

NICE du 1^{er} au 5 JUIN 1981

CALCUL DE FAUSSE ALARME EN DETECTION DE FREQUENCE PURE
LIEE AUX PASSAGES PAR ZERO D'UN PROCESSUS A BANDE ETROITE.
POSSIBILITE D'ESTIMATION DE L'ENVELOPPE DE SON AUTO-CORRELATION

Jacques HAY

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
29 avenue de la Division Leclerc - 92320 CHATILLON

RESUME

Pour connaître la fiabilité et approprier les réglages d'un appareil électronique capable de détecter avec une grande dynamique des repères à deux fréquences marquant l'enregistrement magnétique de bruits acoustiques, on a dû étudier une modélisation des passages par zéro (p.z.) d'un processus gaussien centré à bande étroite. On définit le pseudo-isochronisme des p.z. à ϵ près en introduisant une notion de pseudo-cohérence et l'on étudie la durée aléatoire d'une séquence ϵ -cohérente (succession de p.z. isochrones à ϵ près).

Pour différents réglages des critères de détection, on vérifie que les prévisions du modèle et les résultats de comptage des fausses alarmes concordent ; en reliant l'isochronisme à la description au second ordre du processus on propose une méthode simple pour estimer quelques points de l'enveloppe de son auto-corrélation.

I - INTRODUCTION

Les codes de repérage d'un type très particulier d'enregistrement magnétique [1] sont constitués par la somme de deux sinusoides, de fréquences ν_0 et ν_0' remplaçant pendant un court instant le signal de mesure. Comme, d'une part, ce signal est le plus souvent assimilable à un bruit blanc et que, d'autre part, la séparation des fréquences du code se fait par des filtres à bande étroite (fig.1), le décodage implique sur chaque voie la détection simultanée de chacune des deux sinusoides (ν_0 et ν_0') substituées au processus centré à bande étroite autour des mêmes fréquences et provenant du bruit blanc filtré.

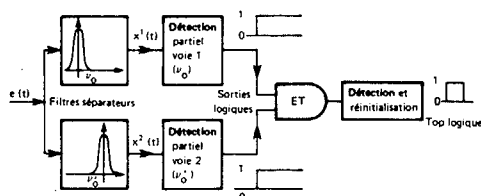


Fig.1 - Principe d'organisation de la détection

SUMMARY

In order to facilitate the calibration of electronic equipment detecting two frequency codes with a wide dynamic range on single track acoustic signals tape recordings, and also in order to find out its decoding reliability, an appropriate mathematical model of narrow band Gaussian noise zero crossings (Z.C) is proposed. It makes use of the pseudo-isochronous property of Z.C. to define and to study the random durations of coherent sequences of the Z.C process.

On présente sur la figure 2 un exemple du signal d'entrée $e(t)$ et des processus à bande étroite $x(t)$ et $x'(t)$ interrompus pendant quelques dizaines de périodes par les sinusoides à détecter.

Pour rester compatible avec des niveaux d'entrée très différents, compris entre 0,1 V et 3 V (30 dB), on s'est orienté vers un principe de détection partielle basé sur les différences de cohérence entre les passages par zéro (p.z.) d'une sinusoïde (ν_0) et ceux d'un processus aléatoire à bande étroite autour de ν_0 . Comme l'indique la figure 1, la présence simultanée de la détection partielle sur les deux voies déclenche la détection proprement dite matérialisée par un top logique et suivie des réinitialisations nécessaires.

Un appareil basé sur ce principe est incorporé à une chaîne de dépouillements automatisés de l'ONERA où sa parfaite fiabilité était indispensable.



CALCUL DE FAUSSE ALARME EN EDETECTION DE FREQUENCE PURE
 LIEE AUX PASSAGES PAR ZERO D'UN PROCESSUS A BANDE ETROITE.
 POSSIBILITE D'ESTIMATION DE L'ENVELOPPE DE SON AUTO-CORRELATION

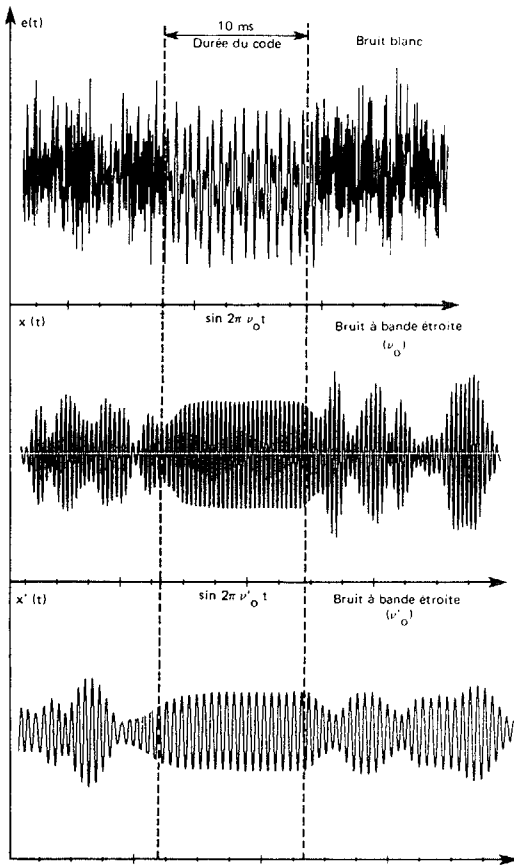


Fig.2 - Les signaux d'entrée avant et après filtrage

II- PRINCIPE DE LA DETECTION

On ne considère plus maintenant que le problème de la détection partielle de $\sin 2\pi \nu_0 t$ substitué à $x(t)$, processus centré à bande étroite autour de ν_0 pendant quelques dizaines de périodes. Le principe retenu utilise la faible probabilité qu'un processus à bande étroite ait une longue suite de passages par zéro (p.z.) isochrones à ϵ près (V.P.L.), alors qu'une sinusoïde a toujours ses p.z. isochrones, à ϵ près, dès que le seuil ϵ est suffisant pour tenir compte de fluctuations inévitables (réglage et dérive des oscillateurs, variation de vitesse du magnétophone, etc.). Ainsi, à partir d'une tolérance ϵ suffisante, le risque de ne pas détecter un code existant peut être considéré comme nul; le seul risque à évaluer reste celui des fausses alarmes dues aux détections parasites provoquées par le processus à bande étroite.

Pour préciser ce mode de détection parasite on présente sur la figure 3 une portion du processus $x(t)$ et le signal carré $y(t)$ qu'un circuit d'entrée lui associe après amplification et échantillonnage. Sur $y(t)$, on teste l'isochronisme, à ϵ près, entre deux p.z. successifs dans le même sens que l'on repère par une variable aléatoire (V.A.) indicatrice :

$$X_i = 1 \text{ si } T_0(1-\epsilon) \leq |t_i - t_{i-1}| < T_0(1+\epsilon)$$

(1) $\text{ou } \epsilon = \frac{\delta}{T_0}; T_0 = \frac{1}{\nu_0}$

$$X_i = 0 \text{ sinon}$$

On dit que les p.z. ($X = 1$) compris entre 2 p.z. ($X = 0$) successifs forment une séquence ϵ cohérente que l'on appelle séquence- ϵ de "durée" N aléatoire (on devrait dire durée réduite par T_0 pris comme unité de temps - V.P.L.). Pour l'exemple de la figure 3 on a $N=n$

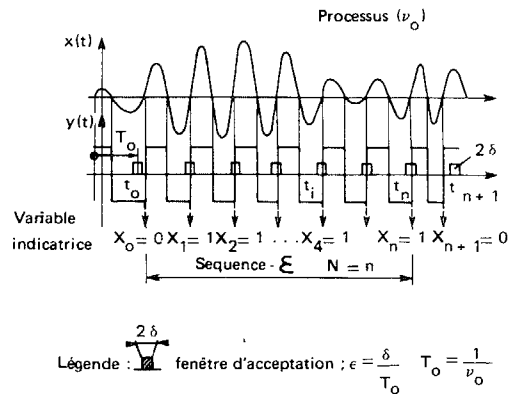


Fig.3 - Séquence ϵ cohérente de "durée" n

Critère de détection d'une voie :

En choisissant un entier positif μ aussi grand que le permet la durée de la sinusoïde, l'appareil donne un accord partiel dès que $N \gg \mu$.

Ainsi, pour estimer le risque de décodage parasite dû à des séquences de durée $N \gg \mu$ dans le processus aléatoire à bande étroite, a-t-on été conduit à proposer une modélisation des chaînes $X_i = 0,1$ que l'on a justifiée expérimentalement par les comptages appropriés.

III - MODELISATION DU PROCESSUS

Il s'agit de trouver une description probabiliste des p.z. permettant surtout de définir correctement la loi de N , durée normalisée de la séquence.

Remarque :

La durée d'une séquence est : $T \approx \sum_{i=1}^N D_i$

où $D_i \approx t_i - t_{i-1}$ est la durée séparant deux p.z. successifs. Les V.A. D_i et N ne sont pas indépendantes, cependant :

$$ET = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sum_{i=1}^n E D_i / n$$

où l'on a par suite du conditionnement $D_i \in T_0(1 \pm \epsilon)$

$$E D_i / n \approx T_0 \quad \forall i \leq n$$

D'où

(2) $ET \approx EN \cdot T_0$

par suite $EN = ET/T_0$ est la durée moyenne réduite.

CALCUL DE FAUSSE ALARME EN DETECTION DE FREQUENCE PURE
 LIEE AUX PASSAGES PAR ZERO D'UN PROCESSUS A BANDE ETROITE.
 POSSIBILITE D'ESTIMATION DE L'ENVELOPPE DE SON AUTO-CORRELATION

III.1 - Loi de probabilité de N , durée d'une séquence \mathcal{E} :

Par définition le premier p.z. vérifie $X_0=0$: on peut dire que l'on se synchronise sur cet évènement, ce qui a pour effet de détruire l'homogénéité du processus ponctuel qui, rappelons-le, est directement déduit d'un processus stationnaire à bande étroite.

L'hypothèse simplificatrice consiste à admettre qu'après une période transitoire non homogène limitée aux r premiers passages par zéro, on peut assimiler les X_i à une chaîne de Markov homogène d'ordre 1.

Remarque :

Sans cette "synchronisation" sur $X_0=0$, on aurait une chaîne homogène d'ordre r dont l'utilisation serait moins simple car les probabilités de transition comprendraient des conditionnements $X_i=0 (i \neq 0)$ ce qui n'est pas le cas ici puisque la séquence \mathcal{E} comprise par définition entre deux $X=0$ successifs n'implique que des conditionnements par $X_i=1 (i \neq 0)$. La réalisation de k p.z. consécutifs ($k \geq 2$) est assimilée à $(k-1)$ séquences vides ($N=0$). On voit que la simplification retenue intervient aussi à ce niveau puisqu'elle conduit à ne pas différencier par exemple des conditionnements par $(X_{-1}=0, X_0=0)$ et par $(X_{-1}=1, X_0=0)$

En fait, dans ce cas particulier de processus à bande étroite, les conséquences de cette hypothèse n'ont pas été perceptibles sur les comptages permis par l'appareil (V.P.L.). En estimant que ce bruit est en première approximation le résultat du filtrage d'impulsions poissonniennes (denses), on pourrait très intuitivement interpréter cette hypothèse en disant que les conditions de mise en oscillation (phase inhomogène $X=1$) précédant les oscillations entretenues (phase homogène $X=1$) dépendent peu de la durée de la phase précédente ($X=0$), pendant laquelle l'oscillateur (le filtre) est désynchronisé. A partir de là, il est logique de penser qu'en changeant nettement la précision du synchronisme - passant par exemple de $\sigma(\mathcal{E})=10^2$ à $\sigma(\mathcal{E})=10^4$ - le nombre r des p.z. du processus non homogène s'en trouve augmenté. On s'est borné à vérifier que pour différentes valeurs de \mathcal{E} de l'ordre de grandeur envisagé en pratique pour l'appareil (10^{-2}), le rang r fourni par l'étude statistique (V.P.L.) était le même, aux erreurs d'estimation près.

On est ainsi conduit aux notations suivantes :

$$P_i = P(X_i=1 / X_{i-1}=1, \dots, X_1=1, X_0=0) \quad 1 \leq i \leq r$$

$$P = P(X_i=1 / X_{i-1}=1, \dots, X_1=1, X_0=0) \quad i > r$$

$$P_0 = 1$$

On en déduit immédiatement la loi de N :

$$P(N=n) = A_n (1 - p_{n+1}) \quad 0 \leq n \leq r$$

phase homogène

$$(3) \quad P(N=n) = A_r p^{n-r} q \quad n > r$$

phase inhomogène

$$A_k \triangleq \prod_0^k P_i$$

$$(4) \quad EN = \sum_{k=1}^{r-1} k A_k (1 - p_{k+1}) + A_r \frac{(r-1)q + 1}{q}$$

pour $r=2$ il vient :

$$(5) \quad EN = \frac{P_1}{q} (P_2 + q)$$

Par sa structure interne l'appareil ne permettait pas l'estimation directe de EN , mais celle de EM_μ où M_μ est le nombre de μ -successions dans une séquence :

Avec $M_\mu =$ Partie entière de (N/μ) on trouve :

$$(6) \quad EM_\mu = A_r \frac{p^{\mu-r}}{1-p^\mu} \quad \text{pour } \mu \geq r$$

pour $r=2$ il vient :

$$(7) \quad EM_\mu = P_1 P_2 \frac{p^{\mu-2}}{1-p^\mu} \quad \mu \geq 2$$

$$EM_1 = EN = \frac{P_1}{q} (P_2 + q)$$

III.2 - Appréciation expérimentale du modèle

Une étude expérimentale a été faite sur une voie réglée pour $\mathcal{E} = 2,5 \cdot 10^{-2}$ et dont le filtre était centré sur 3240 Hz (figure 4).

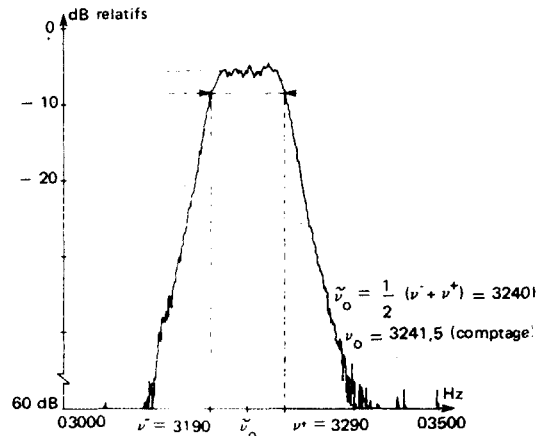


Fig.4 - DSP du processus à bande étroite étudié

Pour différentes valeurs de μ , on a effectué des comptages répétés de F_μ , nombre de μ -successions par seconde, et par moyenne on en a déduit des estimées

$$\hat{f}_\mu \text{ de } f_\mu \triangleq E F_\mu$$

Si F_0 est la fréquence aléatoire des séquences, F_μ est donné par :

$$F_\mu = \sum_{\lambda=1}^{F_0} M_\mu(\lambda)$$

où $M_\mu(\lambda)$ caractérise la séquence de rang λ .

Pour ce type de somme (cf. équation 2) on a vu que :



CALCUL DE FAUSSE ALARME EN DETECTION DE FREQUENCE PURE
 LIEE AUX PASSAGES PAR ZERO D'UN PROCESSUS A BANDE ETROITE.
 POSSIBILITE D'ESTIMATION DE L'ENVELOPPE DE SON AUTO-CORRELATION.

(8) $f_H = f_0 \cdot EM_H$ où $f_0 \triangleq EF_0$

Comme par unité de temps, le nombre des p.z. se répartit en p.z. ($X=0$) et p.z. ($X=1$) on a évidemment, pour les moyennes :

$v_0 = f_0 + f_1$

d'où

(8) $f_0 = v_0 \frac{1}{1+EM_1} = v_0 \cdot \frac{q}{D}$

en posant : $D \triangleq q + p_1(p_2 + q)$

Les comptages ont été répétés pour permettre une estimation à 95 % ($\pm 2\sigma$).

On a ainsi trouvé :

$\hat{v}_0 = 3243,3 \pm 0,4$

$\hat{f}_1 = 2580,8 \pm 6,5$

d'où

$\hat{f}_0 = 662,5 \pm 6,5$

Par ailleurs, pour vérifier le modèle, il faut déterminer le rang r de la phase non homogènes : d'après (6) on a :

(9) $\frac{f_H}{f_{H-1}} = p \frac{1-p^{H-1}}{1-p^H}$ dès que $H \gg M$

ce qui permet de calculer \hat{p} - estimée de p - et de définir r .

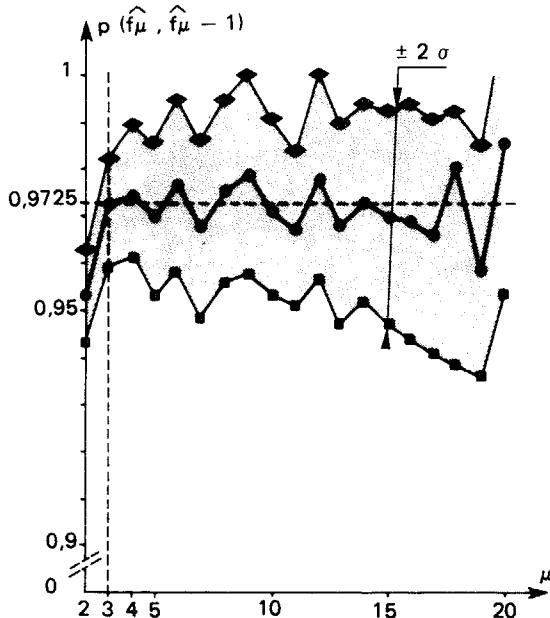


Fig.5 - Définition du rang r du processus inhomogène

On voit, sur la figure (5), où l'intervalle de confiance à 95 % est représenté en grisé, que la différence entre $H = 2$ et $H = 3$ est nette, confirmant d'une part, le rang $r = 2$ de la phase non homogène, et d'autre part, la phase homogène qui la suit puisque P probabilité de transition

y est constante (ici $P = 0,9725$)

Pour terminer la validation de ce modèle $r=2$, il suffit de calculer p_1 et p_2 par (7) et (8) à partir des estimées par comptage \hat{p}_H $H=1, H=2$ soit $p_1 = 0,147$, $p_2 = 0,702$.

On peut alors comparer pour $H > 2$, les valeurs calculées (f_H) et estimées (\hat{f}_H) qui sont reportées dans le tableau ci-dessous.

Remarque :

Choisissant au hasard un p.z., P_E la probabilité qu'il soit dans la fenêtre ϵ ($X=1$) est par définition :

$P_E(\tau_0) = \frac{f_1}{v_0} = \frac{f_1}{f_0 + f_1}$

Soit d'après (7) et (8) :

(10) $P_E(\tau_0) = \frac{EN}{1+EN}$

Il est clair que cette probabilité dépend de la finesse de la raie spectrale du bruit ($\alpha(t)$). P_E sera relié à la corrélation du processus au paragraphe V.

III.3 - Loi de probabilité de $Z(t)$ compteur des p.z. $X=1$ successifs à l'instant t

On en a besoin pour la probabilité de détection de 2 voies simultanées.

La figure 6 donne un exemple de $Z(t)$ où les instants de transition t_i sont assortis de la valeur de la variable indicatrice X ; on y donne les valeurs ($N=3, N=6$) de la V.A.N. étudiée en III.1, dont on rappelle qu'elle est la durée d'une séquence ϵ choisie au hasard.

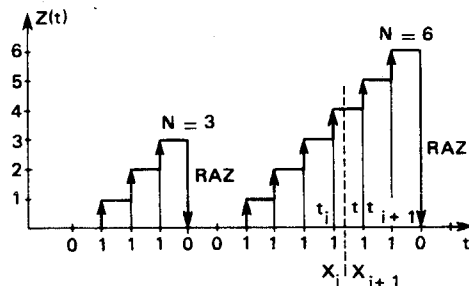


Fig.6 - Exemple d'une réalisation de $Z(t)$

H	3	4	5	10	11	12	18	19	20
f_H	827,7	612,6	482,5	225,4	201,3	182,4	110,6	102,3	96,4
\hat{f}_H	827,5	612	482,5	224,5	201	182	110,5	103,5	96,5
2.5σ	2,3	2,5	2	1	0,9	1,4	0,8	0,9	1

CALCUL DE FAUSSE ALARME EN DETECTION DE FREQUENCE PURE
 LIEE AUX PASSAGES PAR ZERO D'UN PROCESSUS A BANDE ETROITE.
 POSSIBILITE D'ESTIMATION DE L'ENVELOPPE DE SON AUTO-CORRELATION.

Tandis que pour la V.A. $Z(t)$ on choisit au hasard un instant t puis on observe la valeur $Z(t)$ du compteur à cet instant.

on a évidemment :

$$P(Z(t)=0) = P(X(t_i)=0) = 1 - P_E$$

et $P(Z(t_i)=n | Z(t_{i+1})=0) = P(N=n)$

Par suite en calculant $F(Z(t_i)=n | Z(t_{i+1})=0)$ par l'axiome des probabilités composées,

on trouve :

$$P(Z(t)=n) = \frac{(1 - P_E) P(N=n)}{\lambda_n}$$

avec $\lambda_n \triangleq P(Z_{i+1}=0 | Z_i=n) = P(X_{i+1}=0 | X_i=1)$

soit $\lambda_n = q - 1 - p$ si $n \geq r$
 $= 1 - p_n$ si $n < r$

Dans le cas particulier étudié où $r = 2$ on a :

$$P(Z=0) = q D^{-1} \quad (D \text{ défini en } (8)_2)$$

$$(11) \quad P(Z=1) = q p_1 D^{-1}$$

$$P(Z=n) = q p_1 p_2 p^{n-2} D^{-1} \quad n \geq 2$$

NOTA : Pour un processus complètement homogène on retrouve bien le résultat évident $P(Z=n) = q p^n$ en faisant $p_1 = p_2 = p$.

Probabilité $\Pi(\mu)$ de dépassement du seuil μ
 En notant $\pi(\mu) = P(Z > \mu)$ on trouve :

$$\Pi(\mu) = p_1 p_2 p^{\mu-2} D^{-1} \quad \mu \geq r=2$$

$$(12) \quad \Pi(1) = p_1(p_2 + q) D^{-1}$$

IV - APPLICATION AU CALCUL DES DETECTIONS PARASITES POUR UN CODE A DEUX FREQUENCES

En fonctionnement normal, la détection d'un code est suivie d'une inhibition destinée en pratique à éliminer les tops doubles, ce qui revient ici à n'admettre au plus qu'un top parasite par séquence. D'autre part, les compteurs $Z(t)$ des 2 voies sont supposés indépendants lorsqu'un bruit blanc est appliqué à l'entrée de l'appareil : leurs spectres ont des supports disjoints.

En utilisant la V.A. Y_s indicatrice de la condition $N_s \geq \mu$ pour chaque séquence, on voit (fig.7) que dans l'unité de temps le nombre aléatoire de tops ($N_s \geq \mu$) est donné par $\sum_{s=1}^r Y_s$ dont on déduit la valeur moyenne :

$$(13) \quad \mathcal{N}(\mu) = E F_s \cdot E Y = f_s \cdot P(N_s \geq \mu)$$

Où $\mathcal{N}(\mu)$ est la fréquence des détections parasites d'une voie seule, soit d'après (3) pour le rang $r=2$:

$$\mathcal{N}(\mu) = f_0 p_1 p_2 p^{\mu-2} ; \mathcal{N}(1) = f_0 p_1 \quad f_0 = \gamma_0 q D^{-1}$$

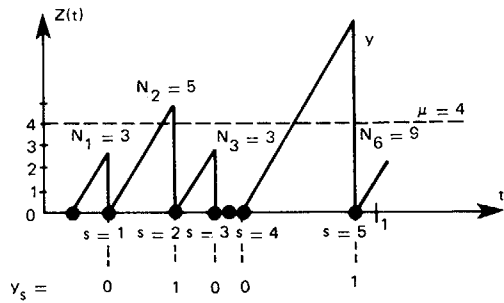
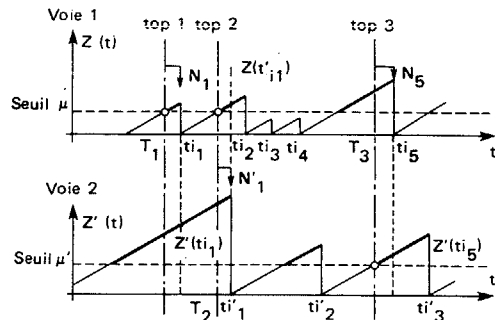


Fig.7 - Dénombrement des tops pour une voie

Pour calculer la fréquence $\mathcal{N}(\mu, \mu')$ pour deux voies, on choisit le mode de dénombrement adapté aux résultats précédents : à chaque top parasite on associe la séquence qui se termine la première après l'instant d'accord T_i . On voit sur la figure 8 que les détections (ou tops) à T_1 et T_3 sont rattachés à la voie 1, à T_2 à la voie 2.

Si \tilde{Y}_i est la V.A. indicatrice des tops rattachés à la voie 1, on a $P(\tilde{Y}_i=1) = P(N_1 > \mu) \times P(Z'(t_i) > \mu')$ puisque N et Z' sont indépendantes.



ici top 1 est associé à la séquence N_1
 top 2 est associé à la séquence N'_1
 top 3 est associé à la séquence N_5

Fig.8 - Dénombrement des tops pour deux voies

On en déduit $\tilde{\mathcal{N}}_1(\mu, \mu')$ la fréquence partielle des tops rattachés à la voie 1
 $\tilde{\mathcal{N}}_1(\mu, \mu') = E \left\{ \sum_{i=1}^{F_0} \tilde{Y}_i \right\} = E F_s \cdot E \tilde{Y} = f_s P(N_s > \mu) \cdot P(Z' > \mu')$

soit d'après (13)

$$(14) \quad \tilde{\mathcal{N}}_1(\mu, \mu') = \mathcal{N}(\mu) \cdot \pi'(\mu')$$

où $\pi'(\mu')$ est donné par (12) avec p_i au lieu de p_i .

On en déduit finalement la fréquence de toutes les détections parasites :

$$\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}}_1 + \tilde{\mathcal{N}}_2$$

soit

$$(15) \quad \mathcal{N}(\mu, \mu') = \tilde{\mathcal{N}}_1(\mu, \mu') + \tilde{\mathcal{N}}_2(\mu', \mu)$$

On donne dans le tableau ci-dessous un exemple de vérification expérimentale restreint ici au cas particulier $\mu = \mu'$.



CALCUL DE FAUSSE ALARME EN DETECTION DE FREQUENCE PURE
 LIEE AUX PASSAGES PAR ZERO D'UN PROCESSUS A BANDE ETROITE.
 POSSIBILITE D'ESTIMATION DE L'ENVELOPPE DE SON AUTO-CORRELATION

$\mu = \mu' =$	1	2	3	4	5
\hat{n} calculé	511	182	64	22	8
\hat{n} compté	529	170	59	19	6

En conclusion à ce paragraphe, on peut signaler que pour la durée réelle de détection (5 ms) et deux fréquences de codage (3250 Hz et 10 540 Hz) on trouve $\mu = 16, \mu' = 52$.

Ce qui conduit pour le prototype étudié à $\hat{n}(16, 52) \approx 1,6 \cdot 10^8$ Hz

En fait, dans l'appareil définitif, utilisé systématiquement pour le décodage d'enregistrements acoustiques [1], on n'a pas conservé ce risque inutilement faible, et l'on a choisi des critères d'isochronisme (E, E') plus larges (augmentation des probabilités P_1, P'_1), ce qui permet d'exploiter des bandes dont les fréquences de marquage (ν_0 et ν'_0) auraient "glissé". Cette souplesse dans le choix des différents réglages est sans doute le principal intérêt de ce type de repérage avec peut-être également la simplicité des circuits de détection.

V - RELATION ENTRE ISOCHRONISME-E ET FINESSE SPECTRALE

On vient de modéliser le processus déduit des p.z. de $x(t)$ ($X_i = 0$ ou 1) sans faire intervenir les propriétés des moments du second ordre de x ($R_x(t) = E[x(t) \cdot x(t+b)]$)

Le bruit à bande étroite $x(t)$ étant stationnaire, il faut abandonner la notion de séquence E qui destationnarise par son conditionnement $X_0 = 0$, et chercher à exprimer $P_E(T)$ en fonction de $R_x(T)$ autocorrélation de x . Rappelons que pour $T = kT_0$, $R_x(T)$ est la probabilité pour un p.z. (t_{i-1}) pris au hasard d'avoir un p.z. (t_i) tel que $t_i - t_{i-1} \in T(1 \pm \epsilon)$ $\epsilon \approx \delta/T$ (cf fig 9 où $T = kT_0$)

Ce mode d'estimation de R_x permet, au prix d'une hypothèse assez générale de symétrie de la raie spectrale, d'en estimer directement l'enveloppe.

Notations et rappels :

La description au second ordre d'un processus à bande étroite est rappelée fig. 10. On vérifie facilement (CF par exemple [2] pp 169) que pour une fonction pair (raie symétrique) on a $\rho_{12} = 0$.

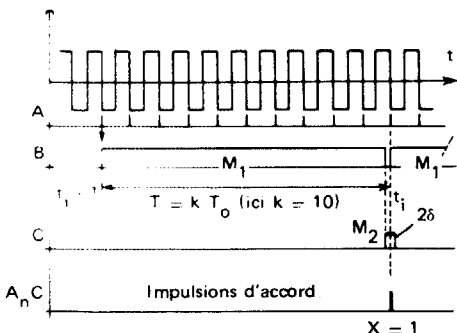


Fig.9 - Principe du comptage pour $P_E(T)$

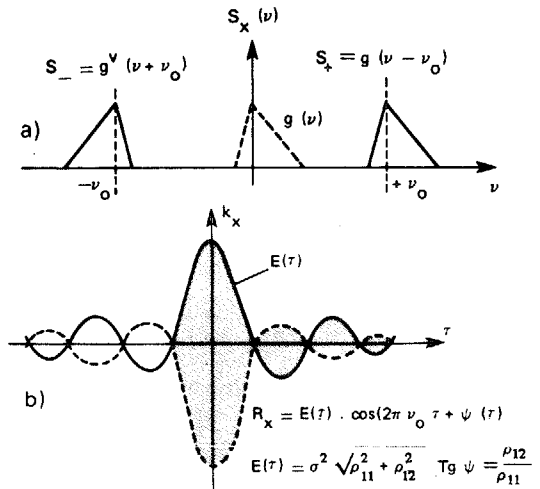


Fig.10 - Description au second ordre de $X(t)$

- a) Densité spectrale
- b) Auto corrélation

En décrivant le processus Gaussien centré $x(t)$ par module et phase [2] [3] :

$$(16) \cdot x(t) = V(t) \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi(t))$$

avec $V > 0$ et par exemple $\varphi \in (0, 2\pi)$; $E\varphi = \pi$ on trouve que la densité du couple $(\varphi(t), \varphi(t+b))$ est donnée par $g(\xi)$ définie par (17)

$$(17) \quad g(\xi) = \frac{1}{4\pi^2(1-\beta^2)^{3/2}} \left[(1-\beta^2)^{1/2} + \beta(\pi - \cos^{-1}\beta) \right]$$

pour $\varphi(t)$ et $\varphi(t+b) \in (0, 2\pi)$

= 0 ailleurs

$$\text{ou } \beta \approx \rho_{11}(b) \rho_{11}(t) + \rho_{12}(b) \cdot \sin \xi$$

Pour pouvoir à l'aide du seul paramètre $P_E(b)$ calculer l'enveloppe E (fig.10), on est conduit à supposer $\rho_{12} = 0$, correspondant à une raie symétrique ce qui est assez bien vérifié pour des spectres à bande étroite.

Définition :

On appelle P_α la probabilité pour que le déphasage modulo 2π $(\varphi(t+b) - \varphi(t))_{2\pi}$ soit en valeur absolue inférieure à α ($\alpha < \pi$) sachant que $\varphi(t) = \varphi_0$

Comme $P(\varphi, \varphi(b))$ ne dépend que de $\xi = \varphi(b) - \varphi$ et que $P(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} + \varphi_0 \in (0, 2\pi)$ on a :

$$(18) \quad P_\alpha = 2\pi \int_{-\alpha}^{+\alpha} g(\xi) \cdot d\xi$$

où g est donnée par (17).

La relation avec "isochronisme" des p.z. est évidente : il suffit de remarquer d'après (16) (où $V(t) > 0$) que les p.z. pour une "trajectoire" $x(t)$ sont donnés par les φ tels que :

$$\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi(t) = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \quad l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

CALCUL DE FAUSSE ALARME EN DETECTION DE FREQUENCE PURE
 LIEE AUX PASSAGES PAR ZERO D'UN PROCESSUS A BANDE ETROITE.
 POSSIBILITE D'ESTIMATION DE L'ENVELOPPE DE SON AUTO-CORRELATION.

d'où dans les notations de la figure (9) :

$$\frac{2\pi}{T_0} |t_i - t_{i-1}| \text{ Mod } 2\pi = |(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) \text{ Mod } 2\pi|$$

Soit le temps local u au voisinage de t_i (fig.11) tel que $u = 0$ au centre de la fenêtre :

$$\tilde{t}_i \pm \delta \quad \text{ou} \quad \tilde{t}_i \cong t_{i-1} + kT_0$$

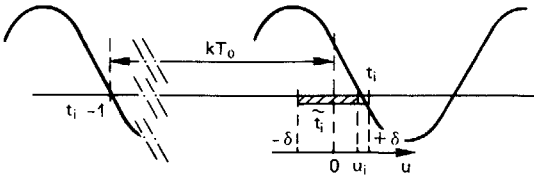


Fig.11 -

La relation précédente s'écrit alors :

$$(19) \frac{2\pi}{T_0} |u_i| = |(\varphi(t_{i-1} + kT_0 + u_i) - \varphi(t_{i-1})) \text{ Mod } 2\pi|$$

En utilisant la norme quadratique

$$d^2 \cong E |(\varphi(t_{i-1} + kT_0 + u_i) - \varphi(t_{i-1} + kT_0)) \text{ Mod } 2\pi|^2$$

on a, d'après la stationnarité de $\varphi(t)$:

$$d^2 = E |(\varphi(u_i) - \varphi(0)) \text{ Mod } 2\pi|^2 = 2(R_\varphi(0) - R_\varphi(u_i))$$

L'hypothèse de finesse de la raie spectrale autour de ν_0 signifie que le spectre associé à l'enveloppe $(\varphi_{11}(b))$ est basse fréquence, donc celui de $(\varphi(b))$ qu'il détermine complètement par (17).

Il en résulte que

$$d^2 \ll 1$$

autorisant l'approximation de (19) par

$$\frac{2\pi}{T_0} |u_i| = |(\varphi(t_{i-1} + kT_0) - \varphi(t_{i-1})) \text{ Mod } 2\pi|$$

A l'isochronisme $-E$ correspond donc la probabilité de déphasage P_α tel que

$$(20) P_E = P_\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = 2\pi \frac{\delta}{T_0} = 2\pi \epsilon$$

où P_α s'exprime par (18) en fonction de $f_{11}(b)$ avec ici $b = kT_0$

Application au calcul de l'enveloppe $f(b)$ pour $b = T$.

En notant (18) :

$$P \rightarrow P = f(P) \quad (P_{11} \text{ étant donné } P)$$

il s'agit simplement de calculer

$$P = f^{-1}(P)$$

Pour les quelques vérifications de principe qui ont été faites, on a utilisé une approximation par excès de g dans (18), notée

$$P^+ = \tilde{f}(P^+), \text{ choisie pour être inversible } P^+ = \tilde{f}^{-1}(P^+)$$

qui sous les conditions ($f' > f$; $f'' > f'$; $f''' > 0$) fournit $P = f^{-1}(P)$ par l'itération évidente :

$$P_{k-1}^+ = \tilde{f}^{-1}(P_{k-1}^+)$$

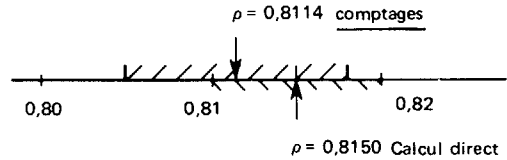
$$P_k^+ = P_{k-1}^+ + (P - f(P_{k-1}^+))$$

avec $P_1^+ = P$

Exemple de résultat :

Pour le processus dont la DSP est donnée fig.6 et pour le retard $b = 10 T_0$ on a estimé par calcul direct $\rho(b)$ ($\rho = 1/N \sum x_i x_{i+k}$) et par la méthode précédente. Dans les deux méthodes les écarts types ont aussi été estimés, fournissant les intervalles de confiance (20) à 95 %.

On a obtenu :



Il est bien évident qu'une méthode de ce type ne peut prétendre à l'estimation précise de corrélation puisqu'elle repose sur deux hypothèses restrictives : l'étroitesse de la raie spectrale et sa symétrie.

On peut cependant l'envisager lorsque la précision de l'estimation n'est pas nécessaire car elle présente un double avantage :

- elle ne comporte que des comptages
- elle permet une certaine autoadaptivité, utile pour de s'assurer par exemple que la démodulation est correcte (Test de l'équiprobabilité de $-\delta < u < 0$ et de $0 < u < \delta$) et pour l'adaptation de la largeur de la fenêtre (2δ) à la finesse de la raie en gardant P_E voisine de 0,5 par exemple ce qui est de plus favorable à son estimation.

REFERENCES

- 1 AUZOLLE F. et HAY J. Méthodes de mesure et d'analyse du bruit des avions en vol. L'Aéronautique et l'Astronautique n°33 (1972-1) p. 17-28
- 2 DAVENPORT-ROOT An introduction to the theory of, random signals and noise. Mc GRAW HILL, KOGAKUSHA) (1958)
- 3 MIDDLETON D. An introduction to statistical communication theory - M Mc GRAW HILL (1960)
- 4 PAPOULIS A. Probability, random variables, and stochastic processes. Mc GRAW HILL (1965)
- 5 COUPRY G. Mesure de densités spectrales de la turbulence par une méthode déduite des formules de RICE TP ONERA, n° 243 (1965)
- 6 HAY J. Propriétés des passages par zéro d'un processus à bande étroite. La Recherche Aérospatiale 1980-4 pp 271-281.

