HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981

DEPENDANCE TEMPORELLE DES TESTS OPTIMAUX EN DETECTION ACTIVE LORSQUE LE BRUIT EST NON STATIONNAIRE.

FORSTER Alfred

UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR - 83130 LA GARDE

RESUME

Le présent texte développe l'étude de la forme séquentielle des tests optimaux de Neyman-Pearson d'estimation des paramètres du signal lorsque le bruit (supposé gaussien) est soit non stationnaire mais de covariance normalisée connue, soit localement stationnaire mais de covariance dépendant d'un paramètre vectoriel aléatoire. On peut en particulier tester prioritairement, à un moment donné, les hypothèses "Signal" qui correspondraient à une fin de réception du signal antérieure à cet instant ; c'est ce que nous avons appelé "test partiel d'hypothèses complètes" (tests non prédictifs). La prise de décision partielle utilisant l'observation $Z(t)$ de 0 à t_1 est par la suite comparée à celle prise à t_2 ($t_2 > t_1$). Les rapports de probabilités à posteriori nécessaires pour la décision finale peuvent être calculés progressivement dans le temps sur observation limitée et être utilisés pour une décision partielle optimale. Cette possibilité permet de réduire le nombre et la complexité des filtres (ou calculs en temps réel) nécessaires. Une étude détaillée de la multiplicité des filtrages suivant les propriétés du bruit, les différents paramètres du signal et les instants de décision partielle optimale, est présentée.

SUMMARY

This work explicits the sequential formulation of the Neyman-Pearson's signal parameters optimal estimation test in the case of a non stationary gaussian noise with random mean power or with tangential stationary model depending on a random vectorial parameter.

We can test at every moment the hypotheses corresponding at a complete signal. This test will be called "partial test of complete hypotheses". The partial decision which uses the observation $Z(t)$ along the time interval from 0 to t_1 is afterwards compared with the decision at moment t_2.

The posteriori probability quotients which are necessary for the terminal decision can be calculated progressively in the time on a limited observation and can be used for a partial optimal decision.

This possibility can reduce the number of necessary filters and the complexity of the filtering device. A detailed study of the filtering multiplicity according to the noise properties, to the signal parameters and to the optimal partial decision moments is developped.

DEPENDANCE TEMPORELLE DES TESTS OPTIMAUX EN DETECTION ACTIVE LORSQUE LE BRUIT EST NON STATIONNAIRE

I - PREAMBULE

Le problème posé est la détection et l'estimation optimale du paramètre vectoriel $\vec{\theta}$ (θ,k) d'un signal de durée T et de retard $\theta \in [0,\mathcal{T}]$ mélangé additivement à un bruit gaussien non stationnaire dépendant d'un paramètre aléatoire vectoriel $\vec{\rho}$ à partir de l'observation $Z(t)$ comprise dans la fenêtre temporelle $t \in [0,\mathcal{T} + T]$. On se réfèrera principalement au test optimal de Neyman-Pearson à probabilité de fausse alarme conditionnelle constante [voir réf.].

Nous traiterons ici de deux situations différentes mais de complexité comparable.

1° Le bruit non stationnaire ne dépend que d'un seul paramètre aléatoire ; la puissance moyenne "a".
Donc $\vec{\rho} = (a,0,0\ \ldots)$
et :
la covariance du bruit normalisé X(t) est une fonction connue de deux variables ce qui veut dire que le bruit normalisé est un bruit non stationnaire sur l'intervalle d'analyse $[0,\mathcal{T} + T]$ du paramètre $\vec{\theta}$ du signal.

Ce problème se subdivise en deux suivant que le temps de non variation de "a" est égal ou plus petit que la durée de l'intervalle d'analyse ("a" est alors soit une variable aléatoire soit une fonction aléatoire).

2° Le bruit non stationnaire dépend de plusieurs paramètres aléatoires. Donc
$\vec{\rho} = (a,b,c\ \ldots)$
et :
la covariance du bruit normalisé X(t) est une fonction d'une variable (fonction de corrélation) de forme connue dépendant des paramètres aléatoires $\vec{\rho} = (b,c\ \ldots)$ ce qui veut dire que le bruit normalisé est :

a) Un bruit stationnaire sur l'intervalle d'analyse si les paramètres b,c,... ne varient pas pendant la durée de l'analyse (b,c, ... variables aléatoires).

b) Un bruit non stationnaire sur l'intervalle d'analyse par l'intermédiaire des paramètres si ceux-ci varient pendant la durée d'analyse (b,c... fonctions aléatoires).
La durée pendant laquelle b,c... ne varient pas a alors le sens du temps de stationnarité du bruit normalisé. Chacune de ces situations se subdivise elle-même en deux suivant que "a" varie ou ne varie pas dans la fenêtre d'analyse.

La connaissance préalable de la forme générale de la covariance du bruit normalisé est essentielle car elle change radicalement la situation vis à vis du traitement de l'information. On peut en particulier déterminer par avance la structure des opérateurs à faire agir sur l'observation (dans la mesure où certaines fonctions inverses existent et lorsque certaines conditions de séparabilité de noyaux sont remplies).

Si l'on ignorait tout de la covariance du bruit la possibilité de réalisation sous forme de filtres causals physiquement réalisables ainsi que l'existence d'estimateurs parfaits serait compromise.

Le système de filtrage est respectivement suivant les cas 1° et 2° envisagés :

- un système linéaire non adaptatif (pas de b,c,...) associé à une normalisation adaptative d'analyse en analyse ou continuement adaptative.
- un système linéaire adaptatif d'analyse en analyse ou continuement adaptatif (équivalent alors dans ce cas à un système linéaire ou les coefficients fonctions du temps sont les estimées successives des paramètres) associé à une normalisation adaptative d'analyse à analyse ou continuement adaptative.

Influence de la mémoire statistique du bruit normalisé.

Si le temps de non variation de $\vec{\rho}$ est plus petit que la durée d'analyse il faut alors utiliser l'estimateur parfait (s'il existe) courant fonction du temps. Ceci est généralement possible pourvu que le temps de non variation de $\vec{\rho}$ soit au moins égal à la mémoire statistique locale Δ (supposée finie) du bruit normalisé.

L'estimation parfaite de "a" peut alors être forgée dans :

- le premier cas (1°) à partir de $\Gamma(t+\tau,t)=\Gamma_t(\tau)$ avec l'observation contenue dans la tranche temporelle $[t - \frac{\Delta}{2}, t + \frac{\Delta}{2}]$

- le deuxième cas (2°) à partir de $\Gamma_{\hat{\vec{\rho}}}(\tau)$ avec $\vec{\rho} = (b,c\ldots)$ étant lui-même estimé avec l'observation contenue dans la tranche temporelle $\left[t - \frac{\Delta}{2}, t + \frac{\Delta}{2}\right]$.

Dans le texte qui suit X(t) représentera le vecteur information qui sera en absence de signal supposé être le bruit normalisé. $S_{\vec{\theta}}(t)$ est le signal normalisé se déduisant d'un gabarit S(t) suivant k et θ (par translation suivant θ).

Nous ferons le calcul en utilisant $\Gamma(t',t)$ qui doit être remplacé dans le cas d'un bruit du 2e type par $\Gamma_{\hat{\vec{\rho}}}(t'-t)$ où $\hat{\vec{\rho}}$ est l'estimation parfaite de $\vec{\rho}$

Remarque importante.

Si l'on a un bruit du 2e type et que le paramètre vectoriel $\vec{\rho}$ varie rapidement dans la durée du signal et dans l'intervalle d'analyse, le système post-blanchiement ne peut plus être réalisé sous forme de filtres ayant une réponse percussionnelle et réalisant une convolution. La simplification développée ici disparait. Il convient d'utiliser alors une batterie de L.M multiplieurs-intégrateurs infinis.

II - MULTIPLICITE DES FILTRAGES SUIVANT LES DIFFERENTS PARAMETRES DU SIGNAL ET LES INSTANTS DE DECISION PARTIELLE OPTIMALE (Forme séquentielle des tests)

La mise en oeuvre des tests optimaux (1) nécessite l'élaboration à partir de l'observation des quantités

$$(1) \quad R_{\vec{\theta}\, t'_0} = \int_0^{t'_0} Q_{\vec{\theta}}(t)\cdot X(t)\cdot dt$$

qui apparaissent comme des filtrées de l'observation. Les filtres sont donnés par

$$(2) \int_0^{t'_0} \Gamma(t,t')\cdot Q_{\vec{\theta}}(t')dt' = S_{\vec{\theta}}(t) \text{ pour } 0<t<t'_0$$

$Q_{\vec{\theta}}$ est donc, sauf cas particulier, une fonction de t'_0. $\vec{\theta}\ \{^{\theta}_{k}\ \text{ou}\ ^{\tau}\}$ est le paramètre du signal. De façon générale la multiplicité de ces filtrages, suivant les différents instants de décision et paramètres du signal, est maximale dans le cas d'un bruit non stationnaire. Ces filtres doivent alors être modifiés de décision partielle à décision partielle ; ce

(1) en particulier celui de Neyman-Pearson à probabilité de fausse alarme conditionnelle constante.

sont des filtres linéaires non homogènes (systèmes linéaires à paramètres variables dans le temps).

II.1 Cas général

Ces filtres s'ils existent en tant que solution mathématique de l'équation (2) sont des filtres linéaires non homogènes causals (système linéaire non stationnaire physiquement réalisable).

En effet formellement on a

$$Q_{\vec{\theta}}(t'_0,t) = \int_0^{t'_0} \bar{\Gamma}^{1}_{0,t'_0}(t,t')S_{\vec{\theta}}(t')\cdot dt'$$

$$\text{avec} \int_0^{t'_0} \bar{\Gamma}^{1}_{0,t'_0}(t,t')\cdot\Gamma(t',t'') = \delta(t-t'')$$

défini pour $0 < t < t'_0$ et $0 \leqslant t'_0 \leqslant \mathcal{T}+T$; $0 < t,t'' < t'_0$

On peut y associer la fonction de pondération (réponse percussionnelle) d'un système linéaire non stationnaire causal

$K_{\vec{\theta}}(t'_0,t) = U(t)\ .\ Q_{\vec{\theta}}(t'_0,t)\ .\ U(t'_0-t)$ définie de $-\infty$ à $+\infty$, prenant des valeurs non nulles dans $0, \mathcal{T}+T$ et nulle pour $t'_0 < t$

$$U(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

On a alors

$$R_{\vec{\theta}\, t'_0} = \int_0^{t'_0} Q_{\vec{\theta}}(t'_0,t)\cdot X(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\vec{\theta}}(t'_0,t)\cdot X(t)dt$$

$R_{\vec{\theta},t'_0}$ est obtenu comme sortie à l'instant $t'=t'_0$ d'un filtre linéaire non homogène causal de réponse percussionnelle $K_{\vec{\theta}}(t',t)$ attaqué par X(t).(On a de plus la propriété évidente $K_{\vec{\theta}}(t'_0,t) \equiv 0$ et $Q_{\vec{\theta}}(t'_0,t) \equiv 0$ pour $\theta > t'_0$).

$$Y_{\vec{\theta}}(t') = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\vec{\theta}}(t',t)\cdot X(t)\cdot dt$$

donc

$$R_{\vec{\theta},t'_0} = \left[Y_{\vec{\theta}}(t')\right]_{t'=t'_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\vec{\theta}}(t'_0,t)\cdot X(t)\cdot dt$$

A $\vec{\theta}$ donné le même filtre linéaire non homogène causal fournit en sortie de façon continue dans le temps, les valeurs $R_{\vec{\theta},t'}$ pour les décisions partielles aux instants courants t'.

Si l'on a L.M valeurs de paramètres et N instants de décision, on peut éclater la batterie précédente nécessaire de L.M filtres linéaires causals non homogènes en une batterie de L x M x N/2 filtres linéaires causaux homogènes ayant par exemple la forme suivante :

DEPENDANCE TEMPORELLE DES TESTS OPTIMAUX EN DETECTION ACTIVE LORSQUE LE BRUIT EST NON STATIONNAIRE.

Soit $K'_{\vec\theta,t'_0}(t)$ la réponse percussionnelle d'un tel filtre homogène d'indice $\vec\theta$ et t'_0 définie comme suit :

$$K'_{\vec\theta,t'_0}(t) = K_{\vec\theta}\,(t'_0,\ t'_0-t)$$

Les sorties de ces filtres linéaires homogènes causals à un instant quelconque t' sont

$$Y'_{\vec\theta,t'_0}(t') = \int K'_{\vec\theta,t'_0}(t'-t)\cdot X(t)\cdot dt$$

Observons précisément (et uniquement) les sorties des filtres d'indice t'_0 à l'instant t'_0

On a

$$\left[Y'_{\vec\theta,t'_0}(t')\right]_{t'=t'_0} = \int K'_{\vec\theta,t'_0}(t'_0-t)\cdot X(t)\cdot dt$$

$$= \int K_{\vec\theta}\,(t'_0,t)\cdot X(t)dt = R_{\vec\theta,t'_0}$$

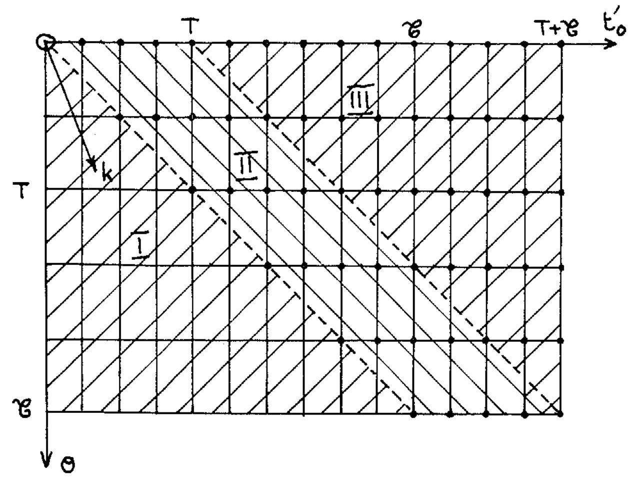
Les sorties des filtres d'indice t'_0 seront examinées uniquement à l'instant t'_0 et fourniront à cet instant l'ensemble des valeurs $R_{\vec\theta,t'_0}$ suivant $\vec\theta$.

Il est à noter que même en cas de mémoire statistique finie Δ du bruit non stationnaire, il est nécessaire de recalculer $R_{\vec\theta,t''_0}$ après $R_{\vec\theta,t'_0}$ même si $t''_0 > t'_0 + \Delta$ puisque la forme des réponses percussionnelles des filtres dépend de t'_0.

N'	instants de décision dans $]0,\mathcal{C}]$	$\frac{N'}{N''} = \frac{\mathcal{C}}{T}$
N"	instants de décision dans $]0,T]$	
M	retards dans $[0,\mathcal{C}]$	
L	dopplers	

Nombre de filtres linéaires homogènes nécessaires pour chaque valeur de k

$$N''.M + \frac{(N'+2)\cdot M}{2} - 1 = M\cdot\left[N'' + \frac{N'}{2} + 1\right] - 1$$

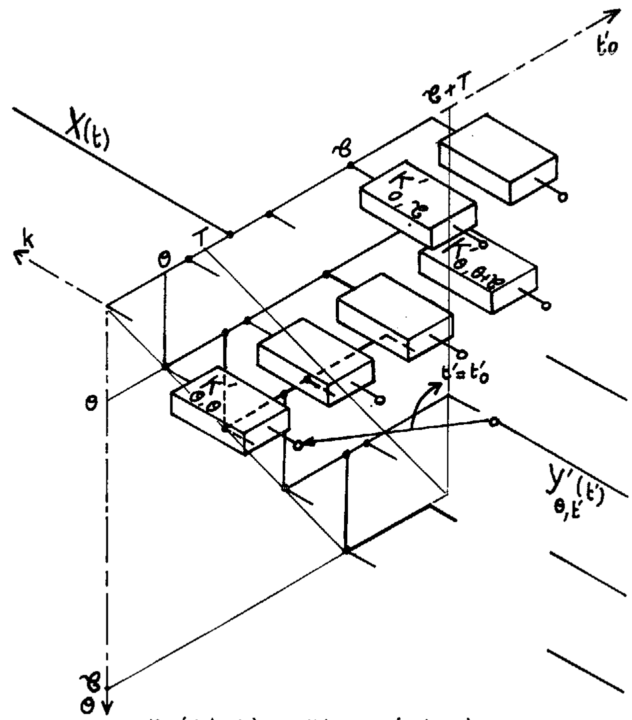


I : Zone des hypothèses prédictives
II : Zone des hypothèses incomplètes
III : Zone des hypothèses complètes

A un instant t'_0 on utilise pour les tests les sorties des filtres de la colonne t'_0

Les décisions partielles optimales sur hypothèses complètes nécessitent $\frac{(N'+2)L\cdot M}{2}$ filtres.

Le filtre linéaire $K_{\vec\theta}(t',t)$ se trouve donc synthétisé sous la forme



$$K_{\vec\theta}(t',t) = K'_{\vec\theta,t'}(t'-t)$$

$$Y_{\vec\theta}(t') = Y'_{\vec\theta,t'}(t') = \int K'_{\vec\theta,t'}(t'-t)X(t)dt$$

$$= \int K_{\vec\theta}\,(t',t)\cdot X(t)\cdot dt$$

II.2 - Cas de séparabilité

On peut également transcrire formellement le filtrage initial à l'aide d'une factorisation sous la forme

$$R_{\vec\theta\ t'_0} = \int_0^{t'_0} \tilde X(t)\cdot \tilde S_{\vec\theta}\,(t)\cdot dt$$

avec

$$\tilde X(u) = \int_0^{t'_0} D\,(u,t)X(t)dt \qquad \Gamma(t,t') = \int_0^{t'_0} D(t,u)D(t',u)du$$

$$\tilde S_{\vec\theta}(u) = \int_0^{t'_0} \overset{\#}{D}(u,t)S_{\vec\theta}(t)dt \qquad \overset{-1}{\Gamma}(t,t') = \int_0^{t'_0} \overset{\#}{D}(u,t)\overset{\#}{D}(u,t')du$$

$$0 < t,t' < t'_0$$

(Dans le cas général $\tilde X(u)$, $\tilde S_{\vec\theta}(u)$, $D(t,u)$, $\overset{\#}{D}(u,t)$ pour $0 < u,t < t'_0$ sont des fonctions de t'_0).

DEPENDANCE TEMPORELLE DES TESTS OPTIMAUX EN DETECTION ACTIVE LORSQUE LE BRUIT EST NON STATIONNAIRE.

Le filtrage apparait alors comme une opération à deux étages

- Un[(1)] filtrage de stationnarisation et blanchiement,
- suivi d'un filtrage qui est en général de même nature et de même complexité que le filtrage effectué par $Q_{\vec{\theta}}(u)$.

Cette deuxième façon de voir, qui n'amène pas toujours de notable simplification pratique (en particulier lorsque $\tilde{S}_{\vec{\theta}}(u)$ pour $u \in (0, t'_0)$ est une fonction implicite de t'_0), est théoriquement importante en ce qui concerne l'étude des propriétés de résolution attachées aux signaux en détection.

Les différences entre les rapports des probabilités à postériori intervenant dans les diverses décisions partielles apparaissent clairement lorsque $\tilde{X}(t)$ (à observation $X(t)$ donnée) et $\tilde{S}_{\vec{\theta}}(t)$ ont une détermination indépendante des instants t'_0 pour tout $t \in [0, \mathcal{T} + T]$. (Cela veut dire que $\tilde{X}(t)$ et $\tilde{S}_{\vec{\theta}}(t)$ transformées de $X(t)$ et $S_{\vec{\theta}}(t)$ restreints à l'intervalle $t < t'_0$ pour une décision à t'_0 sont des restrictions à l'intervalle $[0, t'_0]$ de $\tilde{X}(t)$ et $\tilde{S}_{\vec{\theta}}(t)$ transformées élaborées à partir de $X(t)$ et $S_{\vec{\theta}}(t)$ complets ($t \leqslant \mathcal{T} + T$) pour la décision à $\mathcal{T} + T$. Ceci n'est d'ailleurs généralement possible pour $\tilde{X}(t)$ que si l'on dispose d'une observation supplémentaire de $X(t)$ pour $-\beta < t < 0$ sur une durée β au minimum égale à la mémoire statistique du bruit).

Soit Δ la valeur maximale de la mémoire statistique du bruit non stationnaire. Le signal transformé $\tilde{S}_{\vec{\theta}}$ par le filtre de stationnarisation blanchiement (il existe alors un filtre linéaire non homogène causal de stationnarisation blanchiement élaborant $\tilde{X}(t)$ à partir de $X(t)$) a alors pour support maximal l'intervalle $(\theta, \theta + T + \Delta)$ quoique $\tilde{S}_{\vec{\theta}}(t)$ ne se déduise pas suivant θ d'un gabarit par translation.

L'ensemble des hypothèses complètes à t'_0 (t_0 quelconque entre 0 et $\mathcal{T}$) donne lieu à $t'_0 + \Delta$ à un ensemble de rapports de probabilité invariant à partir de cet instant $t'_0 + \Delta$.

A θ donné (θ quelconque entre 0 et $\mathcal{T}$) le rapport de probabilité sur observation $\in(\theta, \theta+T+\Delta)$ est invariant à partir de $\theta+T+\Delta$ et coïncide avec le rapport nécessaire pour toute décision optimale partielle aux instants $t'_0 > \theta + T + \Delta$ ou éventuellement finale à l'instant $\mathcal{T} + T + \Delta$

Nous avons $R_{\vec{\theta}, t'_0+\Delta} = R_{\vec{\theta}, \theta+T+\Delta} = R_{\vec{\theta}, \mathcal{T}+\Delta} = R^{*}_{<\theta, \theta+T+\Delta>}$ pour $\theta < t_0$

et ceci pour tout t_0 compris entre 0 et $\mathcal{T}$ ($T < t'_0 < \mathcal{T} + T$)

$$\left[R_{\vec{\theta}, \theta+T+\Delta} - R_{\vec{\theta}, \theta}\right] = R^{*}_{<\theta, \theta+T+\Delta>}$$

* = sur observation juste suffisante ($t_0 = t'_0 - T$)

Cette propriété apparaît immédiatement dans ce cas en reposant le problème de décision statistique après filtrage de stationnarisation blanchiement puisque alors

$$p_0(\tilde{X}_{<0, \mathcal{T}+\Delta>}) = p_0(\tilde{X}_{<0, \tau_i>}) \cdot p_0(\tilde{X}_{<\tau_i, \tau_i+T+\Delta>}) \cdot p_0(\tilde{X}_{<\tau_i+\Delta+T, \mathcal{T}+\Delta>})$$

$$\tau_i \leqslant t_0 \quad = p_0(\tilde{X}_{<0, t'_0+\Delta>}) \cdot p_0(\tilde{X}_{<t'_0+\Delta, \mathcal{T}+\Delta>})$$

$$p_i(\tilde{X}_{<0, \mathcal{T}+\Delta>}) = p_0(\tilde{X}_{<0, \tau_i>}) \cdot p_i(\tilde{X}_{<\tau_i, \tau_i+T+\Delta>}) \cdot p_0(\tilde{X}_{<\tau_i+T+\Delta, \mathcal{T}+\Delta>})$$

$$= p_i(\tilde{X}_{<0, t'_0+\Delta>}) \cdot p_0(\tilde{X}_{<t'_0+\Delta, \mathcal{T}+\Delta>})$$

D'où $$\frac{\pi_i}{\pi'} \cdot \frac{p_i(\tilde{X})}{p_0(\tilde{X})} = \frac{\pi_i}{\pi'} \cdot \frac{p_i(\tilde{X}_{t'_0+\Delta})}{p_0(\tilde{X}_{t'_0+\Delta})} = \frac{\pi_i}{\pi'} \cdot \frac{p_i(\tilde{X}_{<\tau_i, \tau_i+T+\Delta>})}{p_0(\tilde{X}_{<\tau_i, \tau_i+T+\Delta>})}$$

II-21 - <u>Cas où $\tilde{S}_{\vec{\theta}}(t)$ et $D^{\#}(t', t)$ ont une détermination unique indépendante des instants t'_0</u>

Les filtres linéaires homogènes causals à utiliser en aval du filtre linéaire non homogène causal de stationnarisation blanchiement $D^{\#}$ (appelé $H^{-1}(t', t)$) ont alors pour réponses percussionnelles

$$\tilde{K}_{\vec{\theta}, t'_0}(t) = U(t) \cdot \tilde{S}_{\vec{\theta}}(t'_0 - t) \cdot U(t'_0 - t)$$
$$= U(t) \cdot \tilde{S}_{\vec{\theta}}(t'_0 - t) \cdot U(t'^{-\theta}_0 - t)$$

puisque $\tilde{S}_{\vec{\theta}}(x) \equiv 0$ pour $x < \theta$ c'est à dire que $\tilde{K}_{\vec{\theta}, t'_0} \equiv 0$ pour $t > t'_0 - \theta$; de plus $\tilde{K}_{\vec{\theta}, t'_0} \equiv 0$ $\forall t$ si $\theta > t'_0$

Les sorties de ces filtres aux instants correspondants à leur indice sont

$$\left[Y_{\vec{\theta}, t'_0}(t')\right]_{t'_0} = \int \tilde{K}_{\vec{\theta}, t'_0}(t'_0 - t) \cdot \tilde{X}(t) \cdot dt$$
$$= \int_0^{t'_0} \tilde{X}(t) \cdot \tilde{S}_{\vec{\theta}}(t) dt = R_{\vec{\theta}, t'_0}$$

(1) Si $\tilde{X}(u)$ est un bruit blanc en l'absence de signal.

DEPENDANCE TEMPORELLE DES TESTS OPTIMAUX EN DETECTION ACTIVE LORSQUE LE BRUIT EST NON STATIONNAIRE.

$$Y_{\vec{\theta},t'_0}(t'_0) = R_{\vec{\theta},t'_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta > t'_0 \\ \displaystyle\int_{\theta}^{t'_0} \tilde{X}(t)\tilde{S}_{\vec{\theta}}(t)dt & \text{si } \theta < t'_0 \\ \displaystyle\int_{\theta}^{\theta+T+\Delta} \tilde{X}(t)\tilde{S}_{\vec{\theta}}(t)dt = \begin{cases} R^*_{<\theta,\theta+T+\Delta>} \\ R_{\vec{\theta},\theta+T+\Delta} \\ Y_{\vec{\theta},\theta+T+\Delta}(\theta+T+\Delta) \end{cases} & \end{cases}$$

si $t'_0 > \theta+T+\Delta$ et si mémoire statistique Δ finie

Les décisions partielles utilisant ces sorties sont optimales.

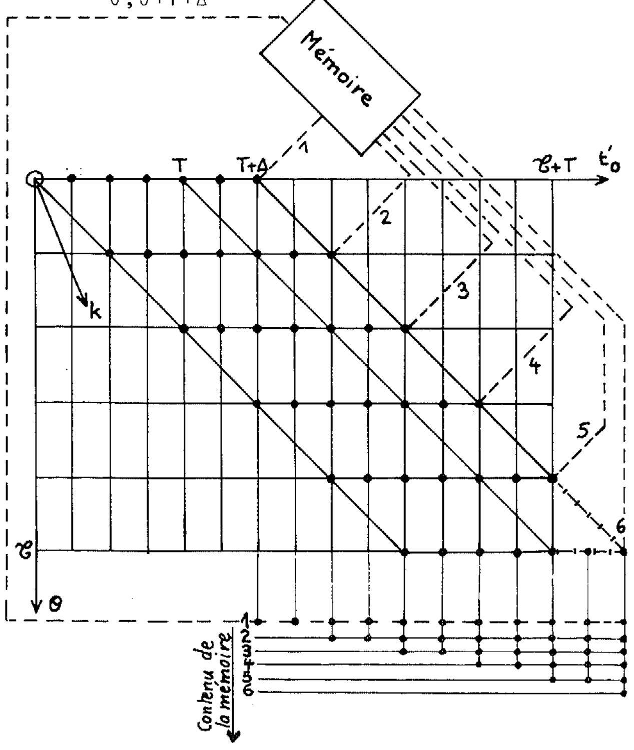
Pour une hypothèse signal de θ donné n'intervient, pour deux décisions partielles à des instants différents où elle est complète, qu'un décalage temporel (retard) de la réponse percussionnelle. Il suffit de mémoriser le premier résultat. Ce n'est bien sûr possible que si le bruit a une mémoire statistique finie

$$Y_{\vec{\theta},\theta+T+\Delta+\varepsilon}(\theta+T+\Delta+\varepsilon) = Y_{\vec{\theta},\theta+T+\Delta}(\theta+T+\Delta)$$

$$\text{et} \quad R_{\vec{\theta},\theta+T+\Delta+\varepsilon} = R_{\vec{\theta},\theta+T+\Delta} = R^*_{<\theta,\theta+T+\Delta>} \qquad \text{si } \varepsilon > 0$$

Il suffit de réaliser à θ donné les filtres homogènes causals $\tilde{K}_{\vec{\theta},\theta+T+\Delta-\gamma}(t)$ avec $\gamma \in [\,0,T+\Delta\,]$

Pour les décisions partielles optimales sur hypothèses $\tilde{S}_{\vec{\theta}}$ complètes ($\theta < t_0$) il suffit de réaliser pour chaque valeur de θ le seul filtre $\tilde{K}_{\vec{\theta},\theta+T+\Delta}(t)$.



à l'instant t'_0 :

Décision partielle optimale sur hypothèses complètes [signal après St.Bl.]. On utilise uniquement le contenu de la mémoire à l'instant t'_0 (y compris la valeur qu'on vient d'y inscrire à t'_0).
$\sim$L.M filtres seulement sont nécessaires de réponse percussionnelle de durée $T + \Delta$

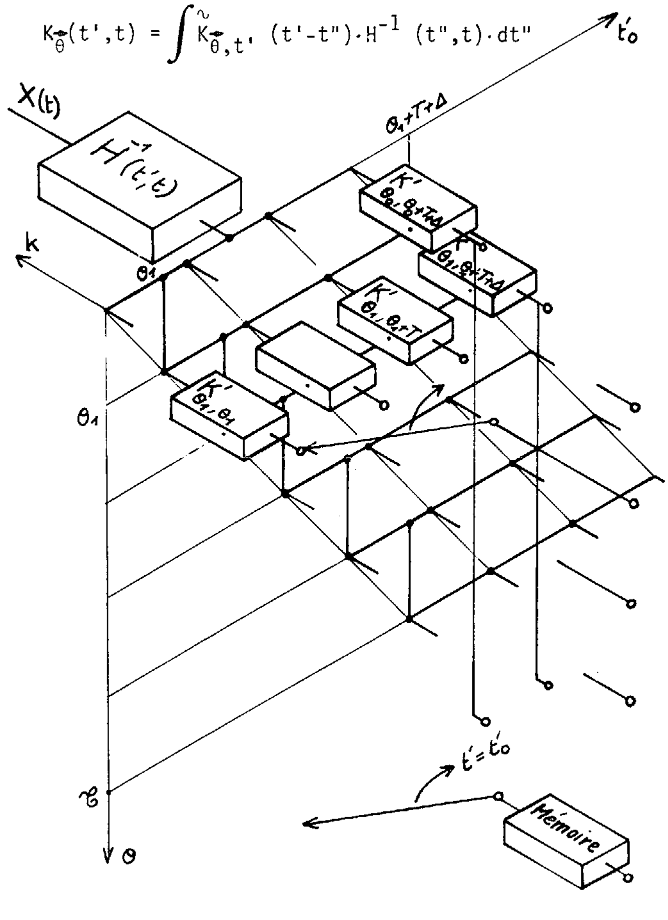
Décision partielle optimale sur hypothèses complètes [signal avant St.Bl.]. On utilise le contenu de la mémoire à l'instant t'_0 et les sorties à l'instant t'_0 des filtres de la zone de trainage et diagonale principale de la colonne t'_0.

Décision partielle optimale.
Contenu mémoire + sortie des filtres de la zone de trainage et hypothèses incomplètes de la colonne t'_0.

Décision partielle entre hypothèses complètes [signal avant St.Bl.] sur observation juste suffisante.
Contenu de la mémoire qui serait appliquée aux filtres de la diagonale principale.

Le filtre linéaire $K_{\vec{\theta}}(t',t)$ de départ se trouve donc synthétisé ici sous la forme

$$K_{\vec{\theta}}(t',t) = \int \tilde{K}_{\vec{\theta},t'}(t'-t'')\cdot H^{-1}(t'',t)\cdot dt''$$



DEPENDANCE TEMPORELLE DES TESTS OPTIMAUX DE DETECTION ACTIVE LORSQUE LE BRUIT EST NON STATIONNAIRE.

Les filtres linéaires $\tilde{K}_{\vec{\theta},t'_0}$ nécessaires sont moins nombreux et se déduisent simplement (à θ donné) les uns des autres par troncature de la réponse percussionnelle. Il suffit de mémoriser la valeur de sortie du dernier filtre à l'instant où il doit être lu.

II-211 - Cas du bruit blanc filtré par un filtre linéaire non homogène causal

Alors en l'absence de signal

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t,t')B(t')dt' \qquad \begin{array}{l} B(t) \text{ bruit blanc} \\ H(t,t') = 0 \text{ si } t' > t \end{array}$$

Soit $H^{-1}(t,t')$ le filtre inverse qui est supposé exister. La décomposition formelle précédente est alors effectivement possible sous la forme particulière suivante où le filtre de stationnarisation blanchiement est unique et non pas une fonction de t'_0.

En effet un calcul simple donne

$$\Gamma(t,t') = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t,u) \,.\, H(t',u).du$$

et

$$R_{\vec{\theta},t'_0} = \int_{-\infty}^{t'_0} \tilde{S}_{\vec{\theta}}(u)\cdot\tilde{X}(u)\cdot du$$

avec

$$\tilde{S}_{\vec{\theta}}(u) = \int_{-\infty}^{u} H^{-1}(u,t')S_{\vec{\theta}}(t')dt' \quad \text{et}$$

$$\tilde{X}(u) = \int_{-\infty}^{u} H^{-1}(u,t')\cdot X(t')\cdot dt'$$

et la propriété $\tilde{S}_{\vec{\theta}}(u) = 0$ pour $u < \theta$ qui entraîne que

$$R_{\vec{\theta},t'_0} = \int_{0}^{t'_0} \tilde{X}(u)\cdot\tilde{S}_{\vec{\theta}}(u)\cdot du$$

Les filtres ont comme déjà décrit pour réponse percussionnelle

$$\tilde{K}_{\vec{\theta},t'_0}(t) = U(t)\cdot\tilde{S}_{\vec{\theta}}(t'_0-t)\cdot U(t'_0-t)$$

Si la mémoire statistique est finie Δ alors $\tilde{S}_{\vec{\theta}}(u)$ a pour support l'intervalle $[\theta,\theta+T+\Delta]$

et $$\tilde{X}(u) = \int_{-\Delta}^{u} H^{-1}(u,t')\cdot X(t')\cdot dt' \quad \text{pour } u \geqslant 0$$

Cas particulier : Si le bruit est du type 2° le filtre $H^{-1}(t,t')$ se réduit à un filtre de blanchiement $H^{-1}_{\hat{\vec{\rho}}}(u)$.

Ainsi si la mémoire statistique maximale est de Δ il suffit de disposer de $X(t)$ appartenant de $-\Delta, t'_0$.

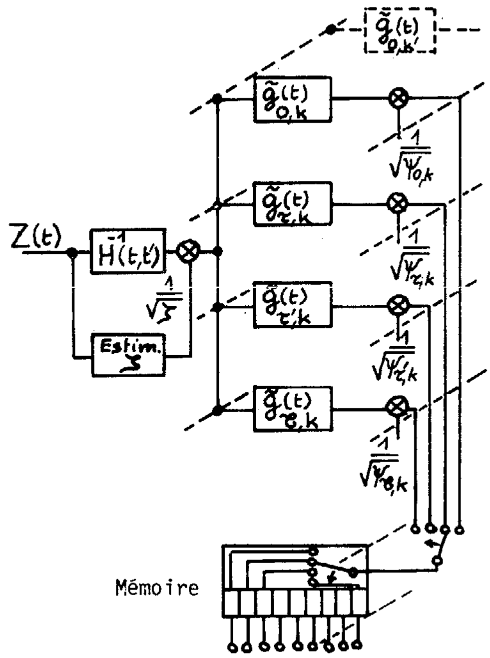
En pratique disposer de l'observation pour $t < 0$ ne complique pas du tout le problème.

Les figures suivantes montrent le système de filtrage nécessaire et donc sa simplification pour des décisions partielles optimales entre hypothèses complètes après stationnarisation blanchiement.

BRUIT GAUSSIEN DE PUISSANCE MOYENNE ALEATOIRE MAIS DE COVARIANCE DE BASE CONNUE

Décisions partielles optimales à des instants $t'_0 \in [T+\Delta, \mathcal{T}+T+\Delta]$ entre hypothèses complètes ($\tau \in [0,t'_0-T-\Delta]$) et décision finale optimale à $\mathcal{T}+T+\Delta$

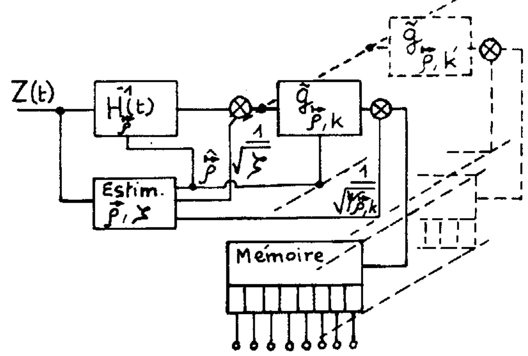
$$\tilde{g}_{\vec{\theta}}(t) = \tilde{S}_{\vec{\theta}}(\tau+T+\Delta-t) \qquad \tau \in [0,\mathcal{T}]$$



$\zeta = \hat{s}$ Vers décision binaire (seuil) et estimation des paramètres τ, k

BRUIT GAUSSIEN DE COVARIANCE INCONNUE MAIS A MODELE STATIONNAIRE TANGENT DE FORME GENERALE CONNUE DEPENDANT D'UN PARAMETRE ALEATOIRE VECTORIEL

Décisions partielles optimales à des instants $t'_0 \in [T+\Delta, \mathcal{T}+T+\Delta]$ entre hypothèses complètes ($\tau \in [0,t'_0-T-\Delta]$) et décision finale optimale à $\mathcal{T}+T+\Delta$



III - CONCLUSION

En général la mise en oeuvre du test nécessite $\sim$L.M.N/2 filtres. S'il existe uniquement un filtre linéaire non homogène de stationnarisation, la complexité du système de filtres homogènes à utiliser après stationnarisation reste en général triangulaire comme elle l'était sans stationnarisation (les signaux transformés ne se déduisent pas l'un de l'autre suivant θ par translation). Il faut $\sim$L.M.N/2 filtres (une batterie de L.M filtres conduit à un système dont le caractère sous optimal croit avec le rapport entre la mémoire statistique du bruit et la durée du signal).

Si l'on peut de plus blanchir le bruit, la complexité du système de filtres homogènes à utiliser après stationnarisation blanchiement pour une décision partielle optimale entre hypothèses complètes sur observation juste suffisante est diagonale. Il faut $\sim$L.M filtres.

Si le bruit est du type 2° et s'il existe un filtre de blanchiement, un seul filtre est alors nécessaire suivant θ pour une décision partielle optimale entre hypothèses complètes sur observation juste suffisante. Il faut $\sim$Lfiltres.

IV - BIBLIOGRAPHIE

(1) -HELSTROM C.W. - Statistical theory of signal detection - Second edition - Pergamon Press

(2) -PICINBONO B. - VEZZOSI G. - Extension du critère de Neyman-Pearson en détection d'hypothèses multiples Colloque GRETSI juin 1975 NICE, p. 455 à 462

(3) -VEZZOSI G. Détection d'un signal dans un bruit de loi incertaine Thèse de Doctorat d'Etat - Université de Paris Sud - Centre d'Orsay - Mai 1976

(4) -FORSTER A. Aspects particuliers des tests optimaux d'hypothèses multiples en détection active - Colloque National sur le traitement du signal et ses applications NICE - avril 1977 - p. 22/1 à 22/8

(5) -FORSTER A. Aspects particuliers des tests optimaux d'hypothèses multiples en détection active. Fonction d'ambiguïté généralisée intervenant dans les systèmes de détection active utilisant les tests optimaux de Neyman-Pearson Revue du CETHEDEC 2e trimestre 1980 - p. 337 à 353.