HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981

TRANSFORMEE DE BESSEL DISCRETE ET TRANSFORMEES TRIGONOMETRIQUES DISCRETES

DISCRETE BESSEL TRANSFORM AND DISCRETE TRIGONOMETRIC TRANSFORMS

J. P. CLERO

THOMSON-C.S.F. - DASM - Chemin des Travails - 06800 CAGNES SUR MER - FRANCE

RESUME

La transformée discrète de Fourier (DFT) est réalisée par un opérateur linéaire dont la matrice carrée représentative $F = \left[e^{\,i\frac{nm2\pi}{N}}\right]$ est telle que FF^* est la matrice unité ; elle constitue une discrétisation "naturelle" de la transformation de Fourier. On présente ici une transformation discrète de Bessel réalisée par une matrice carrée B dont l'orthogonalité a été vérifiée numériquement. Cette propriété entraîne d'une part, de nouvelles relations satisfaites par les fonctions de Bessel, en particulier par les fonctions trigonométriques, et qui s'avèrent utiles pour calculer la transformation continue de Bessel, très usitée dans les problèmes à symétrie cylindrique. D'autre part, la recherche d'une démonstration mathématique pose le problème très général de la discrétisation d'une transformation continue, qui se trouve masqué dans le cas de la DFT par les propriétés de l'exponentielle complexe grâce auxquelles l'inverse de la matrice F peut être trouvé immédiatement.

SUMMARY

The discrete Fourier transform is realized by a linear operator, the representative square matrix $F = \left[e^{\,i\frac{nm2\pi}{N}}\right]$ of which is such that FF^* is the matrix unity. It is a natural discretisation of the Fourier transform. A discrete Bessel transform realized by a square matrix B is presented here ; it has been "proved" numerically that B is an orthogonal matrix. From this property we set out new relations verified by Bessel functions, particularly by trigonometric functions ; they are very useful to calculate the Bessel continuous transform, often used in problems with cylindrical symmetry. On the other hand the research of a mathematical proof sets the general problem of the discretisation of a continuous transform, which is masked in the case of DFT by the properties of the complex exponential from which the inverse of the matrix F can be formed immediatly.

1 - INTRODUCTION

La validité du traitement "digital" est basée sur le fait qu'on ne perd pas d'information si on échantillonne à une cadence suffisante un signal temporel ayant une bande de fréquence limitée. Si l'on voulait effectuer cet échantillonnage à la fois en temps et en fréquence, il faudrait supposer que le signal est limité en fréquence mais aussi en temps, et de nombreux articles sont consacrés à ce sujet.

Par bonheur, il suffit d'échantillonner les N fonctions de base $e^{-j\omega_k t}$ définies sur $[0, T]$, où $\omega_k = k. \frac{2\pi}{T}$, à des instants $t_n = n\tau$ (τ est constant) pour obtenir une matrice F d'éléments $e^{-j\frac{nk2\pi}{N}}$ telle que si l'on prend N échantillons temporels, $s_n = s(t_n)$ d'un signal s(t) de spectre $\varphi(\omega)$, les nombres

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \qquad (1)$$

sont des échantillons fréquentiels de la convolution de $\varphi(\omega)$ par la fonction $\frac{\sin [N(\omega\tau/2)]}{\sin (\omega\tau/2)}$; ainsi, pour un nombre N suffisamment élevé, ces échantillons fréquentiels sont pratiquement des échantillons du spectre $\varphi(\omega)$. En outre, il est immédiat que, F^* désignant la matrice conjuguée de F, FF^* est la matrice unité, de sorte que la transformation (1), appelée T.F.D. (transformée de Fourier discrète) s'inverse très aisément. Les propriétés de F ont également permis de développer des algorithmes rapides tels que la F.F.T. (en anglo-saxon "fast Fourier transform") qui exploitent au mieux certaines caractéristiques de la matrice F.

2 - TRANSFORMATION DE BESSEL DISCRETE

Des problèmes de calcul numérique qui se posent dans le domaine des radars et des sonars nous ont amené à chercher si une discrétisation telle que celle réalisée par F pour la transformation continue de Fourier existait pour d'autres transformations et en particulier pour la transformation de Bessel, définie par :

$$f^{(\lambda)}(v) = \int_0^\infty \frac{J_\lambda(vr)}{(vr)^\lambda} p(r)\, dr$$

$$\text{avec } p(r) = \int_0^\infty (vr)^{\lambda+1} J_\lambda(vr) f^{(\lambda)}(v)\, dv$$

où J_λ est la fonction de Bessel d'ordre λ.

Cette transformation de Bessel est particulièrement intéressante car elle est en pratique très usitée et les transformations trigonométriques en sont des cas particuliers.

On a introduit en [1], la matrice discrète $B_{\lambda,\, N+1}$ d'ordre N d'éléments

$$b_{\lambda,N+1}(i,j) = \frac{2}{z_{\lambda,N+1}} \frac{J_\lambda(z_{\lambda,i} z_{\lambda,j} / z_{\lambda,N+1})}{|J'_\lambda(z_{\lambda,i})\, J'_\lambda(z_{\lambda,j})|} \; ;$$

$i,j = 1$ à N

où $z_{\lambda,s}$ désigne le $s^{\text{ième}}$ zéro (différent de zéro) de J_λ et dont l'orthonormalité avait été vérifiée numériquement pour $\lambda = 0$. On avait précisé qu'aucune démonstration n'avait été trouvée pour cette propriété.

Celle-ci reste toujours à trouver, mais l'orthonormalité a depuis été confirmée sur de très nombreux cas et jusqu'à des dimensions de matrice de l'ordre de 500 par des calculs effectués par le laboratoire de mathématiques appliquées de l'Ecole des Mines.

De plus, on peut effectivement démontrer cette orthonormalité dans le cas particulier des fonctions trigonométriques : d'abord pour la valeur particulière $\lambda=1/2$, on retrouve la transformée en sinus discrète classique [2]. Mais surtout pour la valeur $\lambda = -1/2$, on obtient une transformée en cosinus discrète différente de celles rencontrées dans la littérature [2] et qui jouit d'excellentes propriétés de régularité. On la présente dans le paragraphe ci-après.

3 - TRANSFORMEE COSINUS DISCRETE REGULIERE

On a $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$ et

$$J'_{-1/2}(z) = \frac{2z\sin z + \cos z}{2z} \times \sqrt{\frac{2}{\pi z}}$$

Comme $z_{-1/2,i+1}$ vaut $\frac{\pi}{2}(2i + 1)$, $b_{\lambda,N+1}(i,j)$ s'écrit :

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{2N+1}} \cos \frac{\pi}{2} \frac{(2i+1)\,(2j+1)}{2N+1}}$$

On montre que la matrice formée avec ces éléments est orthonormée de sorte que, si l'on pose $c_{i,j} = (b_{-1/2,N})$ et si on appelle

$$\varphi_j = \sum_{i=0}^{N-1} c_{i,j} x_i$$

la transformée en cosinus discrète régulière de la suite réelle $\{x_i\}$, on a :

$$x_i = \sum_{j=0}^{N-1} c_{i,j} \varphi_j$$

On a comparé cette transformée en cosinus discrète avec les transformées habituelles où les arguments du cosinus sont du type $\frac{\pi}{2} \frac{(2i+1)j}{N}$ et $\frac{\pi}{2} \frac{(2i+1)(2j+1)}{2N}$; il s'avère qu'elle présente en fréquence des biais nettement inférieurs et beaucoup plus réguliers en fonction du numéro de l'échantillon fréquentiel. Ceci est dû au fait que l'expression même de la transformée force les échantillons extrêmes temporels à être nuls.

Notons qu'il suffit de retourner ces fonctions cosinus discrètes pour obtenir l'expression équivalente mais avec des sinus, ce qui donne d'autres transformées en sinus.

4 - TRANSFORMEE D'AIRY DISCRETE

La matrice $B_{\lambda,N}$ possède la propriété de se transformer très simplement lorsqu'on fait tendre λ vers l'infini.

En effet, $z_{\lambda,s}$ devient alors équivalent à $\lambda z(\varphi_s)$, où z est une fonction de φ_s équivalente à $1 - (\varphi_s/2^{1/3})$ et φ_s est équivalent à $a_s \lambda^{-2/3}$ où a_s est le $s^{\text{ième}}$ zéro de la fonction d'Airy [4].

Si l'on note celle-ci A_i, la limite de la dérivée $J_\lambda'(z_{\lambda,s})$ lorsque λ croît, est

$$-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{2}{3}} A_i'(a_s).$$

Le terme $b_{\lambda,N+1}(i,j)$ est donc équivalent à :

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{J_\lambda(\lambda z(\varphi_i)\ z(\varphi_j)/z(\varphi_{N+1}))}{|A_i'(a_i)\ A_i'(a_j)|}$$

En remplaçant $J_\lambda(\lambda z)$ par son équivalent $\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} A_i(\lambda^{\frac{2}{3}}\varphi)$ où z et φ sont liés par $z \simeq 1-(\varphi/2^{\frac{1}{3}})$, on obtient un équivalent de $b_{\lambda,N+1}(i,j)$, à savoir :

$$\boxed{a_{N+1}(i,j) = \frac{A_i(a_i + a_j - a_{N+1})}{A_i'(a_i)\ A_i'(a_j)}}$$

La matrice A_{N+1} d'éléments $a_{N+1}(i,j)$ est la forme limite de $B_{\lambda,N+1}$ lorsque λ tend vers l'infini. On pourra l'appeler matrice discrète d'Airy. On a vérifié numériquement son orthonormalité et les valeurs d'un certain nombre de coefficients sont données dans [3].

5 - CONCLUSION

Il s'agit de trouver une démonstration mathématique de l'orthonormalité de la matrice $B_{\lambda,N+1}$; la difficulté vient de ce que contrairement à ce qui se passe pour la transformée complexe de Fourier, on ne semble pas connaître de structure mathématique simple qui contraigne les premiers zéros des fonctions de Bessel. Il serait déjà intéressant de chercher à démontrer dans un premier temps la relation très simple

$$[J_\lambda'(z_{\lambda,1})]^2 = \frac{2}{z_{\lambda,2}} J_\lambda\left(\frac{z_{\lambda,1}^2}{z_{\lambda,2}}\right)$$

obtenue lorsque N = 0 et qui lie la valeur de la dérivée au premier zéro en fonction de la valeur de la fonction en $z_{\lambda,1}^2/z_{\lambda,2}$.

D'autre part, on cherche maintenant à utiliser le lien avec les fonctions trigonométriques pour obtenir une transformation discrète complexe, si possible rapide.

Enfin, on a vérifié sur quelques exemples que pour un nombre de points donnés, il est plus précis d'utiliser la matrice B pour calculer la transformée de Bessel plutôt que par une méthode d'intégrale type trapèze ou autre.

REFERENCES

[1] J.P. CLERO "A new discrete Bessel transform matrix" Proc. IEEE - Vol 67 n° 10 p. 1463 October 1979.

[2] P.YIP et K.R. RAO "Sparse matrix factorization of discrete sine transform". Asilomar Conf. Circuits systems computers IEEE-1979.

[3] J.P. CLERO "Relation entre les transformées discrètes de Bessel et d'Airy" - Rapport interne DASM 80/001/110 JPC.

[4] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN "Handbook of Mathematical functions" New York : Dover 1970-Ch 9-10.