HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU
SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981

PREVISION ET FILTRAGE LINEAIRES DES PROCESSUS A DEUX INDICES
LINEAR PREDICTION AND FILTERING OF TWO-PARAMETER PROCESSES

H. KOREZLIOGLU et PH. LOUBATON

E.N.S.T., DEPARTEMENT SYSTEMES ET COMMUNICATIONS
46, rue Barrault - 75634 PARIS CEDEX 13

RESUME

Ce travail est une introduction à la théorie de Wiener-Kolmogorov de la prévision et du filtrage linéaires des processus stationnaires à deux indices discrets, avec une approche inspirée de la méthode de Doob dans le cas des processus à un indice, [1].

Après une section de préliminaires sur les notations et les définitions, nous considérons, dans la section II, le problème de régularité des processus selon leurs passés caractérisés par des demi-plan tronqués et les problèmes de représentation canonique et de factorisation spectrale. Nous suggérons une méthode de factorisation et étudions, comme exemple, l'algorithme de factorisation donné dans [2] et [3] avec application au filtrage.

La troisième section est consacrée à l'étude des processus possédant la propriété F.4, considérés dans le travail [7] dont nous développons et améliorons quelques uns des résultats. Nous présentons l'algorithme de factorisation spectrale qui, dans ce cas, est une extension directe de l'algorithme de factorisation du cas à un indice.

Finalement, dans la section IV, nous dérivons l'expression du filtre qui permet de calculer l'estimation "causale" d'un processus stationnaire en fonction d'un autre processus stationnaire qui lui est stationnairement correlé.

SUMMARY

This work is an introduction to the Wiener-Kolmorogov Linear Prediction and Filtering Theory for stationary processes with two discrete parameters, the approach used being inspired from Doob's method in the one-parameter case, [1].

After a section of preliminaries on notations and definitions, we consider, in Section II, the regularity problem of processes relative to their pasts characterized by truncated half-planes, the canonical representation problem and the spectral factorization problem. We suggest a factorization method and study, as an example, the factorization algorithm given in [2] and [3] with application to filtering.

In Section III, we consider processes having the property F.4, introduced in reference [7] of which some results are improved and developed. We present the spectral factorization algorithm which, in this case, is a direct extension of the one-parameter factorization algorithm.

Finally, in Section IV, we derive the expression of the filter leading to the "causal" estimation of a stationary process in terms of another stationary process, stationarily correlated with the first one.

PREVISION ET FILTRAGE LINEAIRES DES PROCESSUS A DEUX INDICES
LINEAR PREDICTION AND FILTERING OF TWO-PARAMETER PROCESSES

I. PRELIMINAIRES

Les variables aléatoires (v.a) et les processus aléatoires (p.a) considérés dans ce travail sont à valeurs complexes et définis sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ fixé une fois pour toutes. $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ est l'espace de Hilbert complexe des v.a. dont le module possède un second moment fini. La norme d'une v.a. $X \in L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ définie par $(E|X|^2)^{1/2}$ est désignée par $\|X\|$. Pour une famille $\{Xj, j \in J\} \subset L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ l'espace engendré par cette famille est le plus petit sous-espace hilbertien de $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ contenant cette famille. (On ne distingue pas une v.a. de sa classe d'équivalence dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$). Si $Y \in L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ et si H est un sous-espace hilbertien de $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, (Y/H) désigne la projection orthogonale de Y sur H. Si H est l'espace engendré par $\{Xj, j \in J\}$, (Y/H) est aussi bien désigné par $(Y/\{Xj, j \in J\})$. Si H_1 et H_2 sont deux sous-espaces hilbertiens orthogonaux de $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, alors $H_1 \oplus H_2$ représente leur somme directe et si H_1 et H_2 sont deux sous-espaces hilbertiens tels que $H_1 \subset H_2$, alors $H_2 \ominus H_1$ représente le complément orthogonal de H_1 dans H_2.

$\mathbb{Z}^2$, l'ensemble de tous les couples d'entiers, est doté de la relation d'ordre partiel : $(p,q) < (m,n) \Leftrightarrow p \leqslant m, q \leqslant n$. On écrira $(p,q) \ll (m,n)$ si $p < m$, $q < n$. On pose :

$$S=\{(m,n) : m \geqslant 1, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,n),\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}^2$$
$$I=[\,-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\,] \subset \mathbb{R}$$
$$D= I \times I \subset \mathbb{R}^2$$

Un processus $X = \{X_{m,n}, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\} \subset L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, i.e. du second ordre, est dit stationnaire au sens large, si $E(X_{m,n})$ ne dépend pas de (m,n) et si, pour tous (m,n), $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $E(X_{m,n}\, \overline{X}_{p,q})$ ne dépend que de $(m-p, n-q)$.

Dans toute la suite, les v.a. et les p.a. considérés seront supposés centrés et du second ordre et X représentera un processus stationnaire au sens large.

Il est connu que la fonction d'autocorrélation de X admet la représentation spectrale :

$$E(X_{m,n}\, \overline{X}_{o,o}) = \int_D \exp\,[\,2i\pi(mu + nv)]\, dF(u,v)$$

où F est la fonction de répartition spectrale de X. La fonction F est continue à droite, i.e. $F(u,v) = \lim F(u',v')$ lorsque $(u',v') > (u,v)$ et que $(u',v') \to (u,v)$. On a aussi $F(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 0$.

F admet la décomposition de Lebesgue :

$$F(u,v) = \int_{-\frac{1}{2}}^{u} \int_{-\frac{1}{2}}^{v} f(u,v)\,du\,dv + F_s(u,v)$$

où F_s est la partie singulière de F et f est la densité spectrale de X. F est dite absolument continue si sa partie singulière est nulle. F désignera toujours la fonction de répartition spectrale de X et f sa densité.

On montre qu'il existe un processus $Z = \{Z(u,v), (u,v) \in D\}$ à accroissements orthogonaux (les accroissements de Z, considérés comme une mesure, sur des rectangles disjoints de D sont mutuellement orthogonaux) tel que $F(u,v) = E|Z(u,v)|^2$ et que

$$X_{m,n} = \int_D \exp[\,2\pi i(mu + nv)]\, dZ(u,v).$$

X est appelé un bruit blanc, si $E|X_{m,n}|^2 = C = C^{te} > 0$ et $E(X_{m,n}\, X_{p,q}) = 0$ pour $(m,n) \neq (p,q)$. X est un bruit blanc si et seulement si, sa fonction de répartition spectrale est absolument continue avec densité constante. Dans tout ce qui suit, nous normaliserons les bruits blancs en prenant C=1 ; dans ce cas, tout bruit blanc est une suite orthonormée.

X étant un processus stationnaire au sens large, nous considérons les espaces de Hilbert suivants qui décrivent les différents types de passés engendrés par X:

H, engendré par X, (c'est toute la vie de X)
$H_{m,n}$, engendré par $\{X_{p,q} : (p,q) < (m,n)\}$
H^1_m, engendré par $\{X_{p,q} : p \leqslant m,\ q \in \mathbb{Z}\}$
H^2_n, engendré par $\{X_{p,q} : p \in \mathbb{Z},\ q \leqslant n\}$
$H^{\urcorner}_{m,n}$, engendré par H^1_m et $\{X_{m+1,q} : q \leqslant n\}$
$\overline{H}^{\llcorner}_{m,n}$, engendré par H^2_n et $\{X_{p,n+1} : p \leqslant m\}$
$H^{\star}_{m,n}$, engendré par H^1_m et H^2_n
$\overline{H}^{\urcorner}_{m,n}$, engendré par $\{X_{p,q} : (p,q) < (m+1,n+1), (p,q) \neq (m+1,n+1)\}$

S'il y a lieu de préciser que les fonctions F,f,Z et les espaces H, H^1, H^2 etc. correspondent bien au processus X nous les écrivons comme $F_X, f_X, Z_X, H(X), H^1(X), H^2(X)$ etc.

Le problème de prévision considéré dans la section suivante sera relatif aux passés $H^{\urcorner}_{m,n}$ et $\overline{H}^{\llcorner}_{m,n}$. Les autres passés interviennent dans un cas particulier que nous considérons dans la Section III. Comme les passés $H^{\urcorner}$ et $\overline{H}^{\llcorner}$ jouent des rôles symétriques, nous ne considérerons que les passés $H^{\urcorner}$, les résultats concernant les passés $\overline{H}^{\llcorner}$ s'en déduisant trivialement.

II. PREVISION LINEAIRE ET FACTORISATION SPECTRALE

Nous étudions ici les conditions sous lesquelles un processus X, centré et stationnaire au sens large, admet une représentation canonique en fonction de ses innovations et nous considérons le problème de factorisation spectrale correspondant à cette représentation canonique.

II.1 REGULARITE RELATIVE AUX PASSES $H^{\urcorner}$

Pour l'établissement des résultats énoncés dans ce paragraphe nous nous référons au travail [5] de Helson et Lowdenslager, dont nous extrayons les deux théorèmes suivants :

THEOREME II.1.1.: On a

(II.1.1.) $\|X_{m,n}-(X_{m,n}/\overset{\lrcorner}{H}_{m-1,n-1})\|^2=\exp\int_D \log f(u,v)dudv$
où le second membre doit être interprété comme nul si

$$\int_D \log f(u,v)dudv = -\infty.$$

THEOREME II.1.2 : La condition nécessaire et suffisante pour que la densité spectrale f admette la factorisation :

(II.1.2) $f(u,v)=\left|\sum_{(m,n)\in S} a_{m,n}\exp[-2i\pi(mu+nv)]\right|^2$

avec

(II.1.3) $a_{o,o}\neq 0$ et $\sum_{(m,n)\in S}|a_{m,n}|^2<\infty$

est que

(II.1.4) $\int_D \log f(u,v)dudv > -\infty$.

Il est facile de voir que $\int_D \log f(u,v)dudv < \infty$. Donc la condition (II.1.4) est équivalente à dire que log f est Lebesgue-intégrable.

DEFINITION II.1.3 : Nous dirons que le processus X satisfait à la condition (C) si F_X est absolument continue et si $\log f_X$ est Lebesgue-intégrable.

DEFINITION II.1.4 : $X_{m,n}-(X_{m,n}/\overset{\lrcorner}{H}_{m-1,n-1})$ s'appelle l'innovation de X au point (m,n) relativement à $\overset{\lrcorner}{H}_{m-1,n-1}$. X est dit déterministe si cette innovation est nulle ; autrement il est dit non-déterministe.

Le théorème II.1.1. dit que X est non déterministe si et seulement si log f est Lebesgue-intégrable.

Supposons X non-déterministe et soient

(II.1.5)

$$C_{o,o} = \|X_{m,n}-(X_{m,n}/\overset{\lrcorner}{H}_{m-1,n-1})\|=\exp\frac{1}{2}\int_D \log f(u,v)dudv$$

(II.1.6) $\overset{\lrcorner}{\nu}_{m,n} = C_{o,o}^{-1}[X_{m,n}-(X_{m,n}/\overset{\lrcorner}{H}_{m-1,n-1})]$

DEFINITION II.1.5 : Le processus $\overset{\lrcorner}{\nu}=\{\overset{\lrcorner}{\nu}_{m,n},(m,n)\in \mathbb{Z}^2\}$ est appelé le processus d'innovation (normalisé) de X.

Il est évident que $\overset{\lrcorner}{\nu}$ est un bruit blanc et que $X_{m,n}$ admet la représentation orthogonale suivante :

(II.1.7) $X_{m,n}=\sum_{(p,q)\in S} C_{p,q}\overset{\lrcorner}{\nu}_{m-p,n-q}+V_{m,n}$

où $C_{p,q}=E(X_{m,n}\overline{\overset{\lrcorner}{\nu}}_{m-p,n-q})$ et V est un processus orthogonal à $\overset{\lrcorner}{\nu}$.

DEFINITION II.1.6 : X est dit régulier, s'il est non-déterministe et si

(II.1.8) $X_{m,n}=\sum_{(p,q)\in S} C_{p,q}\overset{\lrcorner}{\nu}_{m-p,n-q}$

Dans ce cas, cette représentation est dite canonique.

On peut montrer que X est régulier si et seulement si, il existe un bruit blanc ν tel que $H'_{m,n}=H'_{m,n}(\nu')$ pour tout (m,n), auquel cas, ν est le processus d'innovation de X.

DEFINITION II.1.7 : Soit

(II.1.9) $Y_{m,n} = X_{m,n} - (X_{m,n}/H^1_{m-1})$

Pour m fixe, le processus $Y^m=\{Y_{m,n},\ n\in\mathbb{Z}\}$ engendre l'espace $H^1_m \ominus H^1_{m-1}$. Nous appelons Y^m l'innovation horizontale à l'abcisse m. Y^m peut être considéré comme une v.a. (de dimension infinie) à valeurs dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Le processus $Y=\{Y^m,\ m\in\mathbb{Z}\}$, désigné aussi bien par $Y=\{Y_{m,n},\ (m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$, est appelé le processus d'innovation horizontale de X.

Les deux processus Y et ν sont reliés l'un à l'autre d'après la proposition suivante :

PROPOSITION II.1.8 : (i) On a

(II.1.10) $X_{m,n}-(X_{m,n}/\overset{\lrcorner}{H}_{m-1,n-1})=Y_{m,n}-(Y_{m,n}/H_{n-1}(m))$

où $H_{n-1}(m)$ est l'espace engendré par $\{Y_{m,n-j},j\geq 1\}$, c'est-à-dire, l'innovation de X au point (m,n) est l'innovation de Y^m au point n. Par conséquent, X est non-déterministe si et seulement si, Y l'est.

(ii) Si X est régulier, alors Y^m est régulier. Soit, dans ce cas, (II.1.8) la représentation canonique de X alors Y^m admet la représentation canonique :

(II.1.11) $Y^m_n = Y_{m,n} = \sum_{q=o}^{\infty} C_{o,q}\overset{\lrcorner}{\nu}_{m,n-q}$.

La démonstration est basée sur des arguments géométriques élémentaires.

Nous pouvons donner maintenant le critère de régularité pour X.

THEOREME II.1.9 : X est régulier si, et seulement si, il satisfait à la condition (C).

Démonstration : Supposons X régulier et soit (II.1.8) sa représentation canonique. Alors F est absolument continue et a pour densité

(II.1.12) $f(u,v) = \left|\sum_{(p,q)\in S} C_{p,q}\exp[-2i\pi(pu+qv)]\right|^2$

où les coefficients $C_{p,q}$ satisfont à (II.1.3). Par conséquent, d'après le théorème II.1.2, log f est intégrable. Donc X satisfait à la condition (C). Inversement, supposons que X satisfasse à (C). Soit (II.1.2) une représentation de f conformément au théorème (II.1.2). Une application élémentaire du théorème de Karhunen [6] montre qu'il existe un bruit blanc ν tel que $X_{m,n}$ admet la représentation

(II.1.13) $X_{m,n}=\sum_{(p,q)\in S} a_{p,q}\nu_{m-p,n-q}$.

Par conséquent, $H'_{m,n}\subset H'_{m,n}(\nu)$ et a fortiori $H^1_m\subset H^1_m(\nu)$.

Ceci entraîne que $\bigcap_m H^1_m = \bigcap_m H^1_m(\nu) = \{o\}$. Considérons maintenant l'innovation horizontale Y^m à l'abcisse m. D'après l'hypothèse et la proposition II.1.8 (i), la fonction de répartition spectrale de Y^m est absolument continue et le logarithme de sa densité intégrable. Ceci implique que $\bigcap_{q=o}^{\infty} H^{\urcorner}_{m-1,n-q} = H^1_{m-1}$, pour tout m. Puisque X est non-déterministe, il admet la représentation (II.1.7). Pour démontrer la régularité de X, il suffit alors de démontrer que $V_{m,n} = 0$. On déduit de (II.1.7) que $V_{m,n} \in H^{\urcorner}_{m-1,n-q}$, $\forall\ q \geqslant 0$. Donc $V_{m,n} \in \bigcap_{q=o}^{\infty} H^{\urcorner}_{m-1,n-q} = H^1_{m-1}$. On montre de même que $V_{m,n} \in H^1_{m-p}$, $\forall\ p \geqslant 0$, c-à-d, que $V_{m,n} \in \bigcap_{p=o}^{\infty} H^1_{m-p} = \{o\}$. Par conséquent, $V_{m,n} = 0$. ∎

DEFINITION II.1.10 : <u>Supposons</u> X <u>régulier et soit</u> (II.1.2) <u>une factorisation de</u> f <u>avec les conditions</u> (II.1.3). <u>Alors il existe un bruit blanc</u> ν <u>tel que</u> X <u>admet la représentation</u> (II.1.13). <u>La factorisation donnée est dite canonique si</u> $C_{o,o}\, \nu^{\urcorner}_{m,n} = a_{o,o}\, \nu_{m,n}$.

PROPOSITION II.1.11 : <u>Si</u> X <u>est régulier et si</u> (II.1.2), <u>avec les conditions</u> (II.1.3), <u>est une factorisation de</u> f. <u>Alors cette factorisation est canonique si et seulement si</u>

(II.1.14) $\quad |a_{o,o}|^2 = \exp \int_D \log f(u,v)dudv.$

Démonstration : La nécessité de la condition est évidente. Inversement, si la factorisation donnée satisfait à (II.1.14), soit ν un bruit blanc tel que X admette la représentation (II.1.13). Alors on a

$$|a_{o,o}|^2 = \|X_{m,n} - (X_{m,n}/H^{\urcorner}_{m-1,n-1}(\nu))\|^2 = \|X_{m,n} - (X_{m,n}/H^{\urcorner}_{m-1,n-1})\|^2$$

Comme $H^{\urcorner}_{m-1,n-1} \subset H^{\urcorner}_{m-1,n-1}(\nu)$, on a bien $C_{o,o}\nu^{\urcorner}_{m,n} = a_{o,o}\nu_{m,n}$. ∎

Nous avons vu l'importance du rôle joué par l'innovation horizontale Y^m dans l'analyse structurelle de X. Il serait bon d'obtenir sa densité spectrale à partir de celle de X.

PROPOSITION II.1.12 : <u>On suppose</u> X <u>régulier</u>. <u>La densité spectrale du processus</u> Y <u>en tant que processus à deux indices est donnée par</u>

(II.1.15) $\quad f_Y(u,v) = g(v)$

<u>où</u> g <u>est la densité spectrale de</u> Y^m <u>pour tout</u> m <u>et est donnée par</u>

(II.1.16) $\quad g(v) = \exp \int_I \log f(u,v)du.$

Démonstration : La relation d'orthogonalité $Y_{m,n} \perp Y_{p,q}$ pour $m \neq p$ implique que f_Y est de la forme (II.1.15) où g est la densité spectrale de $Y^o = \{Y_{o,n},\ n \in \mathbb{Z}\}$, ($Y^m$ et Y^o ont la même densité spectrale). Soit (II.1.8) la représentation canonique de X. Alors, d'après (II.1.11) la densité spectrale de Y^o est

(II.1.17) $\quad g(v) = |\sum_{q=o}^{\infty} C_{o,q} \exp(-2i\pi qv)|^2.$

Posons

(II.1.18)
$$C_o(v) = \sum_{q=o}^{\infty} C_{o,q} \exp(-2i\pi qv)$$
$$C_p(v) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{p,q} \exp(-2i\pi qv) \quad , \text{ pour } p > 0$$

Les séries convergent dans L^2 et de plus, on a

(II.1.19) $\quad \sum_{p=o}^{\infty} |C_p(v)|^2 < \infty$ pour presque tout v.

Soit $A \subset I$ l'ensemble de mesure 1 sur lequel cette dernière série converge.
Fixons $v \in A$ et posons

(II.1.20) $\quad G(z,v) = \sum_{p=o}^{\infty} C_p(v)z^p \quad$, pour $|z| < 1$.

G (.,v) est analytique sur le disque unité ouvert U de $\mathbb{C}$ et est de classe H^2 (cf.[8]). Alors il existe un ensemble B_v de mesure 1, tel que

(II.1.21) $\quad \forall\ u \in B_v,\ \lim_{r\uparrow 1} G(re^{-2i\pi u},v) = G^\star(u,v) = \sum_{p=o}^{\infty} C_p(v)e^{-2i\pi pu}.$

Donc $f(u,v) = |G^\star(u,v)|^2$, pour presque tout $u \in B_v$.
Il existe alors une fonction M(z,v), analytique sur U, telle que $|M(z,v)| \leqslant 1$ sur U et que

(II.1.22)
$$G(z,v) = M(z,v)\exp[\ \frac{1}{2}\int_I \frac{e^{-2i\pi u}+z}{e^{-2i\pi u}-z} \log f(u,v)du]$$

(cf.[8]). Or $|G(o,v)|^2 = g(v)$ pour presque tout $v \in A$. Ceci implique que

(II.1.23) $\quad g(v) \leqslant \exp \int_I \log f(u,v)du$, presque partout.

Mais comme, d'après (II.1.5) et (II.1.10), on a

(II.1.24) $\quad \exp \int_I \log g(v)dv = \exp \int_D \log f(u,v)dudv,$

dans la relation (II.1.23), seule l'égalité est valable. ∎

Le théorème suivant suggère une méthode de factorisation canonique que nous illustrons au paragraphe II.2 dans un cas particulier.

THEOREME II.1.13 : <u>On suppose</u> X <u>régulier</u>. <u>Soit</u>

(II.1.25) $\quad f(u,v) = |\sum_{(p,q)\in S} C_{p,q} \exp[-2i\pi(pu + qv)]|^2$

<u>une factorisation canonique de</u> f. <u>(On peut toujours</u> prendre $C_{o,o} > o$).

<u>Posons</u>

(II.1.26) $\quad \gamma(w) = \sum_{q=o}^{\infty} C_{o,q}\, w^q \quad , \ |w| < 1.$

<u>On a</u>

(II.1.27)
$$\gamma(w) = \exp[\ \frac{1}{2}\int_D \frac{e^{-2i\pi v}+w}{e^{-2i\pi v}-w} \log f(u,v)dudv]$$

<u>et</u> γ <u>est analytique et n'a pas de zéros pour</u> $|w| < 1$.

<u>Soit la fonction</u> $\gamma^\star$ <u>définie pour presque tout</u> $v \in I$ par

(II.1.28) $\quad \gamma^\star(v) = \sum_{q=o}^{\infty} C_{o,q} \exp(-2i\pi qv) = \lim_{r\uparrow 1} \gamma(r\, e^{-2i\pi v}).$

<u>Alors on a la factorisation canonique suivante de la densité spectrale</u> g <u>de</u> Y^o :

(II.1.29) $g(v) = |\gamma^\star(v)|^2$.

Soit

(II.1.30)

$$G(z,v)= \sum_{q=o}^{\infty} c_{o,q} e^{-2i\pi qv} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} c_{p,q} e^{-2i\pi qv}\right) z^p, \quad |z|<1$$

Pour presque tout v, on a

(II.1.31) $$G(z,v) = \gamma^\star(v) \exp \int_I \frac{z}{e^{-2i\pi u}-z} \log f(u,v)du$$

et $G(.,v)$ est analytique et n'a pas de zéros pour $|z|< 1$, il existe un ensemble B_v de mesure 1 tel que, pour tout $u \in B_v$,

(II.1.32)

$$G^\star(u,v)=\sum_{(p,q)\in S} c_{p,q} \exp[-2i\pi(pu+qv)] = \lim_{r\uparrow 1} G(r\, e^{-2i\pi u},v),$$

(II.1.33) $f(u,v) = |G^\star(u,v)|^2$.

Démonstration : Notons d'abord que, l'expression (II.1.30) de la fonction G n'est autre que la forme ouverte de l'expression (II.1.20), et par conséquent, G satisfait à (II.1.22). L'égalité (II.1.23) (qui est la seule valable) implique que $|M(o,v)| = 1$. Donc, d'après le principe du maximum de module, $M(z,v)$ est un nombre complexe, de module 1, ne dépendant pas de z. D'où, pour presque tout v,

(II.1.34)

$$G(z,v) = M(v)\exp\left[\frac{1}{2}\int_I \frac{e^{-2i\pi u}+z}{e^{-2i\pi u}-z} \log f(u,v)du\right], \quad |z|< 1$$

avec $|M(v)| = 1$. Ceci prouve ainsi que $G(.,v) \neq 0$, pour presque tout v. La représentation (II.1.11) est canonique au sens 1 indice, (cf.[1],[4]). Compte tenu de (II.1.16), on voit que la fonction $\gamma(w)$ définie par (II.1.27) permet de factoriser la densité spectrale g de Y^o. D'autre part, d'après (II.1.34), on a, pour presque tout v,

(II.1.35) $$\gamma^\star(v) = G(o,v)=M(v) \exp\left[\frac{1}{2}\int_I \log f(u,v)du\right].$$

En éliminant $M(v)$ entre (II.1.34) et (II.1.35) on obtient (II.1.31). ∎

REMARQUE : Pour X régulier, soit $X_m^N = (X_{m,N},\dots,X_{m,-N})$ la v.a. de dimension 2N + 1 et considérons le processus stationnaire $X^N = \{X_m^N,\ m \in \mathbb{Z}\}$ et soit $Y^N=\{Y_m^N,\ m\in\mathbb{Z}\}$ son processus d'innovation, (cf.[10]). Pour $-N \leqslant n \leqslant N$, la $n^{\text{ième}}$ coordonnée de Y_m^N converge en m.q vers $Y_{m,n}$ lorsque $N \to \infty$. Ce fait permet d'obtenir la factorisation canonique de f sans aucune restriction sur f. Nous considérerons dans un travail ultérieur, cette approche pour la factorisation canonique.

II.2 UN ALGORITHME DE FACTORISATION CANONIQUE

Etant donné une densité spectrale f telle que logf est intégrable, les formules (II.1.27) et (II.1.31) permettent de calculer les fonctions γ et G. Mais nous ne pouvons rien dire en ce qui concerne la validité des formules (II.1.32) et (II.1.33) pour presque tout $(u,v) \in D$. Pour y parvenir nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur la fonction f. Voici un cas déjà considéré dans [2].

THEOREME II.2.1 : Soit f une densité spectrale continue et positive et soit

(II.2.1) $$b_{p,q} = \int_D \log f(u,v) \exp[2i\pi(pu+qv)]dudv.$$

On suppose

(II.2.2) $$\sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} |b_{p,q}| < \infty.$$

Soit

(II.2.3)

$$G^\star(u,v)=\exp\left[\frac{1}{2} b_{o,o}+\sum_{q=1}^{\infty} b_{o,q} e^{-2i\pi qv}+\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} b_{p,q} e^{-2i\pi(pu+qv)}\right]$$

Alors $G^\star$ est continue et possède une série de Fourier.

(II.2.4) $$G^\star(u,v) = \sum_{(p,q)\in S} c_{p,q} \exp[-2i\pi(pu+qv)]$$

qui converge dans L^2 ; on a

(II.2.5) $$f(u,v) = \left|\sum_{(p,q)\in S} c_{p,q} \exp[-2i\pi(pu+qv)]\right|^2$$

et cette factorisation est canonique.

Démonstration : La condition (II.2.2) implique que la série de Fourier de log f converge uniformément vers log f. Posons, pour $p \geqslant 0$,

(II.2.6) $$b_p(v) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} b_{p,q}\, e^{-2i\pi qv} = \int_I \log f(u,v)e^{2i\pi pu}du$$

(où la série converge uniformément) et soit

(II.2.7) $$H(z,v) = \frac{1}{2} b_o(v) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p(v)z^p.$$

Alors pour tout $v \in I$, $H(.,v)$ est analytique sur U et H est continue sur $\bar{U}\times I$. (U (resp. $\bar{U}$) est le disque unité ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{C}$).

D'autre part, pour $z \in U$

(II.2.8) $$H(z,v) = \frac{1}{2}\int_I \frac{e^{-2i\pi u}+z}{e^{-2i\pi u}-z} \log f(u,v)du.$$

Soit

(II.2.9) $\Gamma(z,v) = \exp H(z,v)$.

Alors on a

(II.2.10) $$\Gamma(z,v) = \sum_{p=o}^{\infty} a_p(v)z^p.$$

Les fonctions a_p étant continues on peut poser

$$a_p(v) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_{p,q}\, e^{-2i\pi qv}$$

où la série converge dans L^2. Par conséquent, on peut écrire

(II.2.11) $$\Gamma(z,v) = \sum_{p=o}^{\infty}\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} a_{p,q}\, e^{-2i\pi qv}\right) z^p$$

avec $\Sigma\,\Sigma|a_{p,q}|^2 < \infty$. Il est évident que, pour tout (u,v), on a

$$\text{(II.2.12)} \quad \lim_{r\uparrow 1} \Gamma(r\, e^{-2i\pi u}, v) = \exp H(u,v)$$

$$\text{(II.2.13)} \quad f(u,v) = |\Gamma(e^{-2i\pi u}, v)|^2$$

Formons maintenant la fonction

$$\text{(II.2.14)} \quad h_o(w) = \frac{1}{2}\, b_{o,o} + \sum_{q=1}^{\infty} b_{o,q}\, w^q$$

Alors h_o est analytique sur U et pour $w \in U$, on a

$$\text{(II.2.15)} \quad h_o(w) = \frac{1}{2} \int_D \frac{e^{-2i\pi v} + w}{e^{-2i\pi v} - w} \log f(u,v)\,du\,dv$$

Soit

$$\text{(II.2.16)} \quad \gamma(w) = \exp h_o(w).$$

$\gamma(w)$ peut se mettre sous la forme :

$$\text{(II.2.17)} \quad \gamma(w) = \sum_{q=o}^{\infty} c_{o,q}\, w^q$$

où $\sum_q |c_{o,q}|^2 < \infty$ et

$$\text{(II.2.18)} \quad c_{o,o} = \exp \frac{1}{2} \int_D \log f(u,v)\,du\,dv.$$

D'autre part, on a

$$\text{(II.2.19)} \quad \gamma^\star(v) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{r\uparrow 1} \gamma(r\, e^{-2i\pi v}) = \exp h_o(e^{-2i\pi v}),$$

$$\text{(II.2.20)} \quad |\gamma^\star(v)| = \exp \frac{1}{2} \int_I \log f(u,v)\,du = \exp \frac{1}{2}\, b_o(v)$$

Nous posons finalement

$$\text{(II.2.21)} \quad G(z,v) = \gamma^\star(v)\, |\gamma^\star(v)|^{-1}\, \Gamma(z,v).$$

Alors $G(.,v)$ est analytique sur U pour tout $v \in I$ et G est continue sur $\bar{U} \times I$. En posant $G^\star(u,v) = G(e^{-2i\pi u}, v)$, on voit que $G^\star$ est bien donné par (II.2.3) et que $|G^\star|^2 = f$ pour tout (u,v).

Il est facile de voir que $G^\star$ possède une série de Fourier du type (II.2.4). La canonicité de la factorisation (II.2.5) est alors due à (II.2.18). ∎

III. PROCESSUS POSSEDANT LA PROPRIETE F.4.

La notion de processus possédant la propriété F.4 a été introduite dans [7]. Nous considérons ici la factorisation canonique pour les processus ayant cette propriété.

DEFINITION III.1 : On dit que le processus X, centré et stationnaire au sens large, possède la propriété F.4, si pour tout (m,n),

$$H_m^1 \ominus H_{m,n} \perp H_n^2 \ominus H_{m,n}$$

PROPOSITION III.2 : Si X possède la propriété F.4, alors on a

(III.1)

$$(X_{m,n}/H^{\llcorner}_{m-1,n-1}) = (X_{m,n}/H^{\urcorner}_{m-1,n-1}) = (X_{m,n}/H^{\lrcorner}_{m-1,n-1})$$
$$= (X_{m,n}/H^{\star}_{m-1,n-1})$$
$$= (X_{m,n}/H^1_{m-1}) + (X_{m,n}/H^2_{n-1}) - (X_{m,n}/H_{m-1,n-1})$$
$$= (X_{m,n}/H_{m-1,n}) + (X_{m,n}/H_{m,n-1}) - (X_{m,n}/H_{m-1,n-1}).$$

La démonstration est basée sur des arguments géométriques élémentaires.

Soit X un processus possédant la propriété F.4 et soit $\hat{X}_{m,n}$ la projection de $X_{m,n}$ définie par les égalités (III.1). Alors, conformément à la définition II.1.4, X est déterministe ou non-déterministe selon que $X_{m,n} = \hat{X}_{m,n}$ ou $X_{m,n} \neq \hat{X}_{m,n}$. Lorsque X est non-déterministe, on a, d'après (II.1.5)

$$\text{(III.2)} \quad c_{o,o} = \|X_{m,n} - \hat{X}_{m,n}\| = \exp \frac{1}{2} \int_D \log f(u,v)\,du\,dv > 0$$

et on pose

$$\text{(III.3)} \quad \nu^\star_{m,n} = c_{o,o}^{-1}(X_{m,n} - \hat{X}_{m,n}).$$

$\nu^\star$ est un bruit blanc et X admet la représentation :

$$\text{(III.4)} \quad X_{m,n} = \sum_{(p,q)\geq(o,o)} c_{p,q}\, \nu^\star_{m-p,n-q} + V_{m,n}$$

où V est un processus orthogonal à $\nu^\star$.

On dit encore que X, possédant la propriété F.4 est régulier si

$$\text{(III.5)} \quad X_{m,n} = \sum_{(p,q)\geq(o,o)} c_{p,q}\, \nu^\star_{m-p,n-q}.$$

On peut démontrer que X, avec F.4, est régulier si et seulement si, il existe un bruit blanc $\nu^\star$ tel que $H_{m,n} = H_{m,n}(\nu^\star)$ pour tout (m,n), auquel cas $\nu^\star$ est le processus d'innovation de X. La représentation (III.5) s'appelle une représentation canonique.

PROPOSITION III.3 : Pour un processus X, ayant la propriété F.4, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X est régulier

(ii) X satisfait à la condition (C)

(iii) $\bigcap_m H_m^1 = \bigcap_n H_n^2 = \{o\}$

Démonstration : L'équivalence de (i) et (ii) est donnée par le théorème II.1.9. Le fait que (i) implique (iii) est la conséquence des égalités $H_m^1 = H_m^1(\nu^\star)$ et $H_n^2 = H_n^2(\nu^\star)$. Supposons que (iii) soit vraie. Alors sous l'hypothèse F.4, on a $\bigcap_n H^\star_{m,n} = H_m^1$, donc $\bigcap_n H^{\llcorner}_{m,n} = H_m^1$ et $\bigcap_m \bigcap_n H^\star_{m,n} = \{o\}$. Puisque $X_{m,n} \neq o$ (c'est l'hypothèse implicite !) on déduit de ces égalités d'espaces que $X_{m,n} \neq \hat{X}_{m,n}$. Alors en utilisant l'argument de la démonstration du théorème II.1.9, on montre que $V_{m,n} = 0$ dans (III.4). D'où la régularité de X. ∎

PROPOSITION III.4 : Pour un processus X satisfaisant la condition (C), les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X possède la propriété F.4

(ii) $(X_{m,n}/H^{\lrcorner}_{m-1,n-1}) = (X_{m,n}/H^{\urcorner}_{m-1,n-1})$

(iii) $(X_{m,n}/H^{\lrcorner}_{m-1,n-1})$ $(\text{resp}(X_{m,n}/H^{\urcorner}_{m-1,n-1}),$
$(X_{m,n}/H^{\star}_{m-1,n-1})) = (X_{m,n}/H^{\ulcorner}_{m-1,n-1})$.

Démonstration : Supposons que (ii) soit vraie et soit $\nu^{\urcorner}$ le processus d'innovation normalisée correspondant aux passés $H^{\urcorner}$. Alors on a $\nu^{\lrcorner} = \nu^{\urcorner}$. Désignons ces deux processus d'innovation par $\nu^{\star}$. Il est immédiat que $X_{m,n}$ admet la représentation canonique (III.5). Donc X possède la propriété F.4. Supposons que l'on ait $(X_{m,n}/H^{\lrcorner}_{m-1,n-1}) = (X_{m,n}/H^{\ulcorner}_{m-1,n-1})$. Alors on a $H^{\lrcorner}_{m-1,n} \ominus H^{1}_{m-1} = H_{m,n} \ominus H_{m-1,n}$. Par itération, ceci implique que $H^{2}_{n} \ominus H_{m,n} \perp H^{1}_{m}$. D'où F.4. L'implication de la propriété F.4 par les autres égalités de (iii) est démontrée de la même manière. Les implications inverses sont contenues dans la proposition III.2. ∎

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante sur la densité spectrale d'un processus pour qu'il possède la propriété F.4.

THEOREME III.5 : Soit X un processus satisfaisant la propriété (C) et soit la série de Fourier formelle

$$\text{(III.6)} \quad \log f(u,v) = \sum_{(p,q)\in \mathbb{Z}^2} b_{p,q} \exp[-2i\pi(pu+qv)] .$$

Alors X possède la propriété F.4 si et seulement si, les coefficients $b_{p,q}$ sont nuls pour $p.q < 0$.

Démonstration : Supposons que, X satisfaisant à la condition (C), possède la propriété F.4. Il admet alors la représentation canonique (III.5). Formons la fonction

$$\text{(III.7)} \quad G(z,w) = \sum_{(p,q)>(o,o)} C_{p,q}\, z^p w^q \quad , \quad (z,w) \in U^2$$

où $U^2 = U\times U$ est le bidisque unité ouvert de $\mathbb{C}^2$. La fonction G est analytique, de classe H^2 sur U^2 et n'y a pas de zéros, (cf.[7]). Elle admet une limite radiale

$$\text{(III.8)} \quad G^{\star}(u,v) = \lim_{r\uparrow 1} G(r\, e^{-2i\pi u}, r\, e^{-2i\pi v}) \qquad \text{p.p.}$$

De plus,

$$\text{(III.9)} \quad G^{\star}(u,v) = \sum_{(p,q)>(o,o)} C_{p,q} \exp[-2i\pi(pu+qv)] \quad \text{p.p.}$$

où la série converge dans L^2 et

$$\text{(III.10)} \quad f(u,v) = |G^{\star}(u,v)|^2 \qquad \text{p.p}$$

Comme $\log G(z,w)$ aussi est analytique sur U^2, $\log|G(z,w)|$ y est 2-harmonique, (cf.[9]).

Pour toute fonction intégrable h sur D, on pose

$$P[h](r\, e^{2i\pi u}, \rho\, e^{2i\pi v}) = \int_D \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-u)+r^2} \cdot \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\varphi-v)+\rho^2}\, h(\theta,\varphi)\, d\theta\, d\varphi$$

Alors on a $\log|G(z,w)| \leqslant P[\log G^{\star}](z,w)$. Donc $P[\log G^{\star}](z,w) - \log|G(z,w)|$ est une fonction 2-harmonique positive sur U^2.

Comme $\log C_{o,o} = \log|G(o,o)| = P[\log G^{\star}](o,o)$, on a $\log|G(z,w)| = P[\log G^{\star}](z,w)$.

D'où $\log|G(z,w)|^2 = P[\log f](z,w)$. Par ailleurs, $\log|G(z,w)|^2 = 2\text{Re}[\log G(z,w)]$.

Donc, $P[\log f](z,w) = 2\text{Re}\log G(z,w)$. Comme $\log G(z,w)$ est analytique, d'après [9], th.2.4.1, les coefficients $b_{p,q}$ sont nuls pour $p.q < 0$.

Inversement, supposons que les $b_{p,q}$ soient nuls pour $p.q < 0$. D'après le théorème cité ci-dessus, il existe une fonction analytique h sur U^2 telle que $P[\log f](z,w) = 2\text{Re}(h)$. Posons $G(z,w) = \exp h(z,w)$. Alors G est analytique sur U^2. De plus $\log|G(z,w)|^2 = P[\log f](z,w)$. Donc $|G(z,w)|^2 = \exp(P[\log f](z,w))$ et on a, d'après l'inégalité de Jensen (cf.[8]) : $\exp(P[\log f](z,w)) \leqslant P[f](z,w)$. D'où

$$\int_D |G(r\, e^{-2i\pi u}, r\, e^{-2i\pi v})|^2 du\, dv \leqslant \int_D f(u,v)\, du\, dv.$$

Par conséquent, G est de classe H^2, sa limite radiale soit $G^{\star}$ comme dans (III.8 et 9) existe presque partout et satisfait à (III.10).

Comme on a $C_{o,o} = |G(o,o)| = \exp \frac{1}{2}\int_D \log f(u,v)\, du\, dv$, la factorisation obtenue est canonique simultanément au sens des prévisions selon les passés $H^{\lrcorner}$ et $H^{\urcorner}$. Il est immédiat d'en déduire que l'égalité (ii) de la proposition III.4 est satisfaite. Donc X possède la propriété F.4. ∎

La méthode de factorisation canonique de la densité spectrale d'un processus possédant la propriété F.4 est similaire à celle du cas à 1 indice, (cf.[1],[4]). Le théorème suivant dont la démonstration peut être tirée de celle du théorème précédent donne l'algorithme de factorisation.

THEOREME III.6 : Soit X un processus satisfaisant à la condition (C) et soit (III.6) la série de Fourier formelle de log f. On suppose que les coefficients $b_{p,q}$ sont tous nuls pour $p.q < 0$, i.e. X possède la propriété F.4. Soit

$$h(z,w) = \frac{1}{2} b_{o,o} + \sum_{(p,q)\in \mathbb{N}^2-(o,o)} b_{p,q}\, z^p w^q \ , \quad (z,w) \in U^2$$

et soit

$$G(z,w) = \exp h(z,w) = \sum_{(p,q)>(o,o)} C_{p,q}\, z^p w^q$$

On a $\Sigma|C_{p,q}|^2 < \infty$. Soit

$$G^\star(u,v) = \lim_{r\uparrow 1} G(r\, e^{-2i\pi u}, r\, e^{-2i\pi v})$$

$$= \sum_{(p,q)\succ(o,o)} C_{p,q} \exp[-2i\pi(pu + qv)]$$

où la limite existe p.p et la série converge dans L^2. Alors, on a $f(u,v) = |G^\star(u,v)|^2$ et cette factorisation est canonique.

IV. FILTRAGE LINEAIRE DES PROCESSUS STATIONNAIRES.

Nous considérons ici deux processus X et Y stationnaires, centrés et stationnairement corrélés. Nous supposons que les fonctions de répartition spectrale de X et de Y sont absolument continues, de densités respectives f_X et f_Y et que log f_Y est intégrable. Nous désignons par f_{XY} la densité spectrale mutuelle de (X,Y). f_Y admet la factorisation canonique $f_Y(u,v) = |G^\star(u,v)|^2$p.p où

$$G^\star(u,v) = \sum_{(p,q)\in S} C_{p,q} \exp[-2i\pi(pu + qv)]$$

Le processus Y représente en général un processus d'observation à la sortie d'un canal et, sauf cas pathologique, il ne possède pas la propriété F.4. Comme dans le cas à un indice, en utilisant la factorisation ci-dessus de f_Y, on peut facilement évaluer le filtre Φ qui permet de représenter

$$(X_{k,n}/H^1_m(Y)) = \int_D e^{2i\pi(ku+nv)}\, \Phi(u,v)\, dZ_Y(u,v).$$

Pour simplifier l'écriture, nous prenons k = m et posons $\hat{X}_{m,n} = (X_{m,n}/H^1_m)$. Nous représentons par ν le processus d'innovation ν de Y correspondant aux passés H^1. Comme on a $H^1_m(\nu) = H^1_m(Y)$, on peut écrire

$$\hat{X}_{m,n} = \int_D e^{2i\pi(mu+nv)}\, \psi(u,v)\, dZ\nu(u,v)$$

où ψ possède une série de Fourier du type :

$$\psi(u,v) = \sum_{(p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}} a_{p,q} \exp[-2i\pi(pu + qv)]$$

(la série converge dans L^2).

Notons que $f_{X\nu}(u,v) = [G^\star(u,v)]^{-1} f_{XY}(u,v)$. On a

$$X_{m,n} - \hat{X}_{m,n} \perp \nu_{m-p,n-q} \qquad \forall\ (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$$

Ceci donne

$$\text{(IV.1)} \qquad \int_D e^{2i\pi(pu+qv)} [f_{X\nu}(u,v) - \psi(u,v)]\, du\, dv = 0$$

pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$.

Soit

$$f_{X\nu}(u,v) = \sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} b_{p,q} \exp[-2i\pi(pu + qv)]$$

où la série converge dans L^2. Alors la condition (IV.1) est satisfaite si et seulement si

$$\psi(u,v) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} b_{p,q} \exp[-2i\pi(pu + qv)]$$

Finalement, on obtient le filtre Φ par la formule

$$\Phi(u,v) = \psi(u,v)[G^\star(u,v)]^{-1} \quad ,$$

formule similaire à celle du cas à 1 indice.

REFERENCES

[1] J.L. DOOB : Stochastic Processes, John Wiley, 1953.

[2] M.P. EKSTROM, J.W. WOODS : "Two-dimensional spectral factorization with applications in recursive digital filtering", IEEE Trans. Vol. ASSP-24, N° 2, pp. 115-128, 1976.

[3] M.P. EKSTROM, R.E. TWOGOOD, J.W. WOODS : "Two-dimensional recursive filter design, a spectral factorization approch", IEEE Trans. Vol.ASSP-28, N° 1, pp. 16-26, 1980.

[4] U.GRENANDER, M. ROSENBLATT : Statistical Analysis of Stationary Time Series, John Wiley, 1957.

[5] H. HELSON, D. LOWDENSLAGER : "Prediction theory and Fourier series in several variables", Acta Math., Vol. 99, pp. 165-208, 1959.

[6] K. KARHUNEN : "Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Serie A, N° 37, 1947.

[7] H. KOREZLIOGLU : "On 2-D innovation processes", dans Signal Processing : Theories and Appl. Ed. M. Kunt and F. de Coulon, North-Holland Publ. Co. Eurasip 1980.

[8] W. RUDIN : Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill, 1970.

[9] W. RUDIN : Function Theory on Polydiscs, W.A. Benjamin, Inc. 1969.

[10] N. WIENER, P. MASANI : "The prediction theory of multivariate stochastic processes", Acta Math., Vol. 98, pp. 111-150, 1957, Vol.99,pp.93-137,1958.