HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU
SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981

PROCESSUS PONCTUELS DES PASSAGES PAR UN NIVEAU ET DES MAXIMA D'UNE FONCTION ALEATOIRE "SIGNAL PLUS BRUIT"

J.L. BESSON

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES, UNIVERSITE LYON 1, 43 bd. du 11 Novembre 1918, 69622 VILLEURBANNE CEDEX

RESUME

Dans cet exposé, on étudie le processus ponctuel formé par les points de passage par un niveau d'une fonction aléatoire X(t), puis celui formé par les maxima locaux de celle-ci.

La fonction aléatoire X(t) est une somme de deux fonctions aléatoires indépendantes : X(t) = S(t) + B(t) où B(t) est gaussienne stationnaire.

L'accent est mis sur la détermination, puis l'utilisation des mesures de Palm de ces processus ponctuels.

SUMMARY

We study in this paper the point process generated by the level crossings of the sample paths of a random function X(t) and then the point process generated by their local maxima. X(t) is defined as the sum of two independant random functions : X(t) = S(t) + B(t) in which B(t) is required to be stationary and gaussian.

The emphasis is on the determination and then the use of the Palm measures of this point processes.

PROCESSUS PONCTUELS DES PASSAGES PAR UN NIVEAU ET DES MAXIMA D'UNE FONCTION ALEATOIRE "SIGNAL PLUS BRUIT"

0 - INTRODUCTION

Etant donnés une fonction aléatoire réelle $\{X_t \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$ (en abrégé f.a.r.), un nombre réel u et une partie B de $\mathbb{R}$, on note $N_u(\omega,B)$ le nombre des points $t \in B$ qui sont tels que $X_t(\omega) = u$ et $M(\omega,B)$ le nombre de maxima relatifs de la trajectoire $X.(\omega)$ qui sont dans B.

Dans le cas où la f.a.r. (X_t) est gaussienne, de nombreux résultats concernant les processus ponctuels N_u et M ont été obtenus et démontrés rigoureusement, une grande partie de ceux-ci est rassemblée dans [1].

Par contre, dans le cas d'une f.a.r. de loi temporelle quelconque, les résultats obtenus d'une façon mathématiquement indiscutable sont beaucoup moins complets et le sont souvent au prix d'hypothèses artificielles qui ne sont pas, en général, susceptibles d'interprétations physiques claires. Ainsi, par exemple, le simple calcul de l'espérance mathématique de $N_u([0,1])$ exige déjà de gros efforts. (cf. par exemple [2], [3], [4]).

Dans cet exposé, on s'intéresse au cas où la fonction aléatoire (X_t) est, en loi, du type $X_t = S_t + B_t$, somme de deux f.a.r. indépendantes dont la deuxième, B_t est gaussienne stationnaire et modélise un bruit additif gaussien parasite du signal aléatoire S_t.

Pour un tel modèle, on parvient à résoudre de façon mathématiquement rigoureuse un grand nombre des problèmes résolus dans le cas où (X_t) est gaussien (i.e. $S_t \equiv 0$). On remarquera que les hypothèses que l'on est amené à faire sont susceptibles d'interprétations physiques. On peut noter également que l'on obtient une généralisation partielle de certains résultats connus dans le cas où $S_t = S\cos(\omega t + \Theta)$ (cf. [1], [5]).

Ce travail est dans le prolongement de [6] et [7], l'accent est mis sur la notion de mesure de Palm qui permet de présenter certains résultats d'une manière mathématiquement plus claire.

On note enfin que, en faisant tendre le bruit B_t vers 0 on obtient pour S_t des résultats nouveaux.

I - LE PROCESSUS PONCTUEL DES PASSAGES PAR UN NIVEAU.

1. PRELIMINAIRES.

On note Ω l'ensemble des fonctions $\omega : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ qui sont continues, on le munit de la topologie de la convergence compacte et on note $\mathscr{F}$ sa tribu borélienne. On désigne par X_t la v.a.r. définie sur Ω par $X_t(\omega) = \omega(t)$ et plus généralement, pour $(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n$ par $\pi_{(t_1,\dots,t_n)}$ le vecteur aléatoire $\omega \rightsquigarrow (\omega(t_1),\dots,\omega(t_n))$. On rappelle que la tribu $\mathscr{F}$ est engendrée par l'algèbre $\mathscr{A}$ des ensembles F de la forme $F = \{\omega \in \Omega \; ; \; \pi_{(t_1,\dots,t_n)}(\omega) \in A\}$ où $A \in \mathscr{B}^n$ tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$.

HYPOTHESES (H1).

On note P la probabilité définie sur $(\Omega,\mathscr{F})$ par $P = P_s * P_b$ où P_s et P_b sont deux probabilités sur $\mathscr{F}$ qui vérifient :

a) sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{F},P_s)$ les v.a.r. X_t sont intégrables et la f.a.r (X_t) est dérivable en moyenne d'ordre 1, de plus la fonction $t \rightsquigarrow E_s(|\dot{X}^s_t|)$ est localement bornée sur $\mathbb{R}$.

b) la probabilité P_b est de Laplace-Gauss centrée de covariance $E_b(X_s.X_t) = r(t-s)$ avec r de classe C^2, on pose $\Lambda_o = r(0)$, $\Lambda_2 = -r''(0)$, on suppose que la mesure spectrale σ_b n'est pas purement discrète.

REMARQUES 1.

1) Sous les hypothèses (H1), la f.a.r. (X_t) est dérivable en moyenne d'ordre 1 sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{F},P)$, on notera désormais $(\dot{X}_t)$ la f.a.r. dérivée en moyenne d'ordre 1 sur cet espace.

2) Du fait que la mesure σ_b n'est pas purement discrète, on en déduit (cf. [1] p. 203) que pour tout n-uple $(t_1,\dots,t_n)$ de réels distincts, la probabilité $(X_{t_1},\dots,X_{t_n},\dot{X}_{t_1},\dots,\dot{X}_{t_n})(P)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Un exemple typique de signal.

Soient $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable à dérivée bornée et T-périodique, $\{\phi(t) \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$ une f.a.r. à trajectoires continues et dérivable en moyenne d'ordre 1 et Θ une v.a.r. uniformément répartie sur $[0,T[$, indépendante de $\phi(.)$. Alors le signal $S_t = s(t + \phi(t) + \Theta)$ conduit à une probabilité P_s qui satisfait l'hypothèse (H1)(a).

Quelques définitions et notations. (ce sont celles données dans [1]).

Etant donnés $u \in \mathbb{R}$ et $I = [a,b]$, on note $G_u(I)$ l'ensemble des fonctions $\omega \in \Omega$ telles que $\omega(a) \neq u$, $\omega(b) \neq u$ et $\omega^{-1}\{u\} \cap I$ ait un intérieur vide. On a $G_u(I) \in \mathscr{F}$ et du fait des hypothèses (H1) $P(G_u(I)) = 1$.

Etant donnés $u \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathscr{B}$ (borélien de $\mathbb{R}$), on note $N_u(\omega,B)$ le nombre (éventuellement infini) des points $t \in B$ tels que $\omega(t) = u$ (points de passage par le niveau u), par $C_u(\omega,B)$ (crossings) le nombre de ceux de ces points t tels que dans tout voisinage de t, il existe deux points τ et τ' tels que $\tau < t < \tau'$ et $(\omega(\tau) - u)(\omega(\tau') - u) < 0$.

Un point t est un point de franchissement en montant (resp. en descendant) du seuil de niveau u par ω s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\omega(\tau) \leqslant u$ (resp. $\omega(\tau) \geqslant u$) pour $t-\varepsilon \leqslant \tau \leqslant t$ et $\omega(\tau) \geqslant u$ (resp. $\omega(\tau) \leqslant u$) pour $t \leqslant \tau \leqslant t+\varepsilon$. On notera $U_u(\omega,B)$ ou $C_u^+(\omega,B)$ (resp. $D_u(\omega,B)$ ou $C_u^-(\omega,B)$) le nombre de points de franchissement en montant (resp. en descendant) du seuil de niveau u par ω qui sont dans B.

Nous avons montré dans [6] que sous (H1), pour tout intervalle borné I, on a :

$$E(N_u(I)) = E(C_u(I)) < +\infty$$

$$E(C_u(I)) = E(C_u^+(I)) + E(C_u^-(I)).$$

Et on note enfin que pour $B \in \mathscr{B}$, les v.a. $N_u(.,B)$, $C_u(.,B)$, $C_u^+(.,B)$ et $C_u^-(.,B)$ sont $\overline{\mathscr{F}}$-mesurables où $\overline{\mathscr{F}}$ désigne la tribu P-complétée de $\mathscr{F}$.

Rappelons la formule établie dans [6] :

$$E(C_u^{\pm}(B)) = \int_B dt \int_{\mathbb{R}} [\dot{x}]^{\pm} p_t(u,\dot{x})d\dot{x}$$

où $p_t(x,\dot{x})$ est la densité de $(X_t,\dot{X}_t)(P)$.

On a la formule développée :

$$E(C_u^{\pm}(B)) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_o}\right)^{1/2} \int_B dt \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(u-s)^2}{2\Lambda_o}\right) . \left[\exp\left(-\frac{\dot{s}^2}{2\Lambda_o}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{2\Lambda_2}} . \dot{s}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{\dot{s}}{\sqrt{2\Lambda_2}}\right) \pm 1\right)\right] d\mu_t(s,\dot{s})$$

où $\mu_t(ds,d\dot{s})$ est la loi du couple $(S_t,\dot{S}_t)$ i.e. $\mu_t(ds,d\dot{s}) = (X_t,\dot{X}_t^s)(P_s)$ et $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_o^x e^{-t^2}\,dt$.

REMARQUE 2.

Dans le cas où le signal est du type $S_t = S.\cos(\omega t + \Theta)$ avec Θ v.a.r. uniformément répartie sur la période, on retrouve alors le résultat classique de S.O. Rice ([1], [5]) :

$$E(N_o(0,1)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_o}\right)^{1/2} . \left[e^{-aS^2} . I_o(bS^2) + \frac{\omega^2}{2a\Lambda_2}\int_o^{aS^2} e^{-u} . I_o\left(\frac{b}{a}u\right)du\right]$$

avec $a = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\Lambda_o} + \frac{\omega^2}{\Lambda_2}\right)$ et $b = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\Lambda_o} - \frac{\omega^2}{\Lambda_2}\right)$.

2. MESURES DE PALM.

On donne maintenant un lemme technique qui généralise un résultat de [6] et permettra ensuite de déterminer les mesures de Palm des processus ponctuels N_u, C_u, C_u^+ et C_u^-.

LEMME 1.

Soit $M_n = [a_{ij}(n)]$ *(resp.* $M = [a_{ij}]$*) une matrice de covariance non singulière sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$. *On note* g_n *(resp. g) la densité de probabilité de la loi* L.G.$(0,M_n)$ *(resp.* L.G.$(0,M)$*).*

Etant donnés une suite (ε_n) *de nombre réels qui tend vers 0 quand* $n \to +\infty$ *et un borélien* E *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ *tel que* $E \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} ;$ $|x| \leqslant |z|$ *et* $|y_j| \leqslant r\}$, *on pose :*

$$f_n(u,v,w) = \int_E g_n(u+\varepsilon_n x,\ y+v,\ z+w)dxdydz$$

$$f(u,v,w) = \int_E g(u,\ y+v,\ z+w)dxdydz.$$

Alors si pour tout (i,j) : $\lim_{n\to+\infty} a_{ij}(n) = a_{ij}$, *on a le résultat suivant :*

a) *la suite* (f_n) *converge vers* f *uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$;

b) *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *et* $C > 0$ *tels que pour* $n \geqslant N$ *on ait :*

$$f(u,v,w) \leqslant (2r)^p.C.\frac{1}{\sqrt{\det M}}(1 + |w|)$$

PROPOSITION 1.

Etant donnés un borélien A *de* $\mathbb{R}^n$, *un n-uple* $(t_1,\dots,t_n)$ *de réels distincts et un borélien* B *de* $\mathbb{R}$ *on a, en posant* $F(A) = \{\omega\in\Omega\ ;\ (X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_n}(\omega)) \in A\}$:

$$E(C_u^{\pm}(B)1_{F(A)}) = \int_A dx_1\dots dx_n \int_B dt \int_{\mathbb{R}} [\dot{x}]^{\pm} p_{(t,t_1,\dots,t_n)}(u,x_1,\dots,x_n,\dot{x})d\dot{x}$$

où :

$p_{(t,t_1,\dots,t_n)}$ *désigne la densité (naturelle) de* $(X_t,X_{t_1},\dots,X_{t_n},\dot{X}_t)(P)$ *pour* $t \neq t_i$, $i = 1,\dots,n$.

REMARQUE 3.

Dans le cas particulier où le signal est à trajectoires p.s. absolument continues (i.e. P_s est portée par l'ensemble Ω_o des fonctions absolument continues) on peut obtenir la proposition 1 sans utiliser le lemme 1 en utilisant les résultats connus dans le cas gaussien après avoir conditionné par rapport au signal.

Venons-en maintenant à la mesure de Palm. Pour t fixé dans $\mathbb{R}$, on note θ_t l'application de Ω dans Ω définie par $\theta_t(\omega) = \omega(.+t)$. On supposera désormais que la probabilité P_s est conservée par θ_t, i.e. que pour tout $F \in \mathscr{F}$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $P_s(\theta_t^{-1}F) = P_s(F)$. Remarquons que cela revient exactement à dire que la f.a.r. "signal" est strictement stationnaire, et donc la f.a.r. (X_t) est également strictement stationnaire.

Dans ce cas là, les processus $C_u^{\pm}$, N_u et C_u sont stationnaires puisque l'on a :

$$C_u^{\pm}(\theta_t\omega,B) = C_u^{\pm}(\omega,B+t) \text{ et } N_u(\theta_t\omega,B) = N_u(\omega,B+t).$$

La mesure de Palm du processus ponctuel stationnaire C_u^+ est l'unique mesure bornée $\hat{P}_u^+$ sur $(\Omega,\mathscr{F})$ qui vérifie, pour tout $F \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{B}$:

$$\int_F C_u^+(\omega,B)dP(\omega) = \int_B \hat{P}_u^+(\theta_t F)dt \qquad \text{(cf. [8])}$$

on définit de manière analogue les mesures de Palm $\hat{P}_u^-$

de C_u^- et $\hat{P}_u$ de C_u (et de N_u).

Du point de vue de la signification "concrète", la probabilité de Palm $\hat{P}_u^+(.)/\hat{P}_u^+(\Omega)$ (quand elle existe) modélise la notion de probabilité conditionnelle "horizontal window" inventée par M. Kac et D. Slépian ([9]) puisque l'on a :

$$\frac{\hat{P}_u^+(.)}{\hat{P}_u^+(\Omega)} = \lim_{n\to+\infty} P(./C_u^+(I_n) \geqslant 1)$$

au sens de la convergence étroite des probabilités sur l'espace métrisable $(\Omega,\mathscr{F})$, où (I_n) est une suite décroissante d'intervalles de longueurs > 0 telle que $\bigcap_{n\geqslant 1} I_n = \{0\}$. (cf. [8]).

Ainsi, dans le cas où $\hat{P}_u^+(\partial F) = 0$, $\dfrac{\hat{P}_u^+(F)}{\hat{P}^+(\Omega)}$ peut être interprété comme la probabilité de l'événement F sachant (au sens h.w.) qu'il y a à la date 0 un point de franchissement en montant du seuil de niveau u.

Après avoir remarqué que, pour tout n-uple $(t_1,\ldots,t_n)$ de réels distincts non nuls, l'application $t \rightsquigarrow p_{(t,t_1,\ldots,t_n)}(u,x_1,\ldots,x_n,\dot{x})$ est continue au point t = 0, on peut grâce à la proposition 1 démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 2.

Sous les hypothèses (H1) *et si, de plus, le signal est une f.a.r. strictement stationnaire (i.e.* $\forall t \in \mathbb{R}$, $\theta_t(P_s) = P_s$*), la mesure de Palm du processus ponctuel stationnaire* C_u^+ *(resp.* C_u^-*, resp.* C_u*) est l'unique mesure bornée* $\hat{P}_u^+$ *(resp.* $\hat{P}_u^-$*, resp.* $\hat{P}_u$*) sur* $(\Omega,\mathscr{F})$ *telle que pour tout* n*-uple* $(t_1,\ldots,t_n)$ *de réels distincts et non nuls on ait :*

$$\pi_{(t_1,\ldots,t_n)}(\hat{P}_u^{\pm}) = \left[\int_{\mathbb{R}} [\dot{x}]^{\pm} p_{(0,t_1,\ldots,t_n)}(u,x_1,\ldots,x_n,\dot{x})d\dot{x}\right]dx_1\ldots dx_n$$

et $\hat{P}_u = \hat{P}_u^+ + \hat{P}_u^-$.

Une formule plus explicite. (on suppose que $E(C_u^+(0,1)) > 0$).

En posant :

$$\hat{p}_u^+(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{E(C_u^+(0,1))}\int_{\mathbb{R}} [\dot{x}]^+ p_{(0,t_1,\ldots,t_n)}(u,x_1,\ldots,x_n,\dot{x})d\dot{x}$$

on montre aisément que la transformée de Fourier de $\hat{p}_u^+$ est donnée par :

$$\mathscr{F}(\hat{p}_u^+)(u_1,\ldots,u_n) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R(t_j,t_k)u_ju_k\right) \times \frac{1}{2\pi E(C_u^+(0,1))\sqrt{\Lambda_o\Lambda_2}} \times \ldots$$

$$\ldots \times \int_0^{+\infty} ydy \int_{\mathbb{R}^{n+2}} \exp\left[i\sum_{k=1}^{n} u_k\left(s_k + (u-s_o)\frac{r(t_k)}{\Lambda_o} - (y-\dot{s}_o)\frac{r'(t_k)}{\Lambda_2}\right)\right] \times$$

$$\ldots \times \exp\left(-\frac{(u-s_o)^2}{2\Lambda_o}\right)\exp\left(-\frac{(y-\dot{s}_o)^2}{2\Lambda_2}\right) \times \mu_{(0,t_1,\ldots,t_n)}(ds_o,ds_1,\ldots,ds_n,d\dot{s}_o)$$

où

$$\mu_{(0,t_1,\ldots,t_n)} = (X_o,X_{t_1},\ldots,X_{t_n},\dot{X}_o^s)(P_s)$$

et

$$R(t_j,t_k) = r(t_j - t_k) - \frac{r(t_j)r(t_k)}{\Lambda_o} - \frac{r'(t_j)r'(t_k)}{\Lambda_2}.$$

Ainsi on établit que pour tout n-uple de réels distincts non nuls $(t_1,\ldots,t_n)$, on a :

$$\pi_{(t_1,\ldots,t_n)}\left(\frac{\hat{P}_u^+}{\hat{P}^+(\Omega)}\right) = \pi_{(t_1,\ldots,t_n)}(Q^{(1)}) * Q^{(2)}_{(t_1,\ldots,t_n)}$$

où $Q^{(1)}$ est la probabilité de Laplace-Gauss sur Ω de moyenne $\dfrac{u\,r(t)}{\Lambda_o}$ et de covariance $R(t,s) = r(t-s) - \dfrac{r(t)r(s)}{\Lambda_o} - \dfrac{r'(t)r'(s)}{\Lambda_2}$ et $Q^{(2)}_{(t_1,\ldots,t_n)}$ est une probabilité sur $\mathscr{B}^n$.

En s'inspirant d'une preuve de J. de Maré ([10]), on peut démontrer, grâce aux mesures de Palm le résultat suivant :

PROPOSITION 3.

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$*, la suite des points de passage par zéro de la f.a.r.* (X_t), $(\ldots T_{-1} < T_o \leqslant 0 < T_1 < \ldots)$.

Si on suppose que les hypothèses (H1) *sont vérifiées, que le signal est strictement stationnaire et que sa loi* P_s *est symétrique* ($P_s(F) = P_s(-F)$) *alors la suite* $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *n'est pas un processus de renouvellement.*

3. UN RESULTAT ASYMPTOTIQUE QUAND LE BRUIT TEND VERS 0.

Considérons maintenant une suite $(P_b^{(n)})$ de lois de bruit sur $(\Omega,\mathscr{F})$ qui vérifient (H1),(b) ; si les suites $(\Lambda_o^{(n)})$ et $(\Lambda_2^{(n)})$ tendent vers 0, on en déduit que la suite $(P_b^{(n)})$ converge étroitement vers δ_o sur Ω. On peut alors montrer que si on suppose que $P_s(G_u(I)) = 1$, on a pour tout intervalle borné I :

$$\int_\Omega C_u(I)dP_s \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega C_u(I)d(P_b^{(n)} * P_s),$$

d'où le théorème suivant, analogue à la proposition 2 de [4], mais ici on ne suppose pas que P_s est porté par l'ensemble Ω_o des fonctions absolument continues.

PROPOSITION 4.

Soient $I = [a,b]$ *et* $u \in \mathbb{R}$*, on considère l'espace de probabilité* $(\Omega,\mathscr{F},P_s)$*, on suppose que l'hypothèse* (H1),(a) *est vérifiée.*

On fait les hypothèses complémentaires suivantes :

a) *Le vecteur* $(X_t, \dot{X}_t^s)$ *admet une densité* $q_t(x,y)$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *(mesurable en* (t,x,y)*) et pour tout* $\tau > 0$, *le vecteur* $\left(X_t, \frac{X_{t+\tau} - X_t}{\tau}\right)$ *admet une densité* $q_{t,\tau}(x,y)$ *telle que l'on ait pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *toute suite* (t_n) *croissante vers* t *et* (τ_n) *décroissante vers* 0 *avec* $t_n \leqslant t < t_n + \tau_n$:

$$\varliminf_{n \to +\infty} q_{t_n,\tau_n}(u + x\,\tau_n\,,\,y) \geqslant q_t(u,y)\ .$$

b) *La fonction* ϕ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\phi(x) = \int_a^b dt \int_{\mathbb{R}} q_t(x,y)\,|y|\,dy$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$ *et semi-continue supérieurement au point* $x = u$.

On a alors :

$$\int_\Omega C_u(I)\,dP_s = \phi(u)\ .$$

II – LE PROCESSUS PONCTUEL DES MAXIMA RELATIFS.

On note maintenant Ω' l'ensemble des fonctions $\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont continûment dérivables, on le munit de la topologie de la convergence compacte des fonctions et de leurs dérivées premières et on note $\mathscr{F}'$ sa tribu borélienne. L'application $X_t' : \omega \rightsquigarrow \omega'(t)$ est une v.a.r. sur $(\Omega', \mathscr{F}')$, on notera comme dans la partie I par θ_t l'application $\omega \rightsquigarrow \omega(.+t)$.

HYPOTHESES (H2).

On note P la probabilité définie sur $(\Omega', \mathscr{F}')$ par $P = P_s * P_b$ où P_s et P_b sont deux probabilités sur $\mathscr{F}'$ qui vérifient :

a) Sur l'espace de probabilité $(\Omega', \mathscr{F}', P_s)$ les v.a.r. (X_t) sont intégrables et deux fois dérivables en moyenne d'ordre 1, de plus la fonction $t \rightsquigarrow E_s(|\ddot{X}_t^s|)$ est localement bornée sur $\mathbb{R}$.

b) La probabilité P_b est de Laplace-Gauss centrée de covariance $E_b(X_s . X_t) = r(t-s)$ avec r de classe C^4, on pose $\Lambda_0 = r(0)$, $\Lambda_2 = -r''(0)$, $\Lambda_4 = r^{(4)}(0)$. On suppose que la mesure spectrale σ_b n'est pas purement discrète.

Sous les hypothèses (H2), la f.a.r. (X_t) est deux fois dérivable en moyenne d'ordre 1 sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, on notera $(\ddot{X}_t)$ sa dérivée seconde en moyenne.

Etant donnés $\omega \in \Omega'$ et deux boréliens A et $B \in \mathscr{B}$, on note $M^A(\omega, B)$ le nombre de maxima relatifs de ω dont l'ordonnée est dans A et l'abscisse dans B. On posera $M^{\mathbb{R}} = M$.

Dans le cas d'un intervalle ouvert borné I, si $N_0(\omega', I) < +\infty$, on a alors $M^A(\omega, I) = C_0^-(\omega' ; \omega^{-1}(A) \cap I)$.

PROPOSITION 5.

Sous les hypothèses (H2), *on a :*

$$E(M^A(B)) = \int_A dx \int_B dt \int_{\mathbb{R}} [\ddot{x}]^-\, p_t'(x,0,\ddot{x})\,d\ddot{x}$$

où $p_t'(x,0,\ddot{x})$ *désigne la densité de* $(X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t)(P)$.

Venons-en maintenant à la mesure de Palm de M^A dans le cas où l'on suppose que le signal est strictement stationnaire.

On remarque tout d'abord que :

$$\forall F \in \mathscr{F} \text{ on a } \hat{P}_{M^A}(F) = \hat{P}_M(F \cap \{X_0 \in A\})\ .$$

PROPOSITION 6.

Sous les hypothèses (H2) *et si on suppose de plus que le signal est une f.a.r. strictement stationnaire (i.e.* $\theta_t(P_s) = P_s$*) la mesure de Palm du processus ponctuel stationnaire* M^A *est l'unique mesure bornée* $\hat{P}_{M^A}$ *sur* $\mathscr{F}'$ *qui vérifie : pour tout* n*-uple* $(t_1,\dots,t_n)$ *de réels distincts non nuls, on a :*

$$\pi_{(t_1,\dots,t_n)}(\hat{P}_{M^A}) = \left[\int_A dx \int_{\mathbb{R}} [\ddot{x}]^-\, p'_{(0,t_1,\dots,t_n)}(x,x_1,\dots,x_n,0,\ddot{x})\,d\ddot{x}\right] dx_1 \dots dx_n$$

où $p'_{(0,t_1,\dots,t_n)}$ *désigne la densité (naturelle) de* $(X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \dot{X}_0, \ddot{X}_0)(P)$.

Remarquons que si $\hat{P}_M(\Omega') > 0$, on a :

si $\lambda(\partial A) = 0$ (λ = mesure de Lebesgue, ∂A = frontière de A)

$$\frac{\hat{P}_M(\{X_0 \in A\})}{\hat{P}_M(\Omega')} = \lim_{n \to +\infty} P(\{X_0 \in A\} / M(I_n) \geqslant 1)$$

où (I_n) est une suite décroissante d'intervalles bornés de longueurs > 0 telle que $\cap I_n = \{0\}$. On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{X_0 \in A\}/M(I_n) \geqslant 1) = \frac{\int_A dx \int_{\mathbb{R}} p'_{(0)}(x,0,\ddot{x})\,[\ddot{x}]^-\,d\ddot{x}}{\int_{\mathbb{R}} p'_{(0)}(0,\ddot{x})\,[\ddot{x}]^-\,d\ddot{x}}$$

On retrouve, pour cette loi conditionnelle (h.w) de la hauteur d'un maximum local à l'instant t, sachant qu'il y en a un à cet instant, un résultat donné dans [1] dans le cas gaussien et également dans [6].

Notons que l'on peut également étendre les résultats que G. Lingren a obtenus dans le cas gaussien ([11]), voir aussi [12] pour des cas non gaussiens.

Exemple de la partie I : On suppose de plus que s est 2 fois dérivable et s" bornée, que $\phi(.)$ est une f.a.r. du 2° ordre strict. stationnaire, séparable dont le 4° moment spectral est fini. Le signal strict. stationnaire $S_t = s(t + \phi(t) + \Theta)$ a une loi P_s qui satisfait (H2)(a).

III- BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. CRAMER et M.R. LEADBETTER, Stationary and Related Stochastic Processes, J. Wiley, New-York, 1967

[2] M.R. LEADBETTER, On crossings of levels and curves by a wide class of stochastic processes. Ann. Math. Stat., 37, 1966, p. 260-267.

[3] M.B. MARCUS, Level crôssings of a stochastic processes with absolutely continuous sample paths, Ann. Prob., 5, 1977, p. 52-71.

[4] J.L. BESSON, Intensité et mesure de Palm du processus ponctuel des passages par un niveau de certaines fonctions aléatoires. C.R. Acad. Sc. Paris, série A, t. 291, 1980, p. 547.

[5] S.O. RICE, Statistical properties of a Sine Wawe plus Random Noïse. Bell Syst. Techn. J., 27, 1948, p. 109-157.

[6] J.L. BESSON, Passages par un niveau et amplitude des maximums d'une fonction aléatoire "Signal plus Bruit". Rev. Cethedec, 36, 1973, p. 1-31.

[7] J.L. BESSON, Variance du nombre de passages par un niveau d'une fonction aléatoire du type "Signal plus Bruit". Rev. Cethedec, 53, 1977, p. 55-70.

[8] J. NEVEU, Processus Ponctuels, Lectures Notes in Math. n° 598, Springer-Verlag, 1977.

[9] M. KAC et D. SLEPIAN, Large excursions of gaussian processes. Ann. Math. Stat., 30, 1959, p. 1215-1228.

[10] J. DE MARE, When are the successive zero-crossing intervals of a Gaussian process independant ? (Preprint) Université de Lund, 1974.

[11] G. LINDGREN, Wawe Length and amplitude in gaussian Noïse, Adv. Appl. Prob., 4, 1972, p. 81-108.

[12] J.L. BESSON, Processus ponctuels des maximums relatifs des trajectoires de certaines fonctions aléatoires réelles, C.R. Acad. Sc. Paris, série A, t. 292, 1981, p. 527.