HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU
SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981

REPRESENTATION DES SIGNAUX PAR DES FONCTIONS ENTIERES. CARACTERISATION DES FONCTIONS D'AMBIGUITE ET DES SIGNAUX LIMITES

André BERTHON

Société AERO - 3 avenue de l'Opéra - 75001 PARIS

RESUME

Les signaux analytiques d'énergie finie sont généralement représentés par des fonctions complexes de carré sommable d'une variable réelle. L'isomorphisme introduit par BARGMANN entre cet espace et un espace de fonctions analytiques entières fournit une nouvelle représentation dans laquelle temps et fréquence sont traités symétriquement. On donne les principales propriétés de cette transformation et on discute deux champs d'application possibles de la représentation des signaux par des fonctions entières : l'étude des représentations conjointes en temps et en fréquence, et celle des signaux limités en temps ou en fréquence.

SUMMARY

Analytical signals with finite energy are usually represented by square-integrable complex functions of a real variable. BARGMANN introduced an isomorphisme of this space to a space of analytic entire functions, which yields a new representation where time and frequency appear symmetrically. The main properties of this transformation are given, and two possible fields of application are discussed for the representation of signals by entire functions : the study of time-frequency joint representations, and of time or frequency-limited signals.

REPRESENTATION DES SIGNAUX PAR DES FONCTIONS ENTIERES.
CARACTERISATION DES FONCTIONS D'AMBIGUITE ET DES SIGNAUX LIMITES

1. INTRODUCTION

L'idée de représenter un signal conjointement par ses propriétés temporelles et fréquentielles répond à un besoin ancien et évident [1], toujours plus ou moins frustré du fait que les opérateurs temps et fréquence ne commutent pas. Ceci conduit à étudier les différentes représentations des vecteurs d'un espace de HILBERT, problème bien connu en mécanique quantique, dont l'exemple canonique est celui de l'oscillateur harmonique. C'est dans ce cadre que GLAUBER [2] a développé la notion d'état cohérent, fondamentale en optique quantique, en utilisant la représentation introduite par BARGMANN [3]. L'objet de la présente communication est d'attirer l'attention sur l'intérêt de cette représentation en théorie du signal et d'en indiquer des champs d'application possibles. Son utilisation a déjà été proposée par HELSTROM [4] en vue d'écrire un signal comme intégrale de signaux gaussiens élémentaires, ce qui donne l'analogue exact du développement approché suivant une famille discrète de signaux gaussiens de GABOR [5]. Cette propriété est liée à la nature de la transformation de BARGMANN, qui associe au signal une fonction entière de variable complexe, et fournit une représentation particulièrement simple de la transformation de FOURIER.

2. REPRESENTATION DES SIGNAUX PAR DES FONCTIONS ENTIERES

Cette partie est essentiellement un résumé de [3].

2.1 Définitions

La transformation de BARGMANN est une transformation intégrale de noyau :

$$(1) \quad A(z,x) = \pi^{-1/4}\, e^{-\frac{1}{2}z^2+\sqrt{2}\,zx-\frac{1}{2}x^2}$$

Dans l'espace de HILBERT $L_2(\mathbb{R})$ nous appellerons signal gaussien minimal une fonction complexe de norme 1, telle que les opérateurs X (multiplication par x) et $Y = -i\, d/dx$ aient pour écart quadratique moyen $1/2$, et pour valeur moyenne x_0, y_0 respectivement. Si on interprète x comme le temps et y comme la fréquence, on a un signal de temps moyen x_0 et de fréquence moyenne y_0, dont la représentation x s'écrit :

$$(2) \quad \begin{aligned} S_{x_0,y_0}(x) &= \pi^{-1/4}\, e^{-\frac{1}{2}x_0y_0}\, e^{iy_0x}\, e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|w|^2} A(w,x) \end{aligned}$$

en posant $w = (x_0+iy_0)/\sqrt{2}$. S_{x_0,y_0} peut s'interpréter aussi comme solution de l'équation de SCHRODINGER de l'oscillateur harmonique, qui est un état propre de l'opérateur d'annihilation, c'est-à-dire un état cohérent au sens de GLAUBER [2] car :

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(X+iY)\, S_{x_0,y_0} = w\, S_{x_0,y_0}$$

Soit maintenant $f(x)$ un signal de carré immuable quelconque. La transformée sera la fonction de variable complexe $F(z)$ définie par :

$$(4) \quad F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(z,x)\, f(x)\, dx$$

Remarquons que pour z fixé $A(z,x)$ est une fonction de $L_2(\mathbb{R})$ de norme $e^{\frac{1}{2}|z|^2}$ de sorte que, si $\|f\|$ désigne la norme de f :

$$(5) \quad |F(z)| \leqslant e^{\frac{1}{2}|z|^2}\, \|f\|$$

On en déduit que $F(z)$ est une fonction analytique entière de z, qui vérifie :

$$(6) \quad \int |F(z)|^2 d\mu < \infty \qquad d\mu = e^{-|z|^2} d^2z$$

Appelons $\mathcal{L}$ l'espace de HILBERT obtenu en munissant les fonctions entières qui vérifient (6) du produit hermitique correspondant à la mesure μ :

$$(7) \quad \langle F/G \rangle = \int \bar{F}(z)\, G(z)\, d\mu$$

BARGMANN [3] a démontré le résultat fondamental suivant :

Théorème. La formule (4) définit une isométrie entre $L_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}$.

2.2 Bases conjuguées et inversion de la transformation

Le moyen le plus simple de mettre en évidence le fonctionnement de cette isométrie est de remarquer que la fonction génératrice des polynômes de HERMITE est $\exp(z^2+2zx) = \exp(x^2/2)\, A(z\sqrt{2}, x)$. Les fonctions de HERMITE $h_n(x)$ sont définies à partir des polynômes $H_n(x)$ par :

$$(8) \quad h_n(x) = \frac{\pi^{-1/4}}{2^{n/2}\sqrt{n!}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)$$

Elles forment un système orthonormé complet pour $L_2(\mathbb{R})$. On a :

$$(9) \quad A(z,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\, h_n(x)$$

et il est facile de vérifier que les polynômes $z^n/\sqrt{n!}$ constituent une famille orthonormée pour le produit scalaire (7).

Ainsi les coefficients de TAYLOR de $F(z)$ s'obtiennent en divisant par $\sqrt{n!}$ les coefficients du développement de $f(x)$ sur la base des fonctions de HERMITE.

Pour inverser la transformation sans passer par ce développement on doit recourir à un passage à la limite car $A(z,x)$, pour x donné, n'est pas dans $\mathcal{L}$. On a par exemple :

$$(10)\quad f(x) = \lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ |\lambda|<1}} \int \overline{A(z,x)}\, F(\lambda z)\, d\mu.$$

du fait que le produit scalaire :

$$(11)\quad \sigma(\lambda,x,y) = \int \overline{A(z,x)}\, A(\lambda z,y)\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n h_n(x) h_n(y)$$

où la série converge pour $|\lambda| < 1$, considéré comme distribution selon x ou y, a pour limite $\delta(x-y)$ pour $\lambda = 1$. Notons que la formule (10) est valable presque partout en x, la limite étant au sens de la topologie de $L_2(\mathbb{R})$.

2. 3 Signaux gaussiens et représentation de GABOR HELSTROM

On a la correspondance suivante :

$$(12)\quad f(x) = s_{x_0,y_0}(x) \longleftrightarrow F(z) = e^{-\frac{1}{2}|w|^2} e^{wz}$$

autrement dit les transformées des signaux gaussiens minimaux sont, au facteur de normalisation près, les fonctions exponentielles. D'autre part pour z fixé $F(z)$ est une forme linéaire continue sur l'espace de HILBERT $\mathcal{L}$ (ceci résulte par exemple, de l'inégalité (5) et de l'égalité des normes de f dans $L_2(\mathbb{R})$ et de F dans $\mathcal{L}$), donc elle s'exprime comme le produit hermitique du vecteur avec un élément de l'espace qu'on notera e_z. En introduisant la base orthonormale $\{z^n/\sqrt{n!}\}$ on voit que :

$$(13)\quad e_a(w) = \langle e_w | e_a \rangle = \sum_n \frac{1}{n!} \langle e_w | z^n \rangle \langle z^n | e_a \rangle$$

$$= \sum_n \frac{w^n \bar{a}^n}{n!} = e^{\bar{a}w}$$

Toute fonction entière de l'espace $\mathcal{L}$ vérifie donc la formule de réplication

$$(14)\quad F(z) = \langle e_z | F \rangle = \int e^{z\bar{w}} F(w)\, d\mu(w)$$

En repassant à l'espace des fonctions de carré sommable $L_2(\mathbb{R})$ ce résultat s'écrit, compte tenu de la correspondance (12) :

$$(15)\quad \begin{aligned} f(x) &= \int e^{\frac{1}{2}|w|^2} s_{x_0,y_0}(x)\, F(w)\, d\mu(w) \\ &= \int e^{-\frac{1}{4}(x_0^2+y_0^2)} F(w)\, s_{x_0,y_0}(x)\, \frac{dx_0\, dy_0}{2\pi} \end{aligned}$$

ceci fournit une première interprétation de la transformée de BARGMANN : $F\left(\frac{x_0 - iy_0}{\sqrt{2}}\right)$ est, au facteur exponentiel près, le poids du signal gaussien minimal, centré au point (x_0, y_0) du plan temps-fréquence dans un développement du signal $f(x)$ [4]. On sait qu'un tel développement n'est pas unique. En particulier, ajoutons à $F(w)$ dans la formule (15) une fonction $P(\bar{w})$, avec $P \in \mathcal{L}$, s'annulant à l'origine. On a :

$$(16)\quad \int e^{z\bar{w}} P(\bar{w})\, d\mu(w) = \bar{P}(0) = 0$$

(en prenant le conjugué et en appliquant (14) à l'origine à la fonction $e^{\bar{z}w} P(w)$, qui est aussi dans $\mathcal{L}$, voir ci-dessous) donc on obtient une nouvelle représentation de $f(x)$ du type (15). En revanche si l'on ajoute à F une fonction analytique de w la formule (14) implique qu'elle s'annule identiquement, d'où le :

Théorème. La transformée $F(z)$ est l'unique fonction analytique telle que f admette le développement (15).

De même que les signaux gaussiens minimaux sont les fonctions propres de l'opérateur d'annihilation (3), les fonctions exponentielles sont les fonctions propres de l'opérateur de dérivation complexe $D_z = d/dz$. La transformation induit évidemment une correspondance entre les opérateurs linéaires sur les deux espaces de HILBERT; si Z désigne l'opérateur de multiplication par z dans $\mathcal{L}$, on a :

$$(17)\quad \begin{aligned} X &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(Z + D_z) \\ Y &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(Z - D_z) \end{aligned}$$

Ces opérateurs ne sont définis que sur des parties des deux espaces.

Dans l'analogie avec la mécanique quantique, les opérateurs Z et D_z sont les transformées des opérateurs de création et d'annihilation. Les fonctions exponentielles sont les transformées des états cohérents. Enfin, les états à n quanta, fonctions propres de l'opérateur ZD_z, sont les fonctions ($z^n/\sqrt{n!}$),transformées des fonctions de HERMITE.

2.4 Remarques générales

1. La transformation se généralise facilement aux fonctions de plusieurs variables, comme il est exposé dans [3].

2. Les opérateurs tels que Z, D_z sont définis naturellement sur tout l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions entières, mais ne laissent pas le sous-espace $\mathcal{L}$ invariant. Les fonctions entières qui ne sont pas de $\mathcal{L}$ norme finie correspondent par la transformation de BARGMANN à des fonctions de carré non sommable, ou à des distributions opérant sur un espace contenant les fonctions $A(z,x)$. Ainsi, la distribution de DIRAC a pour transformée $\pi^{-1/4} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ qui n'est pas dans $\mathcal{L}$ mais dont le produit hermitique avec

les polynômes est défini; par exemple, on peut calculer dans l'espace $\mathcal{E}$ l'action de cette distribution sur les fonctions de HERMITE :

$$(18) \quad \langle n^{-1/4} e^{-\frac{1}{2} z^2} \,/\, \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \rangle = h_n(0)$$

3. OPERATEURS DE TRANSLATION ET DE ROTATION

3.1 Translations

$F(z+a)$ n'a pas la même norme que F. Mais on vérifie facilement que l'opérateur de translation T_a et l'opérateur de décalage en fréquence (multiplication par e^{ibx}) D_b dans $L_2(\mathbb{R})$ ont les transformées suivantes :

$$(19) \quad \begin{aligned} T_a &\longleftrightarrow e^{-a^2/4} E_{-a/\sqrt{2}} \, \tau_{a/\sqrt{2}} = e^{a^2/4} \tau_{a/\sqrt{2}} \, E_{-a/\sqrt{2}} \\ D_b &\longleftrightarrow e^{-b^2/4} E_{ib/\sqrt{2}} \, \tau_{ib/\sqrt{2}} = e^{b^2/4} \tau_{ib/\sqrt{2}} \, E_{ib/\sqrt{2}} \end{aligned}$$

en notant E_w la multiplication par la fonction entière e^{wz} et τ_e la translation complexe. On voit apparaître ici la complète symétrie entre le temps et la fréquence qui caractérise les calculs dans l'espace $\mathcal{L}$. Les deux transformations sont des cas particuliers de l'opération de translation dans le plan temps-fréquence, qu'on définira par :

$$(20) \quad V_\lambda F(z) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 + \bar{\lambda} z} F(z-\lambda)$$

λ étant un nombre complexe quelconque. On a :

$$(21) \quad |V_\lambda F(z)|^2 e^{-|z|^2} = e^{-|z-\lambda|^2} |F(\lambda - z)|^2$$

d'où il résulte que l'opérateur V_λ est unitaire; son inverse est $V_{-\lambda}$. La famille $\{V_\lambda ; \lambda \in \mathbb{C}\}$ constitue une image du groupe additif $\mathbb{C}$ dans l'ensemble des opérateurs unitaires définis à une phase près. On a en effet :

$$(22) \quad V_\lambda V_\mu = e^{\frac{1}{2}(\bar{\lambda}\mu - \lambda\bar{\mu})} V_{\lambda+\mu}$$

Leur action sur la fonction constante $e_0(z) = 1$ engendre la famille des signaux gaussiens minimaux :

$$(23) \quad V_z e_0 = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e_z$$

$$(24) \quad F(z) = e^{\frac{1}{2}|z|^2} \langle e_0 / V_{-z} F \rangle$$

La formule (22) montre que la famille de transformations correspondant dans l'espace $L_2(\mathbb{R})$ aux translations V_λ, est engendrée par les translations dans le temps, (λ réel) et les décalages en fréquence (λ imaginaire pur).

3.2 Rotations et transformations de FOURIER

Considérons la transformation de Fourier définie de manière symétrique par :

$$(25) \quad \mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y)\, dy$$

On peut vérifier par un calcul direct que, si $F(z)$ est la transformée de f, celle de $\mathcal{F}f$ est $F(iz)$. Plus généralement l'opération de rotation définie sur les fonctions de $\mathcal{L}$ par :

$$(26) \quad R_\theta F(z) = F(z e^{-i\theta})$$

correspond, par la transformation de BARGMANN, à l'opérateur intégral de noyau [3] :

$$(27) \quad \lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ \lambda < 1}} \sigma(\lambda e^{i\theta}, x, y) = \left[-2i e^{i\theta} \sin\theta \pi\right]^{-1/2} e^{+\frac{i}{4} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} (x+y)^2 - \frac{i}{4} \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} (x-y)^2}$$

défini pour $\theta \neq 0, \pi$. On voit qu'il se réduit pour $\theta = 3\pi/2$ ou $\pi/2$ au noyau de la transformation de Fourier ou de son inverse. On obtient ainsi sur $L_2(\mathbb{R})$ un groupe de transformations unitaires isomorphe au groupe S_1, contenant la transformation de Fourier. Compte tenu de la formule (11), la notation d'angle θ a pour effet de remplacer f_n par $f_n e^{in\theta}$, f_n étant le coefficient du développement de $f(x)$ suivant la base des fonctions de HERMITE. Comme exemple d'application on voit immédiatement que les sous-espaces propres de l'opérateur de Fourier ont pour bases hilbertiennes $\{\Psi_{n+p} ; n \in N\}$ avec $p = 0, 1, 2, 3$ pour les valeurs propres $1, -i, -1 + i$ respectivement, et ont donc pour somme directe $L_2(\mathbb{R})$. De même on vérifie facilement la relation :

$$(28) \quad V_\lambda R_\theta = R_\theta V_{\lambda e^{i\theta}}$$

d'où l'on tire, en prenant $\theta = \pi/2$:

$$(29) \quad e^{-ibY + iaX} = \mathcal{F} e^{iaY + ibX} \mathcal{F}^{-1}$$

4. REPRESENTATION EN TEMPS ET EN FREQUENCE ET FONCTIONS D'AMBIGUITE

4.1 Propriétés des fonctions d'ambiguité

Définissons la fonction d'ambiguité de deux signaux f et g par :

$$(30) \quad \chi_{fg}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f\left(x - \frac{x_0}{2}\right)} \, g\left(x + \frac{x_0}{2}\right) e^{-iy_0 x}\, dx$$

Ces fonctions obéissent à diverses relations remarquables, cf. par exemple STUTT [6], qui s'interprètent facilement dans l'espace $\mathcal{L}$. En effet, soit F et G les transformées de f et g, on a :

$$\chi_{fg}(x_0,y_0) = \langle F | V_{-\lambda} | G \rangle \qquad \lambda = (x_0 - iy_0)/\sqrt{2} \tag{31}$$

Il suffit d'appliquer la relation (28) avec $\theta = \pi/2$ pour obtenir les fonctions d'ambiguité des transformées de Fourier de f et g :

$$\chi_{\mathcal{F}f\,\mathcal{F}g}(x_0,y_0) = \langle F | V_{i\lambda} | G \rangle = \chi_{fg}(y_0, -x_0) \tag{32}$$

La formule fondamentale est celle qui relie la transformée de Fourier par rapport à x_0 et y_0 d'un produit de fonctions d'ambiguité croisées au produit analogue obtenu en entrecroisant les deux couples de fonctions.

Considérons le produit :

$$\langle F_3 | V_\lambda^+ | F_4 \rangle \langle F_2 | V_\lambda | F_1 \rangle \exp\left(|\lambda|^2 + \sigma\bar{\lambda} - \bar{\sigma}\lambda\right)$$

En revenant à la définition, on vérifie que cette expression est le produit d'une fonction analytique de λ par l'exponentielle $\exp\left[\bar{\lambda}(\sigma + z_2 - z_1)\right]$ où z_1 et z_2 sont les variables d'intégration dans l'écriture des deux éléments de matrice. L'intégration sur $d\mu(\lambda)$ est immédiate en vertu de (14) et l'expression résultante se factorise pour donner :

$$\begin{aligned} &\int \langle F_3 | V_\lambda^+ | F_4 \rangle \langle F_2 | V_\lambda | F_1 \rangle e^{|\lambda|^2 + \sigma\bar{\lambda} - \bar{\sigma}\lambda} d\mu = \\ &\langle F_3 | \sigma | F_1 \rangle \langle F_2 | V_\sigma^+ | F_4 \rangle \end{aligned} \tag{33}$$

L'intégration qui figure au premier membre n'est autre qu'une transformation de Fourier car :

$$\begin{aligned} &e^{|\lambda|^2 + \sigma\bar{\lambda} - \bar{\sigma}\lambda} d\mu(\lambda) = e^{i(ay_0 + bx_0)} \frac{dx_0\, dy_0}{2\pi} \\ &\sigma = \frac{a+ib}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{34}$$

d'où l'écriture habituelle de la formule d'entrecroisement :

$$\begin{aligned} &\int \chi_{f_4 f_3}(x_0,y_0)\, \chi_{f_2 f_1}(x_0,y_0)\, e^{ibx_0 + iay_0} \frac{dx_0\, dy_0}{2\pi} = \\ &\chi_{f_4 f_2}(a,-b)\, \chi_{f_3 f_1}(a,-b) \end{aligned} \tag{35}$$

On remarque [4] que la transformée $F(z)$ est elle-même reliée à la fonction d'ambiguité croisée de f et du signal gaussien minimal centré en $z = (\xi + i\eta)/\sqrt{2}$. En effet :

$$F(z) = e^{\frac{1}{2}|z|^2} \langle e_0 | V_{-z} F \rangle = e^{\frac{1}{4}(\xi^2 + \eta^2)} \chi_{s_{0,0}f}(\xi,\eta) \tag{36}$$

On peut reporter la dépendance en z de l'opérateur de translation sur le signal de référence, et écrire; pour σ fixé :

$$F(z) = \langle e_{z-\sigma} | V_{-\sigma} | F \rangle\, e^{-\frac{1}{2}|\sigma|^2 + \bar{\sigma} z} \tag{37}$$

En particulier, si dans la formule d'entrecroisement (33) on pose $F_3 = e_{\tau-\sigma}$ et $F = e_0$, en y changeant les signes de λ et σ et en appliquant (33) on obtient la formule d'inversion qui permet, connaissant la fonction d'ambiguïté croisée de deux signaux f_1 et f_2 , de retrouver ces deux fonctions à une phase près:

$$\int \langle F_2 | V_{-\lambda} | F_1 \rangle e^{\frac{1}{2}|\lambda^2| - \bar{\sigma}\lambda + \tau\bar{\lambda}} . d\mu(\lambda) = e^{-\tau\bar{\sigma}} F_1(\tau)\, \overline{F_2(\sigma)} \tag{38}$$

4.2 Représentations en temps et en fréquence

On peut définir une telle représentation comme une famille d'opérateurs hermitiques $\{\rho_\sigma\}$, avec $\sigma = (x_0 - iy_0)/\sqrt{2}$, telle que l'élément de matrice $\langle f | \rho_\sigma f \rangle$ représente la mesure du signal f à l'instant x_0 et à la fréquence y_0 , l'opérateur ρ_σ s'interprétant comme l'observable associée à un dispositif de mesure [1]. On exigera évidemment que les résultats soient invariants lorsqu'on décale simultanément en temps ou en fréquence le signal et l'observable. Dans la représentation par fonctions entières ceci se traduit simplement par :

$$\rho_\sigma = V_{-\sigma}\, \rho_0\, V_\sigma \tag{39}$$

Le choix de la représentation se ramène à celui de l'opérateur hermitique ρ_0 . On a pour les opérateurs linéaires sur $\mathcal{L}$ une représentation analogue à la formule (14) ; de même qu'on peut récrire celle-ci :

$$| F \rangle = \int F(w) | e_w \rangle\, d\mu(w) \tag{40}$$

on a, pour l'opérateur ρ_0 :

$$\begin{aligned} &| F \rangle = \int R(z_1, z_2) | e_{z_1} \rangle \langle e_{z_2} |\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2) \\ &R(z_1, z_2) = \langle e_{z_1} | \rho_0 | e_{z_2} \rangle \end{aligned} \tag{41}$$

R est l'unique fonction analytique de z_1 et $\bar{z}_2$ permettant cette décomposition.

Avec cette définition on montre que la représentation en temps et en fréquence de f a pour transformée de FOURIER (double) le produit de la fonction d'ambiguïté du signal par un poids P . En effet, en remplaçant ρ_0 par l'expression (41) et en appliquant la formule d'entrecroisement (33) on obtient :

$$\int \langle F | \rho_\sigma | F \rangle e^{|\sigma|^2 - \sigma\bar{\lambda} + \bar{\sigma}\lambda} d\mu(\sigma) = \langle F | V_{-\lambda} | F \rangle\, P(\lambda)$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \int R(z_1, z_2) \langle e_{z_2} | V_\lambda | e_{z_1} \rangle\, d\mu(z_1)\, d\mu(z_2) \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \int R(z - \lambda, z)\, e^{\bar{\lambda} z}\, d\mu(z) \end{aligned} \tag{42}$$

Inversement la donnée de $P(\lambda)$ déterminera l'opérateur ρ_0 par :

$$\rho_0 = \int V_{-\lambda}\, P(\lambda)\, e^{|\lambda|^2} d\mu(\lambda) \tag{43}$$

Par exemple le choix le plus simple, $P(\lambda) \equiv 1$ conduit à la représentation de WIGNER, qui est la transformée de FOURIER à deux dimensions de la fonction d'ambiguïté. Les éléments de matrice de l'opérateur ρ_0 qui lui correspond ont pour expression :

$$\begin{aligned} \langle e_{z_1} | \rho_0 | e_{z_2} \rangle &= \int \langle e_{z_1} | V_{-\lambda} | e_{z_2} \rangle\, e^{|\lambda|^2} d\mu(\lambda) = \\ & e^{z_1 \bar{z}_2} \int e^{+\frac{1}{2}|\lambda|^2 - \bar{\lambda} z_1 + \lambda \bar{z}_2}\, d\mu(\lambda) = 2 e^{-z_1 \bar{z}_2} \end{aligned} \tag{44}$$

ce qui signifie que la fonction $e_{z_2}(z)$ devient $2e_{z_2}(-z)$. On a donc :

$$\rho_0 = \int V_{-\lambda}\, e^{|\lambda|^2} d\mu(\lambda) = 2R_\pi \tag{45}$$

Cette représentation, comme les autres représentations classiques [1] vérifie les relations :

$$\int \langle F | \rho_\sigma | F \rangle\, dy_0 = |f(x_0)|^2 \qquad \int \langle F | \rho_\sigma | F \rangle\, dx_0 = |\mathcal{F}f(y_0)|^2 \tag{46}$$

En effet, la représentation conjointe s'écrit en utilisant (43) :

$$\begin{aligned} \langle F | \rho_\sigma | F \rangle &= \int \langle F | V_{-\lambda} | F \rangle\, e^{\lambda\bar{\sigma} - \sigma\bar{\lambda} + |\lambda|^2} P(\lambda)\, d\mu(\lambda) \\ &= \int \chi_f(a,b)\, e^{-i(ay_0 + bx_0)}\, P\left(\frac{a - ib}{\sqrt{2}}\right) \frac{da\, db}{2\pi} \end{aligned} \tag{47}$$

de sorte que l'on a :

$$\int \langle F | \rho_\sigma | F \rangle\, dy_0 = \int \chi_f(a,b)\, P\left(\frac{-ib}{\sqrt{2}}\right) db \tag{48}$$

Comme $\chi_f(a,b)$ est la transformée de FOURIER de $|f(x)|^2$ il faut et il suffit, pour qu'on obtienne la première relation (46), que $P(-ib/\sqrt{2})$ soit la transformée de FOURIER de la distribution de DIRAC. Le calcul est analogue pour la deuxième relation.

Théorême :

Pour que la représentation ρ_σ vérifie les relations (46) il faut et il suffit que l'on ait $P(\lambda) = 1$ pour $\mathrm{Re}\,\lambda$ ou $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$.

On sait que la représentation de WIGNER n'est pas positive, comme cela résulte immédiatement de (45). On obtiendra des représentations conjointes en temps et fréquence positives en choisissant l'opérateur ρ_0 défini positif. Un tel opérateur peut s'écrire $\rho_0 = A^2$, où A est lui-même hermitique défini positif. Alors on a simplement :

$$\langle F | \rho_\sigma | F \rangle = \| A V_{-\sigma} | F \rangle \|^2 \tag{49}$$

L'opérateur ρ_0 peut s'écrire comme une somme finie ou une intégrale d'opérateur de projection, le cas le plus simple étant l'opérateur de rang un défini par un vecteur de l'espace. On a alors :

$$\langle F | \rho_\sigma | F \rangle = |\langle F | V_{-\sigma} | u \rangle|^2 \tag{50}$$

La représentation en temps et fréquence s'obtient dans ce cas en prenant le module carré de la fonction d'ambiguïté croisée du signal avec un signal fixe. Si par exemple on choisit $u = e_0$ on obtient, ainsi qu'on l'a déjà noté, $\exp(-|z|^2)|F(z)|^2$. Dans ce cas $P(\lambda)$ est la fonction d'ambiguïté du signal u ; par suite, pour λ réel ou imaginaire pur, elle n'est pas constante mais égale à la transformée de FOURIER du module carré de ce signal ou de sa représentation fréquentielle ; l'intégration sur a ou b ne donne pas les relations (46), mais la convolution de leurs seconds membres avec ce module carré.

5. FONCTIONS ENTIERES ET SIGNAUX LIMITES

L'intérêt principal de la représentation de BARGMANN est, comme on l'a vu, de traiter de manière parfaitement symétrique les deux variables conjugées, ici le temps et la fréquence angulaire. Cette symétrie est brisée lorsqu'on considère des signaux limités, soit en temps, soit en fréquence. Il doit donc être possible de définir une classe de signaux qui englobe ces deux catégories en partant de la transformée $F(z)$. Plus généralement il est intéressant d'étudier le lien entre les propriétés de la fonction $f(x)$ et la croissance à l'infini de la fonction entière $F(z)$.

Rappelons que si $M_F(r)$ est le maximum du module de F pour $|z| < r$, l'ordre ρ et le type σ de la fonction entière F sont définis par :

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M_F(r)}{\log r} \qquad \sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M_F(r)}{r^\rho} \tag{51}$$

Il est clair que les fonctions entières dont la norme (6) est finie sont d'ordre au plus égal à 2 et de type au plus égal à 1/2 ; inversement toute fonction qui vérifie $\rho < 2$ ou ($\rho = 2$ et $\sigma < 1/2$) appartient à l'espace $\mathcal{L}$. Le cas limite $\rho = 2$, $\sigma = 1/2$ ne permet pas de trancher. En effet, par définition la transformée de BARGMANN d'une distribution u vérifie :

$$e^{z^2/2}\, U(z) = \pi^{-1/4} \langle u, e^{\sqrt{2}zx - \frac{1}{2}x^2} \rangle \tag{52}$$

c'est donc, à un facteur près, la transformée de FOURIER de la distribution $\exp(-x^2/2)\, u$, prise au point $(-iz/\sqrt{2})$. D'après le théorème de PALEY-WIENER toute distribution à support borné a une transformée de FOURIER d'ordre au plus égal à 1 [7]. L'ordre et le type étant invariants sous l'effet des rotations dans le plan complexe on a un résultat analogue pour les distributions dont la transformée de FOURIER est à support borné et plus généralement on peut énoncer :

Théorème

Soit u une distribution (sur l'espace des fonctions tempérées) et $\{u_n\}$ la suite des valeurs obtenues en appliquant u aux fonctions de HERMITE $h_n(x)$. Si pour un angle θ la distribution définie par les valeurs $\{u_n e^{ni\theta}\}$ est à support borné, la transformée de u est une fonction entière d'ordre **2** et de type $1/2$.

On peut ajouter que l'indicatrice de croissance de la fonction est de la forme :

$$h(\alpha) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log |F(re^{i\alpha})|}{r^2} = -\frac{1}{2}\cos 2(\alpha - \theta)$$

Pour que la distribution soit en fait une fonction de l'espace de HILBERT $L_2(\mathbb{R})$ il faut la condition supplémentaire que la suite $\{|u_n|^2\}$ soit sommable, ce qui n'est pas directement relié au comportement asymptotique de $U(z)$.

Au-delà de ces remarques il semble intéressant d'étudier plus en détail, à l'aide de la théorie des fonctions entières, la caractérisation des signaux d'énergie finie par l'intermédiaire de la représentation de BARGMANN.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ESCUDIE (B.). Représentation en temps et fréquence des signaux d'énergie finie ; analyse et observation des signaux.
Ann. Télécommunic. n° 3-4 (1979), pp. 101-111.

[2] GLAUBER (R.). Coherent and Incoherent States of the Radiation Field.
Phys. Rev. vol. 131, n° 6 (1963), pp. 2766-2788.

[3] BARGMANN (V.). On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform.
Commun. Pure and Appl. Math. 14 (1967), pp. 187-214.

[4] HELSTROM (C.). An Expansion of a Signal in Gaussian Elementary Signal.
IEEE Trans. IT, 12, n° 1 (1968), pp. 81-82.

[5] GABOR (D). Theory of Communication.
J. Inst. Electr. Eng., part III, 1946, pp. 429-457.

[6] STUTT (C). Some Results on Real Part/Imaginary-Part and Magnitude - Phase Relations in Ambiguïty Functions.
IEEE, Trans. IT, octobre 1965, pp. 321-327.

[7] LEVIN (B.). Distribution of Zeros of Entire Functions.
American Math. Soc. 1964.