HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981

MODELISATION GENERALE DU BRUIT IMPULSIF

M. J. DE REFFYE

LABORATOIRE DE CALCUL DES PROBABILITES - Couloir 56-66 - 3ème étage - 4, Place Jussieu - 75005 PARIS

RESUME

Cette étude est la modélisation du bruit non gaussien sous la forme d'un bruit impulsif. La théorie du bruit impulsif est présentée en introduction. Elle s'avère suffisamment générale pour rendre compte des propriétés statistiques de la plupart des brouillages que l'on rencontre effectivement dans la détection des signaux. On se limite à obtenir la répartition statistique des amplitudes du bruit et ses propriétés spectrales, car ce sont les propriétés statistiques les plus importantes, mais, théoriquement, la modélisation d'un bruit sous la forme d'un bruit impulsif permet d'obtenir les moments de tous ordres, pourvu qu'ils existent.

SUMMARY

This study is the non Gaussian Noise Modelization by means of an Impulsive Noise. The Impulsive Noise Theory is introduced at first. This is generally efficient to describe statistical properties of the most of Interferences or Jammings, that are effectively meet in the signal detection. One obtains the probability distribution function an the power spectral density of the noise, because they are the more important statistical properties, but, theorically, the noise modelization by means of an Impulsive Noise provides any order statistical moments, if they exist.

MODELISATION GENERAL DU BRUIT IMPULSIF

1 - INTRODUCTION

Le bruit impulsif a une importance grandissante dans la transmission des signaux, par le fait qu'il est est souvent impossible de considérer le bruit mesuré comme étant un bruit de fond d'origine thermique. En effet, le bruit de fond d'origine thermique est un bruit généré d'une façon naturelle, et il est très bien représenté par une fonction aléatoire gaussienne, stationnaire. Or, la multiplicité des sources de rayonnement non naturelles engendre un bruit non stationnaire et non gaussien, que l'on désigne habituellement sous le vocable de "bruit impulsif". Ce type de bruit, caractérisé par des discontinuités temporelles, se retrouve dans certains phénomènes de propagation, comme le bruit subi à la réception d'un signal radar dû aux échos multiples, ou le bruit reçu par un sonar, dû à la propagation sous-marine. On peut également considérer comme un bruit impulsif les perturbations électromagnétiques créées par un orage.

Après avoir défini le bruit impulsif, nous traiterons le cas du bruit "clutter" (radar), et le bruit impulsif dû aux rayonnements électromagnétiques de diverses sources bruyantes.

Nous terminons cette étude en étudiant le bruit impulsif causé par un brouillage dû à un signal numérique filtré par un circuit intégrateur, car l'utilisation des signaux numériques dans les télécommunications devient prépondérante.

2 - MODELE MATHEMATIQUE

Nous définirons le bruit impulsif de la façon suivante :

2.1. Définition

Un bruit est un bruit impulsif si il peut être représenté par un processus aléatoire X (t), de la forme :

$$X(t) = \sum_{n=o}^{N(t)} Wn(t - \tau n, Yn)$$

où $[N(t), t \in R^+)$ est un processus de comptage sur R^+ et où les fonctions aléatoires $Wn(t - \tau n, Yn)$ sont causales :

$$Wn(t - \tau n, Yn) = o \; ; \quad t < \tau n$$

avec :

t : le temps

τn : instant d'arrivée de la fonction aléatoire $Wn(t - \tau n, Yn)$

Y_n : paramètre

On sait que $(N(t), t \in R^+)$ est égal au cardinal de l'ensemble des variables aléatoires (τ_m) $(m > 1)$ réalisés sur o, t (1) et l'on a :

$$N(o) = o \; ; \; N(t) = o \rightarrow X(t) = o$$

Le processus aléatoire $(X(t), t \in R^+)$ est donc constitué par l'arrivée successive, à partir d'une origine arbitraire des temps, de fonctions aléatoires causales, qui représentent les impulsions qui génèrent le bruit impulsif. En fait, cette définition n'est pas unique. En effet, quand on étudie d'autres phénomènes aléatoires impulsifs, on est amené à utiliser une autre définition de l'impulsivité basée sur le nombre instantané de phénomènes élémentaires simultanément présents. Néanmoins, la définition donnée ci-dessus suffit dans la majorité des cas puisque le cas particulier où les deux définitions coïncident est prépondérant dans les applications physiques (1). La définition précédente est celle que l'on rencontre dans les références 2 et 3. Toutefois il existe une autre définition basée sur un processus de comptage sur R de fonctions aléatoires non causales (4). En fait, elle est paradoxalement moins générale que celle qui est donnée dans cette étude, car elle n'étudie que le régime permanent du processus $(X(t), t \in R)$; et celui-ci apparaît comme un processus stationnaire. Or la présente définition du bruit impulsif implique que le processus $(X(t), t \in R^+)$ est un processus non stationnaire. En effet, le démarrage du phénomène aléatoire, à partir de son origine, entraîne un régime transitoire et le phénomène peut diverger, disparaître ou tendre vers son régime permanent (1). C'est ce cas qui nous intéressera dans la suite de cette étude. D'autre part dans toutes les études précédentes (2), on considère que le processus de comptage est un processus de Poisson. Or nous avons étudié le cas où N (t) est un processus de Poisson généralisé et le cas où N (t) est un processus par grappes (1). Ces études sont intéressantes, car il peut arriver que l'on ne puisse plus considérer le processus de comptage comme étant poissonien. Toutefois, le cas où N (t) est un processus de Poisson suffit pour les applications que nous présentons dans la présente étude et c'est pour cela que nous n'envisageons pas les généralisations déjà traitées par ailleurs (1).

2.2. Propriétés asymptotiques en loi et en moyenne quadratique

Soit $(X(t), t \in R^+)$, le processus aléatoire modélisant le bruit impulsif. Calculons, pour t fixé, la fonction caractéristique de la variable aléatoire X (t) :

$$\varphi_{X(t)}(u) \triangleq \mathbb{E}\,(e^{iuX(t)})$$

Nous dirons que le processus aléatoire $(X(t), t \in R^+)$ converge en loi vers une loi de probabilité unidimensionnelle, si la fonction caractéristique $\varphi_{X(t)}(u)$ converge, quand t tend vers l'infini, vers une fonction caractéristique et nous poserons, dans ces conditions :

$$\varphi_{X(\infty)}(u) \triangleq \lim_{t \to \infty} \varphi_{X(t)}(u)$$

$\varphi_{X(\infty)}(u)$ est appelée, si elle existe, la fonction caractéristique asymptotique du processus $(X(t), t \in R^+)$ et sa transformée de Fourier inverse définit la loi de probabilité stationnaire unidimensionnelle du processus $(X(t), t \in R^+)$.

D'autre part, calculons pour t_1 et t_2, fixés, la fonction caractéristique du couple $(X(t_1), X(t_2))$:

$$\varphi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1,u_2) \triangleq E\left(e^{i(u_1 X(t_1) + u_2 X(t_2))}\right)$$

On obtient la covariance du processus $(X(t), t \in R^+)$ en développant au second ordre $\varphi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1,u_2)$:

$$\Gamma_X(t_1,t_2) \triangleq E\,(X(t_1)\,X(t_2))$$

$$= -\left(\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2}\varphi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1,u_2)\right)_{\substack{u_1 = 0\\ u_2 = 0}}$$

(On suppose le processus X(t) réel).

Nous dirons que le processus $(X(t),\ t \in R^+)$ est asymptotiquement stationnaire en moyenne quadratique si, en ayant préalablement posé :

$$t_1 = t \ ; \quad t_2 = t + h \ ; \quad h \geqslant 0$$

la covariance $\Gamma_X(t, t+h)$ admet une limite quand t tend vers l'infini, et nous poserons, dans ces conditions :

$$C_{X(\infty)}(h) \triangleq \lim_{t \to \infty} \Gamma_X(t, t+h)$$

$C_{X(\infty)}(h)$ définit, si elle existe, la fonction d'autocorrélation asymptotique du processus $(X(t),\ t \in R^+)$, et sa transformée de Fourier, $S_X(\nu)$, définie par :

$$S_X(\nu) = 2\int_0^\infty C_{X(\infty)}(h) \cos 2\pi\nu h\, dh$$

est la densité spectrale de puissance asymptotique du processus $(X(t),\ t \in R^+)$.

D'une façon générale, la transformée de Fourier de $C_{X(\infty)}(h)$ sera définie au sens des distributions tempérées.

Appliquons ces définitions au cas du bruit impulsif. Comme nous nous plaçons dans le cas d'une arrivée poissonnienne, nous supposons dorénavant que $(N(t),\ t \in R^+)$ est un processus de Poisson de paramètre λ. Et nous supposons, pour des raisons de simplification des calculs et pour assurer les deux stationnarités définis ci-dessus, que les fonctions aléatoires $W_n(t - \tau_n, Y_n)$ sont indépendantes, identiquement distribuées, et indépendantes du processus de Poisson $(N(t),\ t \in R^+)$. Dans ces conditions, on obtient les formules suivantes :

$$\varphi_{X(t)}(u) = e^{\lambda \int_0^t \mathbb{E}\left(e^{iuW(\tau,Y)} - 1\right) d\tau}$$

$$\mathbb{E}\left(X(t)X(t+h)\right) = \lambda \int_0^t \mathbb{E}\left(W(\tau,Y)\,W(\tau+h,Y)\right) d\tau + \lambda^2 \int_0^t \mathbb{E}\left(W(\tau,Y)\right) d\tau \int_0^{t+h} \mathbb{E}\left(W(\tau,Y)\right) d\tau$$

D'où les formules donnant la fonction caractéristique asymptotique et la fonction d'autocorrélation asymptotique du processus $(X(t),\ t \in R^+)$:

$$\varphi_{X(\infty)}(u) = e^{\lambda \int_0^\infty \mathbb{E}\left(e^{iuW(\tau,Y)} - 1\right) d\tau}$$

$$C_{X(\infty)}(h) = \lambda \int_0^\infty \mathbb{E}\left(W(\tau,Y)\,W(\tau+h,Y)\right) d\tau + \lambda^2 \left(\int_0^\infty \mathbb{E}\left(W(\tau,Y)\right) d\tau\right)^2$$

Nous pouvons calculer maintenant la loi de probabilité stationnaire unidimensionnelle et la densité spectrale de puissance asymptotique du bruit impulsif, modélisé sous cette forme générale. Nous allons appliquer cette modélisation à l'étude des propriétés statistiques en loi et en moyenne quadratique de certains bruits impulsifs que l'on rencontre habituellement dans le traitement du signal. On définit tout d'abord :

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} dx; \quad J_0(x) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$$

3 - APPLICATION A LA MODELISATION DES BRUITS IMPULSIFS D'ORIGINE NATURELLE ET/OU DUS A L'ACTIVITE HUMAINE

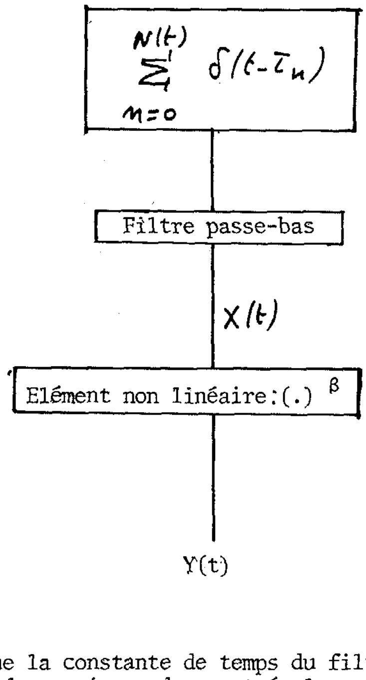
3.1. Modélisation du "clutter" de sol

On désigne par "clutter", l'ensemble des bruits qui viennent perturber la détection d'un écho radar, exceptés le bruit thermique dû aux appareils eux-mêmes et les brouillages volontaires. Le clutter provient de deux phénomènes différents.

1) Les réflexions parasites,

2) Les anomalies de propagation.

Nous supposons que les échos parasites arrivent selon un processus de Poisson, de paramètre λ, et que le signal reçu puisse être modélisé sous la forme d'impulsions de Dirac traitées successivement par un système linéaire puis par un système non-linéaire :



On suppose que la constante de temps du filtre passe-bas, supposé du premier ordre, est égale au temps moyen séparant l'arrivée de deux impulsions successives, si bien que le processus aléatoire X(t) s'écrit:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} W(t - \tau_n, Y)$$

où

$$w(t-\tau_k, Y) = A\, e^{-\lambda(t-\tau_k)} \qquad t \geq \tau_k$$
$$= 0 \qquad t < \tau_k$$

où A est une variable aléatoire distribuée selon une loi Γ_1, de paramètre α :

$$p_A(x) = \alpha e^{-\alpha x} \qquad x \geq 0$$

Le bruit reçu à la réception, Y(t), s'écrit sous la forme :

$$Y(t) = (X(t))^{\beta}$$

On montre que, dans ces conditions, la fonction caractéristique asymptotique de X(t) est égale à :

$$\varphi_{X(\infty)}(u) = e^{\lambda\int_0^{\infty}\mathbb{E}\left(e^{iuA\,e^{-\lambda\tau}}-1\right)d\tau}$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha - iu}$$

Par conséquent, le processus $(X(t),\ t \in R^{+})$ admet une loi de probabilité stationnaire unidimensionnelle, qui est une loi Γ_1 de paramètre α :

C'est la même loi de probabilité que la loi des amplitudes de chaque impulsion ceci est dû au fait que les impulsions sont distribuées régulièrement les unes par rapport aux autres, puisque la pente de décroissance de chaque impulsion est égale au taux d'arrivée λ des impulsions.

Par conséquent, le processus Y(t) admet donc comme loi de probabilité stationnaire unidimensionnelle, une loi de Weibull, de paramètres α et β-1, et de fonction de répartition :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y(\infty) \leq y) = 1 - e^{-\alpha y^{\frac{1}{\beta}}}$$

On en déduit les deux premiers moments de Y :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\alpha^{\beta}}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{\Gamma(1+2\beta)}{\alpha^{2\beta}}$$

On obtient aisément la fonction de corrélation asymptotique de X (t) :

$$C_{X(\infty)}(h) = \lambda\int_0^{\infty}\mathbb{E}(A^2)\, e^{-\lambda\tau}\, e^{-\lambda(\tau+h)}\, d\tau + \frac{\lambda^2}{\alpha^2\lambda^2}$$
$$= \frac{1}{\alpha^2}\left(1 + e^{-\lambda h}\right)$$

et la densité spectrale de puissance asymptotique de X(t) :

$$S_X(\nu) = \frac{2\lambda}{\alpha^2(\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2)} + \frac{\delta(\nu)}{\alpha^2}$$

(où $\delta(\nu)$ est la mesure de Dirac appliquée au point $\nu = 0$).

Malheureusement, on ne peut pas calculer simplement la fonction de corrélation asymptotique de Y (t) à cause de l'élément non linéaire.

On pourra utiliser le traitement des non-linéarités exposé par S.O. Rice et complété par B. LEVINE en posant :

$$Y = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_c F(iu)\, e^{ixu}\, du = x^{\beta}$$

$$F(iu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixu}\, dx = \frac{\Gamma(\beta)}{(iu)^{\beta+1}}$$

Calculons la fonction caractéristique des variables aléatoires $(X(t_1), X(t_2))$:

$$\varphi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1,u_2) = e^{\lambda\int_0^{t_1}\mathbb{E}\left(e^{i(u_1 W(t_1-\tau,Y)+u_2 W(t_2-\tau,Y))}-1\right)} \cdots$$
$$\cdots e^{\lambda\int_{t_1}^{t_2}\mathbb{E}\left(e^{iu_2 W(t_2-\tau,Y)}-1\right)d\tau}$$

La loi de probabilité bidimensionnelle du processus $(X(t),\ t \in R^{+})$ est donnée par sa d.d.p. :

$$p(x_1,x_2) = \int_{c_1}\int_{c_2}\varphi_{X_1,X_2}(u_1,u_2)\, e^{-iu_1x_1}\, e^{-iu_2x_2}\, du_1\, du_2$$

et la covariance du processus $(Y(t),\ t \in R^{+})$ s'obtient par les relations suivantes :

$$\Gamma_Y(t_1,t_2) = \iint_{R\times R} f(x_1)\, f(x_2)\, p(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2$$
$$= \int_{c_1}\int_{c_2}\varphi_{X_1,X_2}(u_1,u_2)\, F(iu_1)\, F(iu_2)\, du_1\, du_2$$

Pour le cas présent, on obtient :

$$\varphi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1,u_2) = \frac{\alpha - iu_1 e^{-\lambda t_1} - iu_2 e^{-\lambda t_2}}{\alpha - iu_1 - iu_2 e^{-\lambda(t_2-t_1)}} \cdot \frac{\alpha - iu_2 e^{-\lambda(t_2-t_1)}}{\alpha - iu_2}$$

d'où :

$$\varphi_{X(\infty),X(\infty+h)}(u_1,u_2) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\substack{t_1=t\\ t_2=t+h\\ t\to\infty}} \varphi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1,u_2)$$

$$= \frac{\alpha - iu_2 e^{-\lambda h}}{\alpha - iu_2 e^{-\lambda h} - iu_1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha - iu_2}$$

et la corrélation asymptotique de Y(t) s'écrit :

$$C_Y(h) = \int_{c_1}\int_{c_2} \varphi_{X(\infty),X(\infty+h)}(u_1,u_2) \cdot F(iu_1)\, F(iu_2)\, du_1 du_2$$

et l'on obtient, moyennant quelques approximations :

$$C_Y(h) = \frac{\Gamma(1+2\beta)}{\alpha^{2\beta}} e^{-\lambda\beta h} + (1-e^{-\lambda\beta h})\frac{(\Gamma(1+\beta))^2}{\alpha^{2\beta}}$$

$$= \operatorname{var}(Y)\, e^{-\lambda\beta h} + (E(Y))^2$$

On peut aussi obtenir la forme asymptotique de la corrélation de Y en supposant h >> 1 : les variables aléatoires x_1 et x_2 sont à peu près indépendantes, et on peut calculer la loi de probabilité asymptotique du couple $(X(t_1), X(t_2))$ pour $t_2 = t_1+h$:

$$p(x_1,x_2) = \int_{c_1}\int_{c_2} \varphi_{X(\infty),X(\infty+h)}(u_1,u_2)\, e^{-u_1x_1} e^{-u_2x_2} du_1 du_2$$

$$= \alpha e^{-\alpha x_1}\left[(1-e^{-\lambda h})\alpha e^{-\alpha(x_2-e^{-\lambda h}x_1)} + e^{-\lambda h}\delta(x_2-e^{-\lambda h}x_1)\right]$$

où $\delta(x)$ est la mesure de Dirac d'argument x, au point x = o.

Et on obtient la corrélation asymptotique de Y(t) pour k grand par la formule suivante :

$$h\gg 1;\ C_Y(h) \approx \int_0^\infty\int_0^\infty x_1^\beta x_2^\beta p(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$\approx (1-e^{-\lambda h})^\beta \frac{(\Gamma(1+\beta))^2}{\alpha^{2\beta}} + e^{-\lambda\beta h}\frac{\Gamma(1+2\beta)}{\alpha^{2\beta}}$$

$$\approx \frac{(\Gamma(1+\beta))^2}{\alpha^{2\beta}} + e^{-\lambda\beta h}\frac{\Gamma(1+2\beta)}{\alpha^{2\beta}}$$

Pour $\beta = 1$, la corrélation de Y coïncide avec celle de X.

Pour β = o, la loi de probabilité n'est plus définie car le processus vaut 1 en sortie de l'élément non linéaire. La fonction de corrélation est effectivement partout égale à 1.

Il est intéressant de remarquer l'effet de la non-linéarité dans le domaine fréquentiel. Pour β plus petit que 1, il se produit un phénomène de lissage et la corrélation augmente. La densité spectrale de puissance, du processus $(Y(t),\ t\in R^+)$ égale à :

$$S_Y(\nu) = \operatorname{Var}(Y)\cdot\frac{2\lambda\beta}{\lambda^2\beta^2+4\pi^2\nu^2} + (E(Y))^2\,\delta(\nu)$$

Se concentre dans les fréquences basses. Au contraire quand β est plus grand que 1, il y a un phénomène d'amplification de l'amplitude, ce qui provoque une diminution de la corrélation et une diminution de l'énergie dans les fréquences basses.

3.3. Modélisation du brouillage provoqué par un environnement perturbateur

Le brouillage provoqué par un environnement perturbateur est un bon exemple de bruit impulsif. Un environnement perturbateur est défini comme le champ électromagnétique créé en un point par un grand nombre de brouilleurs. On supposera que tous les brouillages sont à bande étroite, et qu'ils arrivent selon un processus de Poisson, de paramètre λ, chaque brouillage étant représenté par la fonction aléatoire $W(t-\tau_n, Y)$ suivante :

$$W(t-\tau_n,Y) = A\sqrt{\mu}\cos(2\pi\mathcal{V}(t-\tau_n)+\varphi)\cdot W_0(Y,t-\tau_n)$$

où :

A est une constante.

μ est une variable aléatoire, suivant une loi Γ_1, de paramètre α (dispersion de l'amplitude).

$\mathcal{V}$ est une variable aléatoire suivant une certaine loi de densité de probabilité généralisée $P_{\mathcal{V}}(\nu)$. [cette densité peut être composée d'une mesure continue et d'une mesure discrète]. (dispersion de la fréquence)

φ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $(o,2\pi)$. (dispersion de la phase).

Y est une variable aléatoire positive et absolument continue suivant une loi Γ_1, de paramètre β et $W_0(Y,t-\tau_n)$ est une fenêtre temporelle causale, de durée Y (dispersion de la durée).

$$W_0(Y,t-\tau_n) = 1_{[0\leq t-\tau_n\leq Y]}$$

Par conséquent, le bruit impulsif créé par un environnement perturbé se représente d'une façon générale sous la forme :

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} A\sqrt{\mu}\cos(2\pi\mathcal{V}(t-\tau_n)+\varphi)\cdot W_0(Y,t-\tau_n)$$

où N(t) est le processus de Poisson des arrivées des brouillages de paramètre λ.

Cette modélisation est une représentation très générale des brouillages créés volontairement ou involontairement quand on se place au niveau du récepteur derrière l'antenne de réception puisque l'on considère a priori tous les paramètres des signaux brouilleurs comme étant des variables aléatoires.

Par un calcul analogue aux calculs précédents, on obtient respectivement la fonction caractéristique asymptotique et la densité spectrale de puissance asymptotique sous la forme suivante :

$$\varphi_{X(\infty)}(u) = e^{\frac{\lambda}{\beta}\left[e^{-\frac{A^2}{2\alpha}\cdot\frac{u^2}{2}} - 1\right]}$$

$$S_X(\nu) = \frac{\lambda A^2}{2\alpha(\beta^2+4\pi^2\nu^2)} * \left[P_{\nu_0}(\nu) + P_{-\nu_0}(\nu)\right]$$

(* : produit de convolution)

On obtient un MODELE ASYMPTOTIQUE en posant

$\alpha = \beta^{-1}$

et en faisant tendre α vers l'infini; c'est le cas d'une infinité de brouilleurs d'amplitude infiniment petite.

On obtient alors les formules asymptotiques suivantes :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \varphi_{X(\infty)}(u) = e^{-\lambda\frac{A^2}{2}\cdot\frac{u^2}{2}}$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} S_X(\nu) = \frac{\lambda A^2}{4}\,\delta(\nu) * \left[P_{\nu_0}(\nu) + P_{-\nu_0}(\nu)\right] = \frac{\lambda A^2}{4}\left[P_{\nu_0}(\nu) + P_{-\nu_0}(\nu)\right]$$

Dans ces conditions, la densité spectrale asymptotique du processus $(X(t),\ t \in R^+)$ est entièrement déterminée, à un coefficient près, par la loi de probabilité de la fréquence centrale des brouilleurs.

Si nous supposons que le brouillage général doit être représenté par la somme de deux processus aléatoires indépendants $(X(t_1),\ t_1 \in R^+)$ et $(X(t_2),\ t_2 \in R^+)$ où $(X(t_1),\ t_1 \in R^+)$ est un processus identique au processus $(X(t),\ t \in R^+)$ précédemment défini, et où $(X(t_2),\ t_2 \in R^+)$ est le cas asymptotique précédemment défini du processus $(X(t),\ t \in R^+)$, il se compose alors :

- d'un bruit de fond gaussien composé d'une infinité de brouilleurs infiniment petits, et dont la densité spectrale de puissance se répartit selon la loi de probabilité de la fréquence des brouilleurs.

- d'une arrivée poissonienne de brouilleurs prépondérants par rapport à tous les signaux précédents qui constituent le bruit de fond. L'hypothèse poissonnienne est justifiée par le fait que ces brouillages sont rares par rapport à tous ceux qui constituent le bruit de fond.

Dans ces conditions, la fonction caractéristique asymptotique et la densité spectrale de puissance de bruit sont égales respectivement à :

$$\varphi_{X_1(\infty)+X_2(\infty)}(u) = e^{\frac{\lambda}{\beta}\left[e^{-\frac{A_1^2}{2\alpha}\cdot\frac{u^2}{2}} - 1\right]} \cdot e^{-\lambda_2\frac{A_2^2}{2}\cdot\frac{u^2}{2}}$$

$$S_{X_1+X_2}(\nu) = \frac{\lambda_1 A_1^2}{2\alpha(\beta^2+4\pi^2\nu^2)} * \left(P_{\nu_1}(\nu) + P_{-\nu_1}(\nu)\right) + \frac{\lambda_2 A_2^2}{2}\left(P_{\nu_2}(\nu) + P_{-\nu_2}(\nu)\right)$$

On pourra remarquer que cette fonction caractéristique coïncide exactement avec celle des modèles A et BII de D. MIDDLETON. Mais on obtient, de plus, la densité spectrale de puissance du bruit.

3.4. Bruit impulsif provoqué par des brouillages à grande distance

Jusqu'à présent, on a étudié le bruit général composé d'une arrivée de brouillages élémentaires sans se préoccuper de la caractérisation des brouilleurs. Dans le modèle qui va être décrit, on s'intéresse à la représentation des brouillages provoqués par des émetteurs dont on ne connaît pas l'emplacement.

Pour simplifier, on suppose que l'antenne de réception est isotrope et, dans ces conditions, n'intervient que la distance R d'un émetteur à cette antenne.

Nous supposerons que R est distribué sur (o, Ro) selon une loi puissance, à la puissance γ :

$$\mathbb{P}(R \le R_1) = \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{\gamma}$$

D'autre part, nous supposerons que l'affaiblissement des signaux, au cours de la propagation, est compris entre la loi en $\frac{1}{R}$ et la loi en $\frac{1}{R^2}$. D'autre part, on admettra que les émetteurs émettent des signaux à bande étroite de la forme :

$$S(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

et on posera :

$$A = \frac{1}{R^{\alpha}} \quad ; \quad 1 < \alpha < 2$$

Dans ces conditions, A suit une loi de Pareto de paramètres $R_0^{-\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\alpha}$, définie par :

$$\mathbb{P}(A \le A_0) = 1 - \left(\frac{R_0^{-\alpha}}{A_0}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}}$$

On supposera que les brouillages arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ, et que chaque brouillage a une durée Y distribuée selon une loi Γ_1 de paramètre μ.

Dans ces conditions, la fonction caractéristique asymptotique du processus $(X(t),\ t \in R^+)$ s'écrit :

$$\varphi_{X(\infty)}(u) = e^{\frac{\lambda}{\mu}\left(\mathbb{E}(J_0(uA) - 1)\right)}$$

et l'on a :

$$\mathbb{E}(J_0(uA)-1) = \int_{R_0^{-\alpha}}^{\infty} \frac{J_0(uA)-1}{\alpha R_0^{\gamma} A^{\frac{\gamma}{\alpha}+1}} \, dA$$

d'où

$$\varphi_{X(\infty)}(u) = e^{\frac{\lambda}{\mu\alpha R_0^{\gamma}} \int_{R_0^{-\alpha}}^{\infty} \frac{J_0(uA)-1}{A^{\frac{\gamma+\alpha}{\alpha}}} \, dA}$$

On suppose pour simplifier que tous les brouillages sont centrés sur la même fréquence :

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

La densité spectrale de puissance asymptotique du processus $(X(t),\ t \in R^+)$ est égale à :

$$S_X(\nu) = \lambda \frac{\mathbb{E}(A^2)}{2} \left[\frac{1}{\mu^2+4\pi^2(\nu-\nu_0)^2} + \frac{1}{\mu^2+4\pi^2(\nu+\nu_0)^2} \right]$$

Elle n'est définie que si :

$$\mathbb{E}(A^2) < +\infty$$

Or, on a :

$$\mathbb{E}(A^2) = \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{R_0^{2\alpha}\left(\frac{\gamma}{\alpha}-1\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha}-2\right)} + \frac{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2}{R_0^{2\alpha}\left(\frac{\gamma}{\alpha}-1\right)^2}$$

Ce qui implique :

$$\gamma > 2\alpha$$

Cette condition de compatibilité implique que la densité de probabilité de présence d'un émetteur doit décroître suffisamment vite quand on s'approche du récepteur, compte tenu de l'affaiblissement dû à la propagation.

La recherche d'un modèle asymptotique indépendant de R_0 implique de calculer la limite de l'intégrale :

$$\int_{R_0^{-\alpha}}^{\infty} \frac{J_0(uA)-1}{A^{\frac{\gamma}{\alpha}+1}} \, dA$$

Quand R_0 tend vers l'infini. Or, cette intégrale ne converge que si l'on a :

$$0 < \frac{\gamma}{\alpha} < 2$$

et cette condition est incompatible avec la précédente.

Par conséquent, on ne peut pas définir de modèle asymptotique qui soit un signal stationnaire en loi et stationnaire en moyenne quadratique.

Si l'on n'exige plus la condition d'avoir un signal d'énergie finie, on obtient, sous les conditions suivantes :

$$\lim_{\substack{\mu R_0^{\gamma} \to \mu_0 \\ R_0 \to \infty \\ \gamma < 2\alpha}} \varphi_{X(\infty)}(u) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha\mu_0} \cdot \Gamma_{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot u^{\frac{\gamma}{\alpha}}} \qquad u \geq 0$$

$$\Gamma_{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{2\alpha-\gamma}{2\alpha}\right)}{2^{\frac{\gamma+\alpha}{\alpha}}\,\Gamma\left(\frac{2\alpha+\gamma}{2\alpha}\right)}$$

On obtient un modèle asymptotique composé d'une infinité d'émetteurs qui peuvent être situés n'importe où autour de l'antenne de réception du brouillage.

La densité spectrale de puissance n'est plus définie mais on peut définir la densité spectrale de puissance normée, définie par :

$$s_X(\nu) = \frac{S_X(\nu)}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu)\, d\nu}$$

et l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu)\, d\nu = \frac{\lambda\, \mathbb{E}(A^2)}{2\mu}$$

d'où :

$$s_X(\nu) = \frac{\mu}{\mu^2+4\pi^2(\nu-\nu_0)^2} + \frac{\mu}{\mu^2+4\pi^2(\nu+\nu_0)^2}$$

Quand R_0 tend vers l'infini, μ tend vers zéro, et à la limite, on obtient la densité spectrale de puissance normée du modèle asymptotique :

$$\lim_{\mu \to 0} s_X(\nu) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0)\right)$$

(où $\delta(\nu)$ est la mesure de Dirac d'argument ν appliquée au point $\nu = 0$)

Si l'on suppose que le brouillage total est composé d'un tel bruit impulsif et d'un bruit de fond gaussien précédemment défini, indépendant du bruit impulsif, on obtient comme fonction caractéristique asymptotique :

$$\varphi_{X(\infty)}(u) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha\mu_0} \cdot \Gamma_{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot u^{\frac{\gamma}{\alpha}}} \; e^{-\sigma^2 \frac{u^2}{2}}$$

On obtient alors la fonction caractéristique du modèle BI de D. MIDDLETON qui est aussi la fonction caractéristique du modèle de A.A. GIORDANO.

A la différence du modèle précédent, celui-ci est moins intéressant, car son interprétation physique est plus difficile.

3.5. Propriétés en loi et en moyenne quadratique d'un signal télégraphique filtré par un circuit intégrateur

Beaucoup de perturbations conduites sont dues à des signaux numériques rayonnés par des équipements de transmission. Les circuits se comportent en général comme des filtres linéaires. C'est pourquoi nous étudierons plus particulièrement le signal télégraphique intégré.

MODELISATION GENERALE DU BRUIT IMPULSIF

1. RAPPELS

Si X est une variable aléatoire admettant des moments de tous ordres, on a le développement suivant :

$$\varphi_X(u) \stackrel{\Delta}{=} \mathbb{E}(e^{iuX}) = \sum_{n\geq 0} \frac{(iu)^n \, \mathbb{E}(X^n)}{n!}$$

Si X (t) est une fonction aléatoire telle que :

$$\forall n \geq 1;\ \forall (t_1, \ldots, t_n)\ ;\ \left|\mathbb{E}(X(t_1) \cdot \ldots \cdot X(t_n))\right| < +\infty$$

Alors :

$$\varphi_{X(t)}(u) = \mathbb{E}(e^{iuX(t)}) = \sum_{n\geq 0} \frac{(iu)^n \, \mathbb{E}(X(t)^n)}{n!}$$

Si l'on suppose l'échantillon ordonné :

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$$

d'un processus de Poisson$[0, t[$, la loi du nombre d'échantillons ordonnés est donnée par, sachant que chaque variable aléatoire t_i est infiniment répartie sur$[0, t[$:

$$P_n = \frac{n!}{t^n}$$

$$\mathbb{E}(X(t_1) \cdot \ldots \cdot X(t_n) / 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t)$$
$$= \frac{\mathbb{E}(X(t_1) \cdot \ldots \cdot X(t_n) / t_i \in [0,t[, \forall i)}{\mathbb{P}(0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X(t_1) \cdots X(t_n) / t_i \in [0,t[, \forall i)$$
$$= \frac{n!}{t^n} \cdot \mathbb{E}(X(t_1) \cdots X(t_n) / 0 < t_1 < \cdots < t_n < t)$$

Or :

$$\int \mathbb{E}(X(t_1) \cdots X(t_n) / t_i \in [0,t[)\, d\mathbb{P}(t_i \in [0,t[, \forall i)$$
$$= \mathbb{E}(X(t_1) \cdots X(t_n) / t_i \in [0,t[) \cdot \frac{1}{t^n}$$

d'où :

$$\mathbb{E}(X(t_1) \cdots X(t_n)) = n!\ \mathbb{E}(X(t_1) \cdots X(t_n) / 0 < t_1 < \cdots < t_n < t)$$
$$= n!\ \mathbb{E}(X(t_1) \cdots X(t_n) / t_1 < \cdots < t_n)$$

2. Loi de probabilité et d.s.p. du signal à la sortie d'un filtre linéaire

On suppose que :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

où h(t) est la réponse impulsionnelle du filtre linéaire.

En supposant :

$$\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n\ :$$

$$\mathbb{E}(X^n(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(x(\tau_1) \cdots x(\tau_n))\, h(t-\tau_1) \cdots h(t-\tau_n) \cdots d\tau_1 \cdots d\tau_n$$

x(t) est par hypothèse, un signal télégraphique prenant les valeurs 1 et -1, avec comme probabilité de transition infinitésimales λ et μ respectivement .

On a les formules suivantes :

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \left(P_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) e^{-(\lambda+\mu)t}$$
$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(P_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-(\lambda+\mu)t}$$

On suppose que le signal x(t) est centré, ce qui implique :

$$\lambda = \mu$$

On en déduit, dans ces conditions, les probabilités de transition :

$$P_{1,1}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} = e^{-\lambda t} \operatorname{ch} \lambda t = P_{0,0}(t)$$

$$P_{1,0}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} = e^{-\lambda t} \operatorname{sh} \lambda t = P_{0,1}(t)$$

$$\mathbb{E}(x(t)) = \mathbb{P}(x(t) = 1) - \mathbb{P}(x(t) = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\tau_2 > \tau_1\ ;\ \mathbb{E}(x(\tau_1) \cdot x(\tau_2)) = \mathbb{E}(1_{[x(\tau_1) = x(\tau_2)]}) - \mathbb{E}(1_{[x(\tau_1) \neq x(\tau_2)]}) = e^{-2\lambda(\tau_2 - \tau_1)}$$

$$\mathbb{E}(x(\tau_1) \cdots x(\tau_n)) = 0 \qquad n = 2k+1$$
$$= e^{-2\lambda \sum_{i=2}^{n} |\tau_i - \tau_{i-1}|} \qquad n = 2k$$
$$(\tau_n > \tau_{n-1} > \cdots > \tau_2 > \tau_1)$$

1. Intégrateur

La réponse impulsionnelle d'un circuit RC est égale à :

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

D'où :

$$\mathbb{E}(X(t)^n) = n!\, \alpha^n \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ fois}} e^{-2\lambda \sum_{i=2}^{n} |\tau_i - \tau_{i-1}|}\, e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} (t-\tau_i)} \cdots d\tau_1 \cdots d\tau_n$$

Sachant que :

$$\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n$$

par changement de variable, on obtient en faisant tendre t vers l'infini :

$$\forall i\ ;\ \forall \tau_i\ \ 0 \leq t - \tau_i \leq \tau_{i+1} - \tau_i\ ;\ n = 2k$$

$$\mathbb{E}(X(t)^n) = n!\, \alpha^n \int_0^{\infty} \int_{\tau_1}^{\infty} \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{\infty} e^{-2\lambda \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} [\tau_{i+1} - \tau_i]} \cdots e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} (\tau_{i+1} - \tau_i)}\, d\tau_1 \cdots d\tau_n$$

$$= n!\, \alpha^n \int_0^{\infty} \int_{\tau_1}^{\infty} \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{\infty} e^{-2\lambda \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \tau_i}\, e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} \tau_i}\, d\tau_1 \cdots d\tau_n$$

Pour n = 2 :

$$\mathbb{E}(X(t)^2) = 2!\,\alpha^2 \int_0^{\infty}\int_{\tau_1}^{\infty} e^{-2\lambda(\tau_2-\tau_1)} \cdot e^{-\alpha(\tau_2+\tau_1)} \cdot d\tau_1 d\tau_2$$

$$= 2!\,\alpha^2 \int_0^{\infty}\int_{\tau_1}^{\infty} e^{-(2\lambda+\alpha)\tau_2}\, d\tau_2\, e^{(2\lambda-\alpha)\tau_1}\, d\tau_1$$

$$= \frac{1}{1+\frac{2\lambda}{\alpha}}$$

D'où par récurrence :

$$\mathbb{E}\,(X(t)^n) = \frac{(2r)!}{r!\,2^r} \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{2i-1+\frac{2\lambda}{\alpha}} \quad ; \quad n = 2r$$

Moment non centré l'ordre r d'une loi bêta .

D'où la d.d.p. de X(t) :

$$p_X(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{\alpha}\right)}$$

On obtient une loi bêta de paramètres $\frac{1}{2}$ et $\frac{\lambda}{\alpha}$. Si le signal télégraphique, à l'entrée du filtre a comme amplitude $\pm$ h, on obtient la loi de probabilité des amplitudes à la sortie du filtre par un simple changement de variable.

Comportement spectral :

$$S_X(\nu) = S_\chi(\nu) \cdot |G(\nu)|^2$$

avec :

$$S_\chi(\nu) = 2\int_0^{\infty} e^{-2\lambda\tau} \cos 2\pi\nu\tau\, d\tau = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2\nu^2}$$

$$|G(\nu)|^2 = 2\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha u}\, \alpha\, e^{-\alpha(u+\tau)}\, du\right) \cos 2\pi\nu\tau\, d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha\tau} \cos 2\pi\nu\tau\, d\tau = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}$$

On obtient le produit de deux d.s.p. en $\frac{1}{1+\nu^2}$, donc donc une décroissance en $\frac{1}{\nu^4}$ (généralisation immédiate pour une amplitude $\pm$ h.)

4 - CONCLUSION

Le bruit impulsif peut donc servir à modéliser beaucoup de bruits physiques puisque les modèles développés dans cette étude correspondent à une réalité physique. En effet, la plupart des auteurs adoptent la loi de Weibull pour représenter le "clutter"radar. Le présent modèle fournit donc une modélisation statistique, sous la forme d'un processus aléatoire de la formation réelle du "clutter" radar.

D'une façon générale, cette modélisation ne prétend pas expliquer physiquement la formation des bruits. Par contre, elle fournit un modèle statistique de représentation de l'évolution d'un bruit au cours du temps, ce bruit étant supposé être modélisable sous la forme d'un bruit impulsif. Or, la majorité des bruits non gaussiens sont de type impulsif, et cette modélisation permet, moyennant certaines hypothèses de connaître la répartition statistique des amplitudes et les propriétés spectrales du bruit étudié quand celui-ci est impulsif.

BIBLIOGRAPHIE

1) J. de REFFYE - Modélisation des phénomènes aléatoires discontinus de type impulsif. Quelques applications à la physique (Thèse d'Etat Paris VI 1981) (à paraître).

2) A. BLANC-LAPIERRE - Modèles statistiques pour l'étude des phénomènes de fluctuation (Masson).

3) D.D. SNYDER - Random Point Processes (Wiley)

4) E. PARZEN - Stochastic Processes (Holden-Day, Inc).

5) D.R.COX : Point Processes (Cambridge)
