

# HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1<sup>er</sup> au 5 JUIN 1981

---

DETERMINISME ET INDETERMINISME DE CERTAINS SIGNAUX ALEATOIRES.

Annie GRAVEY\* - Bernard PICINBONO\*\*

\*C.N.E.T. - LAB/SER/RES - Route de Trégastel  
22300 - LANNION

\*\*LABORATOIRE DES SIGNAUX ET SYSTEMES<sup>†</sup> - Plateau du Moulon  
91190 - GIF SUR YVETTE.

---

## RESUME

## SUMMARY

La notion de signal aléatoire de type déterministe est introduite dans le cadre de la prédiction linéaire. De tels signaux peuvent être prédits sans erreur s'ils sont observés sur un passé infini. Dans le cas stationnaire il existe une condition caractéristique concernant la densité spectrale qui assure qu'un signal soit de type déterministe ou non. En particulier tout signal aléatoire, à temps continu ou discret, avec un spectre à bande limitée est déterministe. Dans cet article on étudie au moyen de simulations sur ordinateur le comportement de l'erreur de prédiction à un pas pour des signaux à bande presque limitée. Ceci met en évidence la transition du non déterminisme vers le déterminisme. Les résultats sont analysés en particulier en termes de proximité entre deux signaux aléatoires.

Deterministic random signals are usually introduced in the framework of linear prediction. Such processes can be predicted without error if they are observed or an infinite past. In the stationary case there is a characteristic condition for the power spectrum which secures that the signal is deterministic or not. In particular any stochastic signal in continuous or discrete time with a bandlimited spectrum is deterministic. In this paper we study by computer simulations the behavior of the one step prediction error for almost band limited signals which show the transition from the non determinism to the determinism. The results are analyzed in terms of proximity between two random signals.



## 1. INTRODUCTION

La notion de signal aléatoire (s.a.) ou de fonction aléatoire (f.a.) *déterministe* s'introduit dans le cadre de l'étude de la prédiction linéaire en moyenne quadratique [1] [2] [3]. D'une manière très simplifiée un s.a. à temps discret  $x_n$  est dit *déterministe*

si l'erreur de prédiction à un pas avec passé infini est nulle. Cela signifie que si le signal a été observé de  $-\infty$  à  $n$ , on peut prédire sans erreur sa valeur à l'instant  $n+1$ , et de proche en proche toutes les valeurs postérieures. En pratique cela signifie qu'une observation suffisamment longue de ce signal lui enlève son caractère aléatoire. Une telle propriété peut paraître très importante, dans la mesure où un bruit qui la posséderait pourrait être mesuré sans erreur, donc éliminé.

Dans le cas des s.a. stationnaires du second ordre la propriété de déterminisme ne dépend que de la densité spectrale  $\gamma(\nu)$ . D'une manière plus précise on peut montrer ([2], p.64) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un signal soit régulier, c'est à dire non déterministe, est que  $\text{Log } \gamma(\nu)$  soit intégrable de  $-1/2$  à  $+1/2$ , intervalle de définition de la densité spectrale.

Ceci entraîne que tout signal dont la densité spectrale s'annule sur un intervalle  $\Delta\nu$  est déterministe, et ceci est le cas de tous les signaux dits à bande limitée. Comme un signal déterministe est en quelque sorte un signal n'ayant plus de caractère aléatoire, il y a contradiction entre *caractère aléatoire et limitation de bande*. Or tous les signaux physiques sont considérés comme étant à bande limitée, et il est donc important d'élucider cette apparente contradiction. Une situation analogue se retrouve dans l'opposition entre limitation de bande et causalité [4] ou limitation de durée [5].

Le but de ce papier est d'étudier sur un modèle particulier et par des simulations numériques la transition du non déterminisme vers le déterminisme. Pour ceci on calcule par des algorithmes appropriés l'erreur de prédiction à un pas et à passé fini. En faisant croître ce passé l'erreur tend alors vers sa valeur asymptotique qui est nulle pour un signal déterministe et non nulle dans le cas contraire. Ainsi le comportement de l'erreur nous permet de comprendre l'évolution vers le déterminisme et de mieux cerner la contradiction entre limitation de bande et caractère aléatoire.

## 2. RAPPELS THEORIQUES.

Soit  $x_i$  un signal aléatoire (s.a.) réel, centré et stationnaire. On observe ce signal de l'instant  $i-n$  à l'instant  $i-1$ . On appelle prédiction à un pas et à passé fini la quantité

$$\hat{x}_{i,n} \triangleq \text{EL} [x_i | x_{i-1}^{i-r}] \quad (1)$$

qui est l'estimation linéaire en moyenne quadratique de  $x_i$  en fonction des  $n$  observations passées  $x_{i-1}^{i-r}$ ,  $x_{i-2}^{i-r}$ ,  $x_{i-n}^{i-r}$  notées symboliquement  $x_{i-1}^{i-r}$ . L'erreur d'estimation, indépendante de  $i$  en raison de la stationnarité, est définie par

$$e_n = \epsilon_n^2 = E [(x_i - \hat{x}_{i,n})^2] \quad (2)$$

et lorsque  $n \rightarrow \infty$ , cette erreur tend vers la valeur asymptotique

$$E = e_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n \quad (3)$$

qui est donc l'erreur de prédiction à un pas avec passé infini.

En raison du caractère linéaire de l'estimateur défini par (1), les erreurs introduites ne dépendent que des propriétés statistiques du second ordre de  $x_i$  c'est à dire de la fonction de corrélation ou de densité spectrale, puisque  $x_i$  est supposé stationnaire.

Nous allons rappeler le calcul de  $e_n$  et de  $E$  qui sera utilisé dans la suite.

L'erreur asymptotique  $E$  s'obtient directement en fonction de la densité spectrale  $d(\nu)$  du s.a.  $x_n$  par l'expression ([3], p.261)

$$E = \exp \left\{ \int_{-1/2}^{+1/2} \text{Log} [d(\nu)] d\nu \right\} \quad (4)$$

Cette relation montre en particulier, comme nous l'avons indiqué, que l'erreur est nulle si  $d(\nu)$  s'annule sur une bande de fréquence non nulle.

Il n'y a par contre pas d'expression directe de l'erreur  $e_n$  en fonction de la densité spectrale, et il faut alors utiliser la fonction de corrélation  $r_n \triangleq E [x_k x_{k-n}]$ . Nous allons très brièvement rappeler le calcul de cette erreur au moyen de l'algorithme de Levinson [6].

La quantité  $\hat{x}_{i,n}$  définie par (1) se calcule par le théorème de projection en explicitant le fait que l'innovation  $x_i - \hat{x}_{i,n}$  est orthogonale à l'observation  $x_{i-1}^{i-r}$  (principe d'orthogonalité), ce qui donne

$$x_n - \hat{x}_{i,n} \perp \hat{x}_{i,n} \quad (5)$$

puisque, d'après (1),  $\hat{x}_{i,n}$  est obtenu linéairement à partir de  $x_{i-1}^{i-r}$ . Il en résulte que (2) peut s'écrire

$$e_n = E(x_i^2) - E(x_i \hat{x}_{i,n}) = r_0 - E(x_i \hat{x}_{i,n}) \quad (6)$$

Soient  $\underline{x}_{i,n}$  le vecteur de composantes  $x_{i-1}^{i-r}$ ,  $x_{i-2}^{i-r}$ , ...,  $x_{i-n}^{i-r}$  et  $\underline{r}_n$  celui de composantes  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . La relation (1) peut s'écrire sous la forme

$$\hat{x}_{i,n} = \underline{a}_n^T \underline{x}_{i,n} \quad (7)$$

où  $\underline{a}_n$  est dénommé vecteur de régression. En raison de (5) ce vecteur vérifie l'équation dite normale

$$R_n \underline{a}_n = \underline{r}_n \quad (8)$$

où  $R_n$  est la matrice de corrélation  $E[\underline{x}_{i,n} \underline{x}_{i,n}^T]$  qui en raison de la stationnarité est une matrice de Toeplitz du type  $T(r_0, r_1, \dots, r_{n-1})$ . A partir de (6) on peut alors écrire l'erreur sous la forme

$$e_n = r_0 - \underline{r}_n^T \underline{a}_n \quad (9)$$

L'algorithme de Levinson est une méthode qui permet de résoudre (8) et (9) de manière récursive, et donne donc à chaque étape la valeur de  $e_n$ . Nous ne faisons que rappeler la forme de cet algorithme. Pour ceci nous écrivons les  $n$  premières composantes du vecteur  $\underline{a}_{n+1}$  sous la forme  $\underline{a}_n^{n+1}$ , la dernière composante étant écrite  $a_{n+1}^{n+1}$ . L'algorithme prend alors la forme suivante

$$\underline{a}_n^{n+1} = \underline{a}_n - a_{n+1}^{n+1} \underline{a}_n^{(-)} \quad (10)$$

$$a_{n+1}^{n+1} = \beta_n / \alpha_n \quad (11)$$

$$\beta_n = r_{n+1} - \frac{r_n^T}{r_n} a_n^{(-)} \quad (12)$$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} [1 - (a_n^{(-)})^2] \quad (13)$$

$$e_n = \alpha_n \quad (14)$$

Dans ces expressions  $a_n^{(-)}$  est le vecteur déduit de  $a_n$  en changeant l'ordre des composantes. Par ailleurs l'algorithme est initialisé par la valeur  $a_1 = r_1/r_0$  et  $\alpha_1 = 1 - r_1^2/r_0$ .

Ainsi la donnée de la suite des corrélations  $r_i$  permet, par cet algorithme, de calculer la suite des erreurs  $e_n$ , et c'est ce calcul qui est effectué dans la suite.

3. APPLICATION A UNE DENSITE SPECTRALE PARTICULIERE.

Le but poursuivi étant d'étudier l'influence des propriétés spectrales de  $x_i$  sur le comportement de l'erreur  $e_n$ , il faut savoir passer facilement des propriétés spectrales à celles concernant les corrélations  $r_n$  utilisées dans la mise en oeuvre de l'algorithme précédent. Il est en général très difficile d'obtenir des formes explicites, sauf dans certains cas de formes de densité spectrale, et nous allons donc commencer par introduire un modèle particulier.

Si la densité spectrale ne varie que par sauts, ce qui peut être une approximation de toute densité spectrale, on peut la décomposer en somme de fonctions rectangulaires dont les transformées de Fourier sont bien connues, et on peut donc sans difficulté étudier l'influence de modifications de la densité spectrale sur le comportement de l'erreur  $e_n$ .

Pour simplifier au maximum la présentation dans cet exposé nous avons choisi une densité spectrale ne comportant qu'un saut et donc deux paliers, s'écrivant alors

$$d(v) = a \quad |v| \leq F/2 \quad (15)$$

$$= b \quad F/2 < |v| \leq 1/2$$

Cette densité spectrale peut évidemment se décomposer en une somme de deux spectres rectangulaires.

$$d(v) = b \text{ Rect}[v; -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] + (a-b) \text{ Rect}[v; -\frac{F}{2}, +\frac{F}{2}] \quad (16)$$

où  $\text{Rect}[v; \alpha, \beta]$  est la fonction de  $v$  valant 1 dans l'intervalle  $(\alpha, \beta)$  et 0 ailleurs. Comme la transformée de Fourier  $r_n^F$  de  $\text{Rect}[v; -F/2, +F/2]$  vaut

$$r_n^F = F \frac{\sin \pi F n}{\pi F n} \quad (17)$$

il résulte que la fonction de corrélation associée à  $d(v)$  définie par (15) vaut

$$r_n = b \delta_{n,0} + (a-b) F \frac{\sin \pi F n}{\pi F n} \quad (18)$$

et c'est cette expression que l'on peut alors utiliser dans l'algorithme de Levinson conduisant au calcul de  $e_n$ .

Dans toute la suite on suppose que  $x_i$  a une variance unité, c'est à dire que  $r_0 = 1$ . Ceci donne donc, avec (18)

$$a F + b (1-F) = 1. \quad (19)$$

De plus l'erreur asymptotique  $E$  donnée par (4) s'écrit dans notre cas

$$a^F b^{1-F} = E. \quad (20)$$

Bien entendu on a toujours  $E \leq 1$ , puisque l'erreur de prédiction à un pas est toujours inférieure à la variance.

Le spectre introduit est défini par trois paramètres  $a$ ,  $b$  et  $F$  et l'équation de normalisation (19). Si de plus on fixe la valeur de l'erreur  $E$ , le modèle ne possède plus qu'un seul paramètre libre et nous allons discuter ce point plus en détail.

Il est aisé de voir que le système d'équations (19) et (20) possède pour  $E$  et  $F$  donnés deux solutions ( $a'$ ,  $b'$ ) et ( $a''$ ,  $b''$ ) avec  $a' > b'$  et  $a'' < b''$ . En effet (19) définit dans l'espace  $a, b$ , une famille de droites passant toutes par le point  $a = b = 1$ , alors que (20) définit une famille de courbes analogues à des hyperboles équilatères passant toutes par le point  $a = b = E \leq 1$ . Pour  $E$  et  $F$  fixés l'intersection de ces deux courbes donne deux points situés de part et d'autre de la première bissectrice. Ces deux solutions correspondent respectivement à une marche descendante ou ascendante vers les hautes fréquences. Dans toute la suite, et par souci de simplification, nous supposons toujours que  $a > b$ , c'est à dire que les hautes fréquences sont atténuées.

Pour la discussion qui suit il est intéressant d'introduire le rapport

$$R = a/b \quad (21)$$

Si  $R$  est fixé, les équation (19) et (20) introduisent une relation entre  $E$  et  $F$  et l'on a représenté sur la figure 1 les variations de  $E$  en fonction de  $F$  pour certaines valeurs de  $R$ .

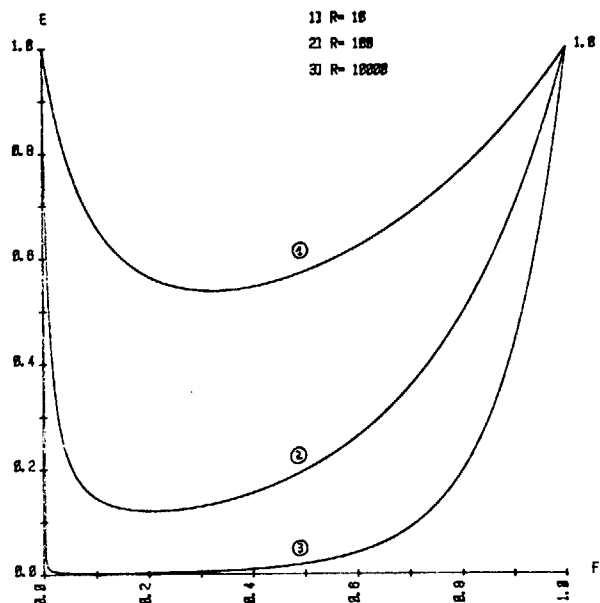


FIGURE 1 -



Il résulte de ces courbes que pour chaque valeur E de l'erreur asymptotique il existe une valeur  $R_{\min}(E)$  telle que dès que  $R > R_{\min}(E)$  on pourra toujours trouver deux fréquences  $F'$  et  $F''$  ( $F' \leq F''$ ) permettant de résoudre le système (19) et (20).

Ainsi quel que soit E on peut construire pour toute valeur de R supérieure à  $R_{\min}(E)$  deux densités spectrales "à marche descendante". Lorsque R devient très grand la figure 1 montre que la solution inférieure  $F'$  est très sensible, et nous nous limiterons donc dans la suite à la solution supérieure  $F''$  dénommée simplement F.

Mais il importe de remarquer qu'avec un rapport  $R = a/b$  aussi grand qu'on veut on peut toujours trouver un spectre normé à deux marches fournissant une erreur asymptotique donnée d'avance. Par contre si  $b=0$ , on sait que le modèle devient déterministe, et donc que  $E = 0$ . Il y a donc une discontinuité du problème pour  $R \rightarrow \infty$  que nous allons analyser dans la suite.

4. ETUDE DE L'ERREUR DE PREDICTION A UN PAS.

Les résultats présentés dans ce paragraphe proviennent de simulations sur ordinateur. Une fois fixée la forme du spectre, c'est à dire les valeurs a, b, F, on calcule l'erreur de prédiction à un pas en fonction de n à l'aide de l'algorithme de Levinson introduit précédemment et utilisant la fonction de corrélation  $r_n$  donnée par (18).

4.1. Processus non déterministe - Influence de R.

L'erreur asymptotique étant fixée à 0,3 on fait varier R de  $10^2$  à  $10^5$ , la fréquence F correspondante variant de 0,64 à 0,89. Les résultats sont présentés sur la figure 2.

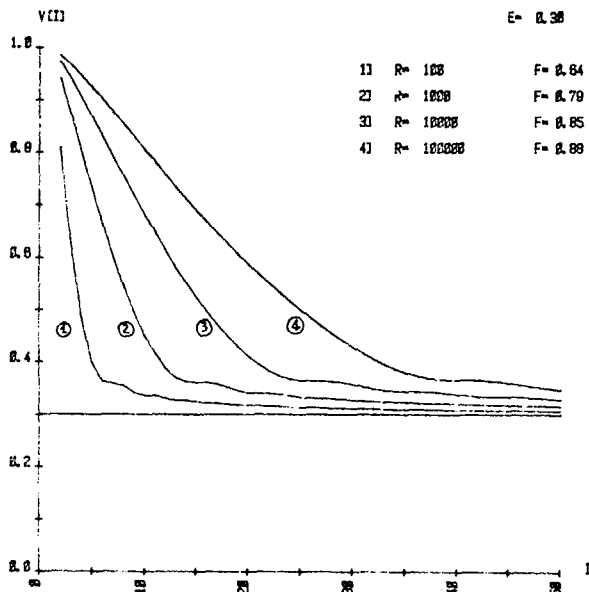


FIGURE 2 -

Il apparaît alors que lorsque R croît  $e_n$  tend de plus en plus lentement vers sa valeur asymptotique 0,3. Mais il convient de noter que même si R est très grand, c'est à dire b très petit devant a, on ne peut considérer que b est nul, car dans ce cas on aurait un processus déterministe dont le comportement sera étudié ultérieurement. Ainsi une densité spectrale  $10^5$  fois plus petite sur la bande de fréquence (0,89,1) assure le caractère non déterministe du signal considéré.

4.2. Transition déterminisme - non déterminisme.

Pour rendre  $x_i$  déterministe il suffit, comme on l'a vu, d'annuler sa densité spectrale sur une bande de fréquence non nulle. On va dans la suite étudier l'influence d'une coupure complète du spectre dans un domaine de fréquences où la densité spectrale est déjà très petite.

On fixe donc tout d'abord la valeur de R et on remplace la densité spectrale définie par (1) par une autre définie par

$$d_H(v) = \begin{cases} a & \text{si } |v| \leq F/2 \\ b & \text{si } \frac{F}{2} < |v| \leq \frac{1-H}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1-H}{2} < |v| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (22)$$

Il est clair que si  $H = 0$ ,  $d_H(v) = d(v)$ . Pour obtenir des résultats comparables on impose la même normalisation ce qui conduit à remplacer (19) par

$$aF + b \cdot (1 - H - F) = 1, \quad (23)$$

dans laquelle le rapport a/b est toujours égal à R.

Les résultats sont reportés sur la figure 3.

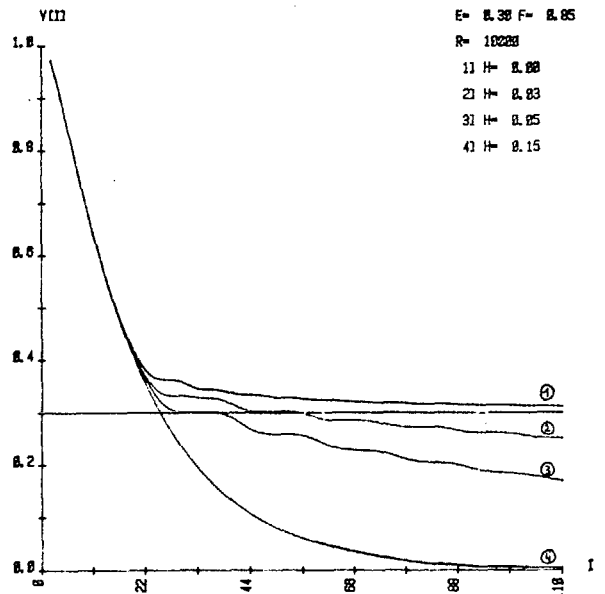


FIGURE 3 -

Pour toutes ces courbes on a choisi  $R = 10^4$  et  $E=0,3$ , ce qui donne  $F = 0,85$ . Le paramètre  $H$  varie entre 0 (signal non déterministe) et 1-F (bruit blanc à bande limitée  $F$ , ce qui correspond à la suppression complète de la seconde marche du spectre).

On constate sur toutes ces courbes que le comportement de l'erreur peut être divisé en deux parties.

Dans la première, correspondant à  $0 < n < 20$ , on voit que toutes les courbes sont pratiquement confondues et pendant cette période l'erreur varie de 1 à 0,4. Cette partie commune à tous les spectres semble donc liée essentiellement à la valeur de  $F$  (ici 0,85).

C'est dans la seconde partie que peut se voir la transition de l'indéterminisme au déterminisme. On peut considérer que pour  $n=100$  l'erreur de prédiction pour le signal non déterministe dont le spectre a pour caractéristiques  $F=0,85$  et  $R=10^4$  a pratiquement atteint sa valeur limite  $E=0,30$ . De même l'erreur de prédiction pour le signal déterministe dont le spectre est nul pour  $\nu > F = 0,85$  atteint pratiquement sa valeur limite nulle pour  $n = 100$ .

Lorsque  $H$  croît de 0 à  $1-F = 0,5$  on a des signaux qui sont tous de type déterministe, sauf pour  $H = 0$ , la transition se faisant peu à peu du premier au second cas. Cette transition peut par exemple être décrite par le temps minimum au bout duquel l'erreur de prédiction est inférieure à une valeur donnée. Sur la figure 4 on a représenté ce temps minimum correspondant à la valeur de 0,1.

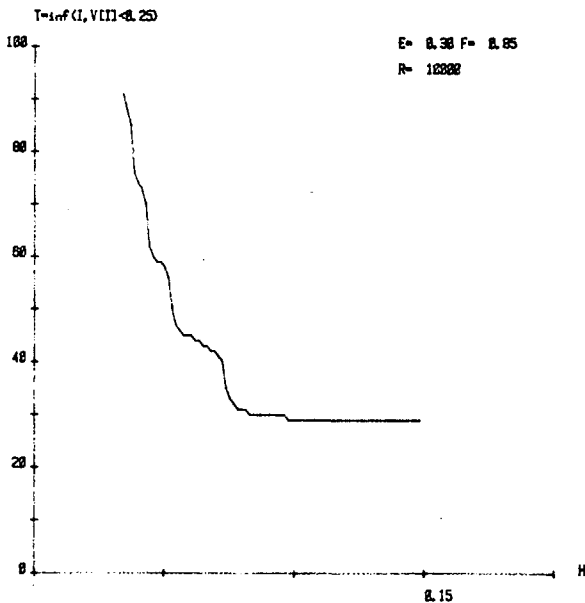


FIGURE 4 -

5. DISCUSSION DES RESULTATS.

Une analyse sommaire des résultats précédents pourrait conduire à dire que des signaux aléatoires ayant des propriétés du second ordre très voisines peuvent cependant avoir des comportements du second ordre très différents et nous allons brièvement tenter

de commenter cette affirmation.

Par propriétés du second ordre très voisines nous entendons des densités spectrales apparemment presque identiques et par comportement du second ordre nous entendons le comportement de l'erreur de prédiction linéaire à un pas qui ne dépend que des propriétés du second ordre du signal. Ainsi ce que nous venons de dire n'a rien à voir avec le résultat bien connu indiquant que des signaux aléatoires très différents peuvent avoir la même densité spectrale, les différences se fondant sur les propriétés d'ordre supérieur.

5.1. Analyse temporelle.

Nous allons voir que dans la représentation temporelle des propriétés du second ordre, c'est à dire en utilisant la fonction de corrélation, les signaux étudiés précédemment sont très voisins si  $R$  est assez grand. En utilisant comme ci-dessus pour paramètres du problème les quantités  $R$  et  $F$  on peut alors écrire la fonction de corrélation (18) sous la forme

$$r_n^R = \frac{\delta_{n,0}}{RF + 1 - F} + \frac{(R-1)F}{RF + 1 - F} \frac{\text{Sin } \pi F n}{\pi F n} \quad (24)$$

et si l'on compare pour  $F$  donné les cas déterministe ( $R \rightarrow \infty$ ) et non déterministe ( $R$  fini) on obtient

$$\delta r_n^R \triangleq r_n^\infty - r_n^R = \frac{1}{RF + 1 - F} \left[ \frac{\text{Sin } \pi F n}{F n} - \delta_{n,0} \right] \quad (25)$$

Comme  $F < 1$  on a lorsque  $R$  est grand devant 1 la relation

$$\left| \frac{\delta r_n^R}{r_n^R} \right| < \frac{1}{RF} \quad (26)$$

En conséquence pour distinguer à partir des corrélations les signaux 1 et 4 de la figure 3 il faut mesurer les fonctions de corrélation avec une erreur relative de l'ordre de  $10^{-4}$ , ce qui est très petit. C'est dans ce sens qu'on peut dire que les propriétés du second ordre associées aux cas  $R \rightarrow \infty$  et  $R = 10^4$  sont très voisines.

5.2. Analyse fréquentielle.

La proximité des propriétés du second ordre peut également être analysée en comparant les densités spectrales  $d_R(\nu)$  et  $d_\infty(\nu)$  définies par (15) (19) et (21). Dans ces expressions on suppose que  $F$  est fixé. Il est alors intéressant d'introduire une distance  $\delta(d_R, d_\infty)$  entre ces densités spectrales, et ce problème a été abordé par de nombreux auteurs en particulier dans le cadre du traitement de la parole. On pourra avoir une vision assez synthétique de ce problème dans [7].

La plus simple mesure de distance est évidemment liée aux fonctions de carré sommable et s'écrit

$$\delta_2(d_R, d_\infty) = \int_{-1/2}^{+1/2} [d_R(\nu) - d_\infty(\nu)]^2 d\nu \quad (27)$$

L'avantage de cette mesure est sa simplicité de calcul et sa transposition immédiate au domaine temporel par application du théorème de Parseval. Appliqué à notre problème et en prenant les mêmes notations nous obtenons par transformation de Fourier de (24)

$$d_R(\nu) = \frac{1}{RF + 1 - F} \left\{ (R-1) \text{Rect} \left[ \nu; -\frac{F}{2}, +\frac{F}{2} \right] + \text{Rect} \left[ \nu; -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right] \right\}. \quad (28)$$



La valeur  $d_{\infty}(v)$  s'en déduit immédiatement et en remplaçant dans (27) nous obtenons

$$\delta_2(d_R, d_{\infty}) = \left( \frac{1}{RF+1-F} \right)^2 \cdot \frac{1-F}{F} \sim \frac{1}{R^2} \frac{1-F}{F^3}. \quad (29)$$

On voit donc bien qu'au sens de la distance  $\delta_2$  considérée les spectres  $d_R(v)$  et  $d_{\infty}(v)$  sont très voisins dès que  $R$  est grand devant 1. Ceci confirme donc l'analyse temporelle.

Mais pour les problèmes de traitement de la parole on a introduit un assez grand nombre de distances [7], et nous ne prendrons ici que celle dite de "Itakura et Saito" [8] définie par

$$\delta_{\ell}(d_R, d_{\infty}) \triangleq \int_{-1/2}^{+1/2} \left| \frac{d_{\infty}(v)}{d_R(v)} - \text{Log} \frac{d_{\infty}(v)}{d_R(v)} - 1 \right| dv. \quad (30)$$

Cette distance faisant intervenir le logarithme de la densité spectrale est évidemment plus adaptée à (4). En particulier comme  $d_{\infty}(v)$  est nulle sur la bande de fréquences  $|v| > F$ , la distance de toute densité spectrale non nulle à  $d_{\infty}(v)$  est infinie et dès lors au moyen de cette distance les densités spectrales  $d_{\infty}(v)$  et  $d_R(v)$  sont "infiniment distantes".

En tout état de cause l'utilisation d'un seul paramètre pour caractériser la différence entre deux densités spectrales paraît insuffisante. Comme nous l'avons indiqué précédemment la figure 3 montre que toutes les densités spectrales qui ont permis de calculer le comportement de l'erreur de prédiction à un pas sont aussi bien très voisines, ce qui apparaît dans le comportement à courte portée de cette erreur, que très différentes, ce qui apparaît lorsqu'on prend un passé beaucoup plus long. Nous avons vu que pour voir une différence de comportement de l'erreur de prédiction à un pas il fallait prendre dans le passé un nombre d'observations supérieur à 20. La corrélation entre la valeur à estimer et les observations devient alors très petite et la différence de comportement des erreurs provient alors d'un très grand nombre de contributions dans le passé même très voisines. Il n'est pas impossible alors que la non stationnarité des phénomènes physiques rende impossible la caractérisation expérimentale des différences.

† Laboratoire des Signaux et Systèmes, Centre de Recherche du C.N.R.S. et de l'E.S.E., associé à l'Université de Paris-Sud.

#### REFERENCES

- [1] H. CRAMER and M.R. LEADBETTER, Stationary and related stochastic processes, Wiley, 1967, p.106 et 143.
- [2] Y.A. ROZANOV, Stationary random processes, Holden Day, 1967, p. 52.
- [3] A. BLANC-LAPIERRE et B. PICINBONO, Fonctions aléatoires, Masson, 1981 p. 36, 148, 279 et 285.
- [4] L. ZADEH et C. DESOER, Linear system theory, Mc. Graw-Hill, 1964.
- [5] D. SLEPIAN, On bandwidth, Proc. of the I.E.E.E., 64, 1976, p. 292-300.
- [6] Voir [3] p. 276.
- [7] R.M. GRAY, A. BUZO, A.H. GRAY, Y. MATSUYAMA, Distortion measures for speech processing, IEEE Trans. Acoustics Speech and Sign. Proc., ASSP 28, 1980, p. 367-376.
- [8] F. ITAKURA et S. SAITO, A statistical method for estimation of speech spectral density and formant frequencies, Electro. Commun. Jap. 53 A, 1970, p. 36-43.