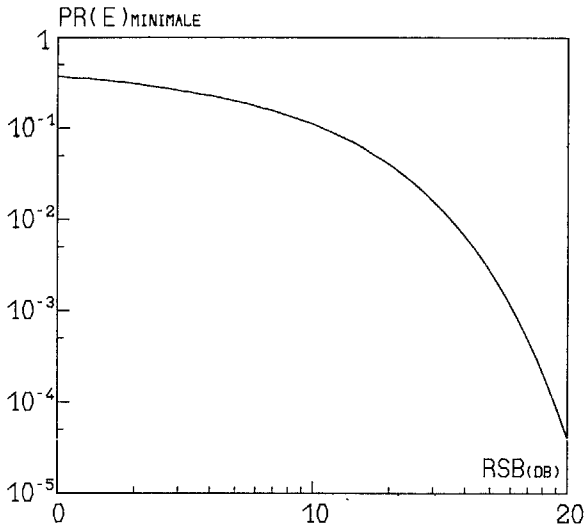


Fig. 4 Probabilité d'erreur pour une diversité optimale, pour la détection simple

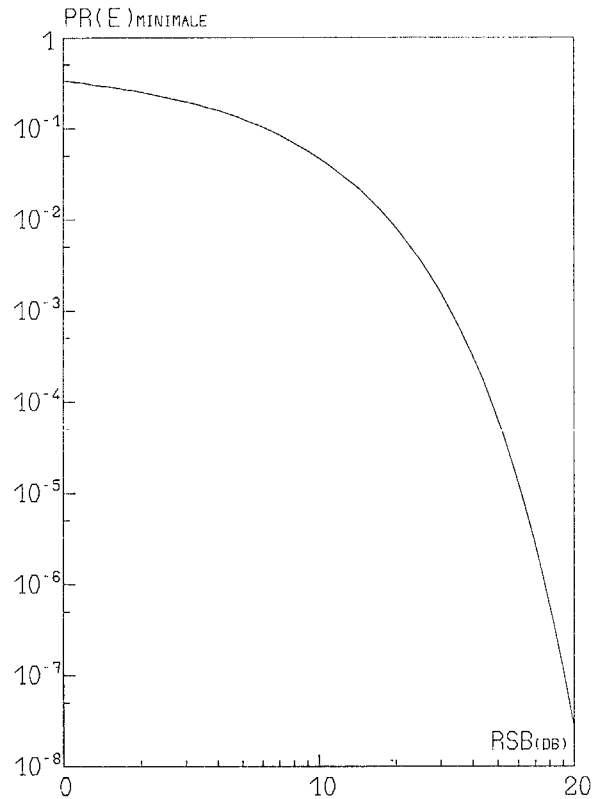


Fig. 6 Probabilité d'erreur pour la diversité optimale, pour la communication binaire symétrique

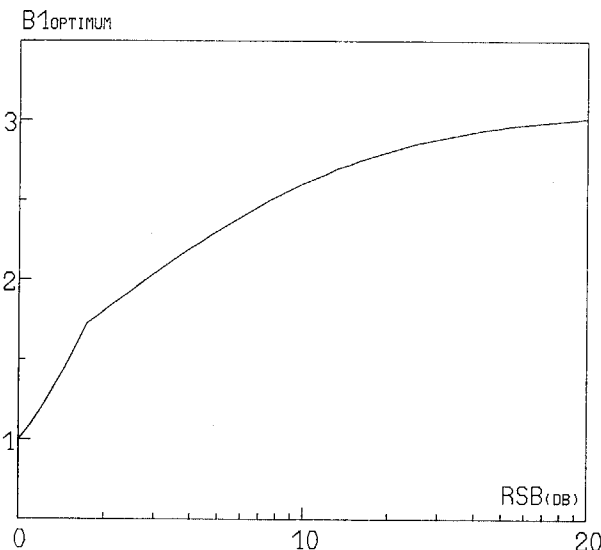


Fig. 5 Rapport signal sur bruit par chemin de diversité optimal, pour la communication binaire symétrique

Ainsi nous avons obtenu pour un r.s.b. à la réception fixé une valeur optimale de l'intégrale de (20). Nous avons donc une relation pour la fonction d'ambiguïté en translation du signal émis, qui nous permet de répondre au problème de conception des signaux à transmettre. Il est évident qu'il n'est pas toujours facile d'exploiter ce résultat, en résolvant une équation fonctionnelle. Dans le paragraphe suivant nous donnons quelques exemples pour mieux illustrer les résultats et pour pouvoir comparer aux résultats connus par ailleurs

5-EXEMPLES D'APPLICATION

5-1 Canal dispersif en fréquence du premier ordre Transmission FSK

La fonction de diffusion d'un canal dispersif en fréquence n'existe que pour une valeur sur l'axe de retard, i.e.

$$\tilde{S}(\nu, \xi) = \tilde{S}_d(\nu) \delta(\xi) \quad (25)$$

Le signal émis subit une modulation aléatoire de l'amplitude par un processus $\tilde{a}(t)$, dont la fonction de covariance est $\tilde{K}_a(\tau)$ et son spectre est $\tilde{S}_a(\nu)$. Pour une transmission FSK dans ce canal le paramètre b_1 devient

$$b_1 = \frac{\bar{E}_r}{N_0} \int_0^T \int_0^T |\tilde{f}(t)|^2 |\tilde{f}(u)|^2 |\tilde{K}_a(t-u)|^2 dt du \quad (26)$$

On constate que la phase de l'amplitude complexe du signal émis n'intervient pas dans les performances. Donc seule la modulation de l'amplitude peut faire varier la probabilité d'erreur.

Nous avons étudié le cas d'un canal dont la fonction de diffusion est du premier ordre, i.e.

$$\tilde{S}_d(\nu) = \frac{2k}{(2\pi\nu)^2 + k^2} \quad (27)$$

Le signal émis n'est pas modulé. Il est donc d'amplitude constante, durant l'intervalle d'émission. Sous ces conditions le paramètre b_1 est fonction du r.s.b. à la réception et du produit kT , qui exprime le rapport du temps d'émission sur le temps de corrélation du canal. Ainsi, nous avons

$$b_1 = \frac{1}{2} \frac{\bar{E}_r}{N_0} \frac{1}{(kT)^2} (2kT - 1 + e^{-2kT}) \quad (28)$$

Vu le résultat du paragraphe précédent, qu'il existe une valeur de b_1 optimale, on arrive à une durée optimale du signal émis. Nous rappelons que le r.s.b. est supposé fixé. Dans la fig. 7, nous donnons l'évolution du produit kT optimal en fonction du rapport signal sur bruit à la réception (de 0 à 20 db).



APPROXIMATION DE LA PROBABILITE D'ERREUR DES RECEPTEURS A TRAITEMENT QUADRATIQUE
ERROR PROBABILITY APPROXIMATION FOR A QUADRATIC RECEIVER

Ce résultat est obtenu par ailleurs suivant une autre méthode [10]. On constate que les valeurs numériques diffèrent peu, mais la méthode proposée ici est plus simple à utiliser. En plus dans la même figure nous donnons l'évolution du paramètre a_1+1 optimal. Nous constatons que le nombre effectif de chemins de diversité est égal à $1+KT$, résultat connu par l'étude de R. Kennedy sur la diversité [7]

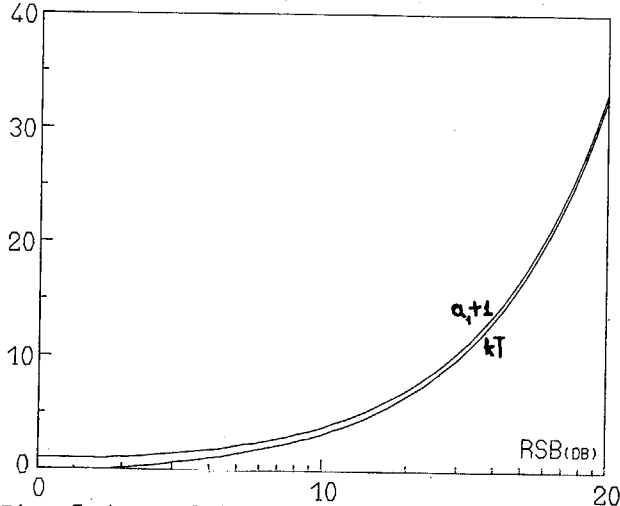


Fig. 7 Le produit KT optimal et le nombre optimal de chemins de diversité (a_1+1)

5-2 Canal dispersif en temps - cas des trajets multiples

La fonction de diffusion d'un canal dispersif en temps n'existe que sur l'axe de retard, i.e.

$$\tilde{S}(v, \xi) = \tilde{Q}(\xi) \delta(v) \tag{29}$$

Cette fois le paramètre b_1 devient

$$b_1 = \frac{\bar{E}_r}{N_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}(\xi) \tilde{Q}(\tau) |\tilde{C}_r(\xi-\tau)|^2 d\xi d\tau \tag{30}$$

ou $\tilde{C}_r(\cdot)$ est la fonction de corrélation du signal $\tilde{r}(t)$ rapportée à son énergie. Nous envisageons le canal à trajets multiples, pour lequel la structure du récepteur optimal et l'étude des performances sont données dans [5]. La fonction de diffusion en retard pour un canal à N trajets est

$$\tilde{Q}(\xi) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\xi - \xi_i) \tag{31}$$

Nous avons alors

$$b_1 = \frac{\bar{E}_r}{N_0} \left(\sum_{k=1}^N q_k^2 + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N q_k q_l |k_{kl}|^2 \right) \tag{32}$$

où M_{kl} est le coefficient de corrélation $\tilde{C}_r(\xi_k - \xi_l)$

Il est évident que pour optimiser on doit agir sur les coefficients de corrélation M_{kl} . Par exemple, pour optimiser une transmission FSK dans un canal à deux trajets ($N=2$) on doit choisir $\mu_{12}=0$ pour un rapport signal sur bruit dépassant ~ 2 . Ce résultat est conforme à celui obtenu en utilisant les formules exactes [11].

6-CONCLUSION

Nous avons étudié les performances d'un dispositif de réception à traitement

quadratique. Nous sommes intéressés particulièrement au récepteur optimal après traversée d'un canal aléatoire et dispersif. Nous avons envisagé le problème de détection de présence d'un signal et le problème de classification des deux signaux résultant de la transmission dans un tel canal. Pour évaluer ces performances nous utilisons la probabilité d'erreur du récepteur. Nous avons proposé des nouvelles approximations de la probabilité d'erreur tant pour la détection simple que pour la communication binaire symétrique. Pour la détection simple, la probabilité de détection et celle de fausse alarme ont été exprimées en utilisant la fonction gamma incomplète (19). Pour la communication binaire symétrique, la probabilité d'erreur a été exprimée à l'aide d'une fonction hypergéométrique (23).

Par méthode numérique nous avons pu montrer qu'il existe une valeur optimale du paramètre b_1 , pour un rapport signal sur bruit à la réception donnée, pour les deux types de problèmes. Le paramètre b_1 est exprimé comme une fonctionnelle de la fonction de diffusion du canal et de la fonction d'ambiguïté en translation du signal émis. Ainsi on a établi une relation directe entre les performances et la fonction d'ambiguïté du signal émis, qui permet d'envisager d'une nouvelle façon le problème de la conception de signaux à transmettre dans un canal aléatoire et dispersif, dont on connaît la fonction de diffusion. Pour ce dernier problème, nous avons donné quelques exemples. Il reste à élaborer des méthodes générales utilisant ces résultats pour mieux adapter l'émetteur au canal de transmission.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- H. VAN TREES "Detection, Estimation and Modulation Theory. Part III : Radar/ Sonar Signal Processing and Gaussian Signals in Noise" J. Wiley N. York, 1971
- [2]- L. COLLINS "Asymptotic Approximations to the error Probability for Detecting Gaussian Signals" MIT, Dep. of Electrical Eng., Sc. D. Thesis Proposal, Jan. 1968
- [3]- G. JOURDAIN "Filtres linéaires aléatoires et non stationnaires. Modèles, simulations et applications" Thèse de Doctorat d'Etat, Grenoble, 1976
- [4]- J.Y. JOURDAIN-P. LAMBERT "Transmission acoustique des signaux monochromatiques" revue du CETHEDC, 2e trimestre 1980, NS.80-1
- [5]- G. TZIRITAS "Communications dans un canal aléatoire dispersif" thèse de Docteur Ingénieur INP Grenoble, fév. 1981
- [6]- K. PEARSON "Tables of the Incomplete Γ . Function" Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934
- [7]- R. KENNEDY "Fading dispersive communication channels" J. Wiley, N. YORK, 1969.
- [8]- W. LINDSEY "Error probabilities for Rician Fading Multichannel Reception of Binary and N-ary Signals" IEEE Trans. on Information Theory, Vol. IT-10, pp. 339-350, Oct. 1964



APPROXIMATION DE LA PROBABILITE D'ERREUR DES RECEPTEURS A
TRAITEMENT QUADRATIQUE
ERROR PROBABILITY APPROXIMATION FOR A QUADRATIC RECEIVER

- [9] - S.K. CHOW - A. VENETSANOPOULOS "Optimal On-off Signaling over Linear Time-Varying Stochastic Channels" IEEE Trans.on Information Theory Vol. IT-20, No.5, sept. 1974
- [10]- R. KURTH "Distributed-Parameter State-Variable Techniques Applied to Communication over Dispersive Channels" Sc. D. Thesis, Dep.of Electrical Eng., MIT June 1969.
- [11]- G. TZIRITAS "Communication à travers un canal de Rayleigh à 2 trajets : récepteurs et performances" Annales des Télécommunications (à paraître).