HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981

CHAINES DE MARKOV A DEUX INDICES

TWO-PARAMETER MARKOV CHAINS

M. GROJNOWSKI et G. MAZZIOTTO

M. GROJNOWSKI
E.N.S.T.
46, rue Barrault
75013 PARIS

G. MAZZIOTTO - PAA/ATR/MTI
C.N.E.T.
38-40 rue du Général Leclerc
92131 ISSY LES MOULINEAUX

RESUME

Dans cet article, on étudie divers types de processus markoviens homogènes, indexés sur N^2 et on en construit certains par un procédé d'innovation.

Par une approche analogue à celle du cas continu (3), on définit, dans la première partie, les notions de chaine markovienne et ⋆ -markovienne. Prolongeant par cette étude des travaux, (5), sur le cas stationnaire, on montre que la loi d'une chaine de Markov sur N^2 est caractérisée par un triplet de noyaux de transition et une distribution initiale. Une condition pour qu'une telle chaine soit, de plus, ⋆ -markovienne est donnée sous une forme littérale.

Dans la deuxième partie, on construit des processus ⋆ -markoviens, à valeurs dans un groupe fini, par un système d'équations d'état commandées par un bruit blanc. La classe des chaines ainsi obtenue contient la marche aléatoire, les exemples de (2) et les processus du type de ceux utilisés, (1) , (4), pour modéliser des images.

SUMMARY

In this paper, various homogeneous markovian properties are given for processus indexed by N^2, some of which are obtained in terms of innovation process. In the first part we define by analogy with the continuous case of (3) the markovian and the ⋆-markovian chains. This work is connected with (5) mostly concerned with stationnary behaviour. We prove here that the statistics of a markovian chain is characterized by three transition kernels and an initial law. A sufficient condition for a markovian process to be ⋆-markovian is given.

In the second part we define ⋆ -markovian processes as the solutions of a system of state equations driven by a white noise. The class of chains so obtained contains the random walk, the examples of (2) and the processes as those used in (1) and (4) for image modelization.

CHAINES DE MARKOV A DEUX INDICES

TWO-PARAMETER MARKOV CHAINS

I - CHAINES MARKOVIENNES ET $\star$ - MARKOVIENNES

I .1 Définitions, notations

Soit E un ensemble fini ou dénombrable, $(\Omega, \underline{\underline{A}}, P)$ un espace de probabilité et $\{X_{mn}\ ;\ (m,n) \in N^2\}$ une famille de v.a. définies sur cet espace et à valeurs dans E. On introduit les notations suivantes (cf. aussi Fig. 1) :

$\forall m \in N$: $X^m_k = (X_{1k}, X_{2k}, \ldots, X_{mk})$: processus à valeurs dans E^m

$\forall n \in N$: ${}^nX_j = (X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jn})$: processus à valeurs dans E^n.

$\forall (m,n) \in N^2$: $(X^{mn} = (X_{jk}\ ;\ j \leqslant m,\ k \leqslant n)$

$X^{\llcorner m,n} = (X_{m-1n}, X_{m-1n-1}, X_{mn-1})$

Ainsi, $\forall\, n \geqslant k$ (resp. $\forall\, m \geqslant j$), X^m_k (resp. ${}^nX_j$) est la ligne k(colonne j) de X^{mn}. On notera en général x_{mn}, x^{mn}, x^m_n, ${}^nx_m$, $x^{\llcorner mn}$, les valeurs prises respectivement par X_{mn}, X^{mn}, X^m_n, ${}^nX_m$, $X^{\llcorner m,n}$.

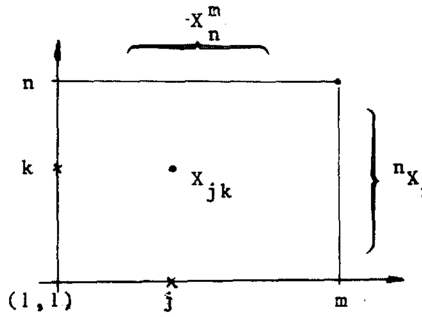

Figure 1

La tribu engendrée par X^{mn} est notée $\underline{\underline{F}}_{mn} = \sigma(X^{mn})$, $\forall (m,n) \in N^2$, et on pose, $\underline{\underline{F}}^1_m = \bigvee_{n \in N} \underline{\underline{F}}_{mn}$, $\underline{\underline{F}}^2_n = \bigvee_m \underline{\underline{F}}_{mn}$, $\underline{\underline{F}}^{\star}_{mn} = \underline{\underline{F}}^1_m \vee \underline{\underline{F}}^2_n$.

DEFINITION 1 : soit $X = (X_{mn}\ ;\ (m,n) \in N^2)$ un processus défini sur un espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, P)$, à valeurs dans E fini ou dénombrable.

(i) X est dit horizontalement (resp.verticalement) markovien si et seulement si, pour tout $n \in N^{\star}$ (resp. tout $m \in N^{\star}$) le processus $({}^nX_m)_{m \in N}$ (resp. $(X^m_n)_{n \in N}$) est une chaine de Markov relativement à la filtration $(\underline{\underline{F}}^1_m)_{m \in N}$ (resp. $(\underline{\underline{F}}^2_n)_{n \in N}$).

En d'autres termes, dans le cas horizontal :

$\forall n > 0, \forall m > 0$: $P[{}^nX_m \,/\, \underline{\underline{F}}^1_{m-1}] = P[{}^nX_m \,/\, {}^nX_{m-1}]$

et dans le cas vertical :

$\forall m > 0,\ n > 0$: $P[X^m_n \,/\, \underline{\underline{F}}^2_{n-1}] = P[X^m_n \,/\, X^m_{n-1}]$

(ii) X est dit 1-markovien (resp. 2-markovien) si pour tout choix d'indices $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$) (resp. $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$) le processus $\{(X_{n_1 m}, X_{n_2 m}, \ldots, X_{n_k m})\ ;\ m \in N\}$ (resp. $\{(X_{nm_1}, X_{nm_2}, \ldots, X_{m_k})^1 ;\ n \in N\}$ est une chaine de Markov relativement à la filtration $(\underline{\underline{F}}^1_m)_{n \in N}$ (resp. $(\underline{\underline{F}}^2_n)_{n \in N}$).

Autrement dit, dans le cas horizontal

$\forall n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, $\forall m > 0$:

$$P[X_{mn_2}, \ldots, X_{mn_k} / \underline{\underline{F}}^1_{m-1}] = P[X_{mn_2}, \ldots, X_{mn_k} / X_{m-1,n_1}, \ldots X_{m-1n_k}]$$

et dans le cas vertical

$\forall m_1 < m_2 < \ldots m_k$, $\forall n > 0$:

$$P[X_{m_1 n}, \ldots, X_{m_2 n} / \underline{\underline{F}}^2_{n-1}] = P[X_{m_1 n}, \ldots, X_{m_2 n} / X_{m_1 n-1}, \ldots, X_{m_2 n-1}]$$

DEFINITION 2 : on dira qu'une chaine est markovienne (resp. $\star$-markovienne) si elle est à la fois horizontalement et verticalement markovienne (resp. 1- et 2-markovienne).

Le terme "$\star$-markovienne" est inspiré par le résultat suivant : pour qu'une chaine (X_{mn}) soit 1- et 2-markovienne, il faut et il suffit que pour tout choix d'indices $m_1 < m_2$ et $n_1 < n_2$ ont ait $P[X_{m_2 n_2} / F^{\star}_{m_1 n_1}] = P[X_{m_2 n_2} / X_{m_1 n_2}, X_{m_1 n_1}, X_{m_2 n_1}]$. On trouvera dans(3) la démonstration de ce résultat pour les processus à paramètres dans R^2_+. Ces processus sont appelés aussi markoviens séparables dans(2) .

I.2 Un exemple en théorie des communications

On considère une suite de canaux aléatoires de caractéristiques identiques (ce qui sera traduit dans ce qui suit par l'hypothèse d'homogénéité). Supposons que $(X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{m1}, \ldots)$ représente une suite de symboles émis par une source à l'entrée du premier canal. De même, $(X_{1n}, X_{2n}, \ldots X_{mn}, \ldots)$ représente la suite de symboles sortant du n-lième canal et entrant dans le n-ème.

Dire que X est **verticalement** markovien revient à dire que pour tout n, les m premiers symboles reçus à la sortie du n-ième canal (c'est-à-dire X^n_m) ont une loi qui ne dépend que des m premiers symboles entrant dans ce canal (c'est-à-dire X_m^{n-1}). On a donc une suite de canaux markoviens non-anticipatifs. Dire que X est 2-markovien, c'est dire que le m-ième symbole reçu (c'est-à-dire X_{mn}) a, conditionnellement à sa source, une loi qui ne dépend que du m-ième symboles émis $X_{m,n-1}$ (et non plus des ceux qui le précèdent : X_{m-1}^{n-1}). C'est donc une suite de canaux sans mémoire.

Si l'on complète maintenant le modèle, en supposant que la première source émet ses symboles successifs de manière markovienne, alors on pourra envisager les possibilités qu'il y a d'avoir également X horizontalement markovien ou 1-markovien.

On considèrera dans ce qui suit les chaines horizontalement (resp. verticalement) markoviennes homogènes, c'est-à-dire telles que pour tout $m \geqslant 0$ (resp. tout $n \geqslant 0$) la chaine $(X_n^m)_{n\geqslant 0}$ (resp. $({}^nX_m)_{m\geqslant 0}$) soit homogène. On notera Q^m (resp. R^n) les matrices de transition horizontales (resp. verticales) définies par les relations :

$$P[X_n^m = x_n^m / X_{n-1}^m = x_{n-1}^m] = Q^m(x_{n-1}^m \;;\; x_n^m)$$

$$(\text{resp. } P[{}^nX_m = {}^nx_m / {}^nX_{m-1} = {}^nx_{m-1}] = R^n({}^nx_{m-1} \;;\; {}^nx_m))$$

Q^m (resp. R^n) sont des matrices dont les lignes et les colonnes sont indicées par les éléments de E^m (resp. E^n). Elles satisfont les relations :

$$\forall\, x^m, y^m \in E^m \;:\; Q^m(x^m, y^m) \geqslant 0$$

$$\forall\, x^m \in E^m \;:\; \sum_{y^m \in E^m} Q^m(x^m, y^m) = 1$$

De plus, on a la condition nécessaire de projectivité suivante :

$\forall m \in N$, $\forall\, x^m, y^m \in E$, $\forall\, x \in E$

$$(1\text{-}1) \quad \sum_y Q^{m+1}((x^m, x), (y^m, y)) = Q^m(x^m, y^m)$$

Soit $I = (m_1 < m_2 < \ldots < m_k)$ et $x \in E^{m_k}$. On note x^I le n-uple extrait, $x^I = (x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k})$, $\forall\, k \in N$, $X_n^I = (X_{m_1 n}, \ldots, X_{m_k n})$.

<u>PROPOSITION 1</u> : Soit X verticalement markovien. Il est de plus 2-markovien si et seulement si :

$\forall k \in N$, $\forall I = (m_1, \ldots, m_k)$, $\forall x \in E^{m_k}$, $\forall a \in E^k$:

$\sum_{y : y^I = a} Q^{m_k}(x, y)$ ne dépend que de x^I.

<u>DEMONSTRATION</u> : le résultat découle de ce qu'en toute généralité :

$$\sum_{y : y^I = a} Q^{m_k}(x, y) = P[X_m^I = a / X_{n-1}^{m_k} = x] \quad \blacksquare$$

<u>PROPOSITION 2</u> : si X est markovien, alors :

$$(1\text{-}2) \quad Q^m(x_{n-1}^m, x_n^m) = Q^{m-1}(x_{n-1}^{m-1}, x_n^{m-1})\, S(x^{mn}; x_{mn})$$

$$(1\text{-}3) \quad R^n({}^nx_{m-1}, {}^nx_m) = R^{n-1}({}^{n-1}x_{m-1}, {}^{n-1}x_m)\, S(x^{mn}; x_{mn})$$

Le terme $S(x^{mn}; x_{mn})$ dans les formules ci-dessus ne dépend que de $x_{m-1n}, x_{m-1,n-1}, x_{m,n-1}$ et x_{mn}. Sa signification sera précisée par la proposition suivante

<u>DEMONSTRATION</u> : on peut calculer $P[X^{mn} = x^{mn}]$ de deux manières différentes :

$$P[X^{mn} = x^{mn}] = P[X^{mn-1} = x^{mn-1}]\, Q^m(x_{n-1}^m, x_n^m) =$$

$$= P[X^{m-1,n-1} = x^{m-1,n-1}]\, R^{n-1}({}^{n-1}x_{m-1}, {}^{n-1}x_m)\, Q^m(x_{n-1}^m, x_n^m)$$

et d'un autre côté :

$$P[X^{mn} = x^{mn}] = P[X^{m-1,n} = x^{m-1,n}]\, R^n({}^nx_{m-1}, {}^nx_m) =$$

$$= P[X^{m-1,n-1} = x^{m-1,n-1}]\, Q^{m-1}(x_{n-1}^{m-1}, x_n^{m-1})\, R^n({}^nx_{m-1}, {}^nx_m)$$

Il s'en suit que, pour tout x^{mn}, on a :

$$R^{n-1}({}^{n-1}x_{m-1}, {}^{n-1}x_m)\, Q^m(x_{n-1}^m, x_n^m) = Q^{m-1}(x_{n-1}^{m-1}, x_n^{m-1})\, R^n({}^nx_{m-1}, {}^nx_m)$$

ce qui, en supposant que $R^{n-1}({}^{n-1}x_{m-1}, {}^{n-1}x_m) \neq 0$ et $Q^{m-1}(x_{n-1}^{m-1}, x_n^{m-1}) \neq 0$ s'écrit aussi :

$$\frac{Q^m(x_{n-1}^m, x_n^m)}{Q^{m-1}(x_{n-1}^{m-1}, x_n^{m-1})} = \frac{R^n({}^nx_{m-1}, {}^nx_m)}{R^{n-1}({}^{n-1}x_{m-1}, {}^{n-1}x_m)}$$

$$= S(x_{m-1,n}, x_{m-1,n-1}, x_{mn-1}; x_{mn}). \quad (1\text{-}4)$$

En effet, le premier membre de la dernière relation dépend des éléments x_n^m, x_{n-1}^m et de m, tandis que le deuxième membre dépend de ${}^nx_m$, ${}^nx_{m-1}$ et de n. En raison de leur égalité, ces deux termes ne peuvent en réalité dépendre que des éléments communs $x_{m-1,n}$, $x_{m-1,n-1}$, $x_{m,n-1}$ et x_{mn}.

D'un autre côté, si on a par exemple $Q^{m-1}(x_{n-1}^{m-1}, x_n^{m-1}) = 0$, alors, d'après (1-1), $Q^m((x_{n-1}^{m-1}, x), (x_n^{m-1}, y)) = 0$, $\forall\, x, y \in E$ et (1-2) est triviale. Soient $x_1, x_2, x_3, x \in E$ et choisissons un x_{n-1}^{m-1} (resp. x_n^{m-1}) dont la dernière coordonnée vaut x_2 (resp. x_1). La relation (1-2) donne :

$$Q^m((x_{n-1}^{m-1}, x_3), (x_n^{m-1}, x)) = Q^{m-1}(x_{n-1}^{m-1}, x_n^{m-1})\, S(x_1, x_2, x_3; x)$$

et en raison de (1-1), il vient $\sum_{x \in E} S(x_1, x_2, x_3; x) = 1.$ $\blacksquare$

Ainsi, les $S(x_1, x_2, x_3; x)$ sont les éléments d'une matrice de transition de E^3 dans E. La proposition qui suit fournit une interprétation de cette probabilité conditionnelle.

<u>PROPOSITION 3</u> : soit $\underline{\underline{F}}_{mn}^{\llcorner} = \sigma(X_n^{m-1}, X^{m,n-1})$ (c'est-à-dire la tribu engendrée par toutes les X_{pq} engendrant $\underline{\underline{F}}_{mn}$

à l'exception de X_{mn}). Alors :

$$P[X_{mn}/\underline{\underline{F}}^{\llcorner}_{mn}] = S(X^{\llcorner mn} ; X_{mn})$$

DEMONSTRATION :

$$P[X^m_n / X^m_{n-1}] = P[X^{m-1}_n , X_{mn} / \underline{\underline{F}}_{m,n-1}] =$$

$$= P[X_{mn}/X^{m-1}_n , \underline{\underline{F}}_{mn-1}] . P[X^{m-1}_n/\underline{\underline{F}}_{mn-1}] =$$

$$= P[X_{mn}/\underline{\underline{F}}^{\llcorner}_{mn}] \; P[X^{m-1}_n / X^{m-1}_{n-1}]$$

■

PROPOSITION 4 : Toute chaine markovienne sur N^2 est caractérisée par la donnée :

(i) d'une probabilité sur E (la loi initiale)

(ii) de deux matrices de transition de E dans E (les transitions de $(X^1_n)_{n\varepsilon N}$ et $({}^1X_m)_{m\varepsilon N}$)

(iii) d'une matrice de transition de E^3 dans E.

DEMONSTRATION : La proposition 2 permet d'exprimer toutes les probabilités de transition de la chaine à partir de S et des probabilités de transition sur les axes (Q^1 et R^1). Plus précisément :

$$Q^m(x^m_{n-1}, x^m_n) = Q^1(x_{1,n-1}, x_{1,n}) S(x^{\llcorner 2n} ; x_{2n}) \ldots S(x^{\llcorner mn} ; x_{mn})$$

$$= Q^1(x_{1,n-1}, x_{1n}) \prod_{k=2}^{n} S(x^{\llcorner kn} ; x_{kn})$$

$$R^n({}^nx_{m-1}, {}^nx_m) = R^1(x_{m-1,1}, x_{m,1}) \prod_{j=2}^{n} S(x^{\llcorner jm} ; x_{jm})$$

De même, en notant p la loi de X_{11} et en écrivant Q (resp.R) pour Q^1 (resp.R^1), il vient :

$$(1-5) \qquad P[X^{mn} = x^{mn}] =$$

$$= p(x_{11}) [\prod_{k=1}^{n-1} Q(x_{1k}, x_{1k+1})] [\prod_{j=1}^{m-1} R(x_{j1}, x_{j+1,1})] [\prod_{\substack{j=2 \\ k=2}}^{m,n} S(x^{\llcorner jk} ; x_{jk})]$$

Inversement, étant donnés p,Q,R et S, la formule précédente fournit toutes les distributions finies d'un processus dont on vérifie le caractère markovien, comme cela a été fait dans [5]. ■

II - CHAINES $\star$ MARKOVIENNES A INNOVATION

Dans ce paragraphe, on construit des chaines $\star$-markoviennes par une méthode analogue à celle de [3] pour les diffusions bidirectionnelles. Cette classe contient d'une part la marche aléatoire N^2 et d'autre part les processus engendrés par un automate linéaire du type de ceux étudiés dans [2].

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \underline{\underline{A}}, P)$ on se donne une suite double de v.a. indépendantes et équidistribuées $(W_{ij}, (i,j) \varepsilon N^2)$, à valeurs dans un groupe E, supposé ici fini ou dénombrable. On appelle marche aléatoire le processus $X = (X_{mn}, (m,n) \varepsilon N^2)$ défini par :

$$X_{mn} = \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} W_{ij}$$

Ce processus est manifestement $\star$-markovien et vérifie

$$X_{mn} = X_{m-1n} + \sum_{j=1}^{n} W_{mj} = X_{mn-1} + \sum_{i=1}^{m} W_{in}$$

Cet exemple suggère d'étudier les processus X solution du système d'équation suivant :

$$(2\text{-}1) \quad X_{mn} = F(X_{m-1n}) + \emptyset_n ({}^nW_m) , \; X_{on} \text{ donné ;}$$

$$(2.2) \quad X_{mn} = \tilde{F}(X_{mn-1}) + \tilde{\emptyset}_m (W^m_n) , \; X_{mo} \text{ donné.}$$

où F et $\tilde{F}$, $\emptyset_n$, $\tilde{\emptyset}_m$ sont, respectivement, des fonctions données de E dans E, de E^n dans E, de E^m dans E.

La tribu $\underline{\underline{F}}_{mn}$ est aussi bien engendrée par les v.a.$(W_{ij}, i \leqslant m, j \leqslant n)$ et il est facile d'en déduire, que si un tel système a une solution, celle-ci est $\star$-markovienne. Par analogie avec des problèmes de filtrage (cf [3] par exemple), on appelle innovation horizontale de hauteur n (resp. innovation verticale de largeur m) le processus $(\emptyset_n({}^nW_m), m\varepsilon N)$ (resp.$(\tilde{\emptyset}_m(W^n_m), n\varepsilon N)$)

On commence par dégager une condition sur les coefficients F, $\tilde{F}$, $\emptyset$, $\tilde{\emptyset}$, nécessaire à l'existence d'une solution.

PROPOSITION 5 : Si le système (2-1), (2-2) admet une solution, X, l'identité suivante est satisfaite p.s. sur $(\Omega, \underline{\underline{A}}, P)$: $\forall (m,n) \varepsilon N^2$

$$(2\text{-}3) \quad F[\tilde{F}(X_{m-1n-1}) + \tilde{\emptyset}_{m-1}(W^{m-1}_n)] - \tilde{\emptyset}_m(W^m_n) =$$

$$= \tilde{F}[F(X_{m-1n-1}) + \emptyset_{n-1}({}^{n-1}W_m)] - \emptyset_n({}^nW_m)$$

et il existe une fonction G de E^2 dans E telle que

$$(2\text{-}4) \quad X_{mn} = F(X_{m-1n}) + \tilde{F}(X_{mn-1}) - G(X_{m-1n-1}, W_{mn})$$

DEMONSTRATION :

D'après la première équation :

$$\emptyset_n({}^nW_m) = X_{mn} - F(X_{m-1n})$$

et si on utilise alors la seconde équation

$$\emptyset_n({}^nW_m) = \tilde{F}(X_{mn-1}) + \tilde{\emptyset}_m(W^m_n) - F[\tilde{F}(X_{m-1n-1}) + \tilde{\emptyset}_{m-1}(W^{m-1}_n)]$$

D'où

$$X_{mn} = F(X_{m-1n}) + \tilde{F}(X_{mn-1}) - F[\tilde{F}(X_{m-1n-1}) + \tilde{\emptyset}_{n-1}(W^{m-1}_n)] + \tilde{\emptyset}_m(W^m_n)$$

Symétriquement, on a

$$X_{mn} = \tilde{F}(X_{mn-1}) + F(X_{m-1n}) - \tilde{F}[F(X_{m-1n-1}) + \emptyset_{n-1}({}^{n-1}W_m)] + \emptyset_n({}^nW_m)$$

En identifiant ces deux expressions, nécessairement, il vient (2-3).

Comme les v.a. W_n^{m-1}, ${}^{n-1}W_n$, W_{mn}, X_{m-1n-1} sont mutuellement indépendantes, on déduit de cette identité qu'il existe, $\forall (m,n) \in N^2$, une fonction, G_{mn} de E^2 dans E, telle que :

$$\Phi_n({}^nW_m)=\tilde{F}[F(X_{m-1n-1})+\Phi_{n-1}({}^{n-1}W_m)]-G_{mn}(X_{m-1n-1},W_{mn}) \text{ p.s}$$

$$\tilde{\phi}_m(W_n^m)=F[\tilde{F}(X_{m-1n-1})+\tilde{\phi}_{m-1}(W_n^{m-1})]-G_{mn}(X_{m-1n-1},W_{mn}) \text{ p.s}$$

Le processus X devant avoir une probabilité de transition stationnaire, la fonction G_{mn} ne dépend pas du couple (mn). Finalement, si X est solution du système (2-1),(2-2), il satisfait à (2-4) . ■

On a donc X_{mn} à partir de $X_{m-1n}, X_{m-1n-1}, X_{mn-1}$, de la v.a. W_{mn}, que l'on appelle innovation diagonale, et des valeurs sur les axes.

PROPOSITION 6 : F et $\tilde{F}$, ϕ_n, $\tilde{\phi}_m$ sont des fonctions sur, respectivement, E, E^n, E^m telles que :

$$\forall u \in E,\ \forall\, {}^{n-1}x \in E^{n-1},\ \forall\, y^{m-1} \in E^{m-1},\ \forall v \in E$$

(2-5) $\tilde{F}[F(u)+\phi_{n-1}({}^{n-1}x)]-\phi_n(({}^{n-1}x,v)) = G(u,v)$

$\forall n \geqslant 1$ avec $\phi_o = 0$.

(2-6) $F[\tilde{F}(u)+\tilde{\phi}_{m-1}(y^{m-1})]-\tilde{\phi}_m((y^{m-1},v))=G(u,v)$

$\forall m \geqslant 1$ avec $\tilde{\phi}_o = 0$

et si les données initiales, sur les axes, satisfont à

(2-7) $X_{mo} = F(X_{m-1o}) \qquad \forall m \geqslant 1$

(2-8) $X_{on} = \tilde{F}(X_{on-1}) \qquad \forall n \geqslant 1$

avec X_{oo} une v.a. donnée, indépendante de la suite $(W_{mn}, (m,n) \in N^2)$.

Alors le processus X défini par l'équation (2-4) est solution du système (2-1), (2-2).

DEMONSTRATION : On écrit chaque équation du type (2-1) en partant, pour m = 1, de (2-7) et on combine avec (2-6) et (2-4). ■

Pour donner quelques exemples non triviaux, on peut expliciter les relations précédentes dans le cas linéaire. On suppose alors que E, fini, est muni d'une structure d'espace vectoriel sur un corps K et on se donne deux opérateurs F et $\tilde{F}$ par des matrices d'éléments de K. La condition de comptabilité (3-5) est satisfaite si F et $\tilde{F}$ commutent et si le processus X est défini par :

(2-9) $X_{mn} = FX_{m-1n}+\tilde{F}X_{mn-1} - F\tilde{F}X_{mn} + W_{mn}$

$X_{mo} = F^mX_{oo}$, $X_{on} = \tilde{F}^nX_{oo}$ et X_{oo} donné indépendant des $(W_{ij}\ ; i,j \geqslant 1)$.

Ce type de processus a été notamment utilisé, [1] et [4], dans des problèmes d'identification d'images.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ATTASI : "Modèles stochastiques de suites gaussiennes à deux indices" - Rapport de recherche IRIA - LABORIA No 56 (1974).

[2] H. KOREZLIOGLU : "On 2-D Innovation Process" - First European Signal Processing Conference - Lausanne, 16-18/9/1980.

[3] H. KOREZLIOGLU - P. LEFORT - G. MAZZIOTTO : "Une propriété markovienne et diffusions associées" - Colloque ENST-CNET sur les processus à deux indices- Paris, 30/6 et 1/7/80.

[4] M. KUNT : "Statistical models and information measurements for two-level digital fac simile" - Information and Control, Vol. 33 N° 4 (1977) 333-351.

[5] D.K. PICKARD : "Unilateral Markov Fields" Adv. Appl. Prob., N°12 (1980) 655-671.