HUITIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 1er au 5 JUIN 1981

FREQUENCE ET PROBABILITE - TEMPS RELATIF ET PROBABILITE

TRANSPOSITION A CERTAINES FONCTIONS NON ALEATOIRES DE CARACTERES SPECIFIQUEMENT INTRODUITS POUR L'ETUDE DES FONCTIONS ALEATOIRES.

A. BLANC-LAPIERRE

Laboratoire des Signaux et Systèmes (C.N.R.S.-E.S.E.),
Plateau du Moulon 91190 GIF SUR YVETTE

RESUME

La notion de probabilité a été, dès l'origine, associée à celle de fréquence.

De façon analogue, on sait qu'à une fonction certaine -ou à un ensemble de fonctions certaines- "possédant des caractères suffisants de permanence" pour assurer l'existence de répartitions asymptotiques de leurs valeurs, on peut associer des êtres aléatoires (variables, fonctions) pour lesquels la probabilité d'un évènement est la valeur du temps relatif $(\Delta t/T)$ pendant lequel il a lieu au cours d'une observation de durée T grande ou, plus précisément, la limite de $(\Delta t/T)$ pour $T \to \infty$.

A propos des variables aléatoires et des fonctions aléatoires ainsi introduites à partir de fonctions certaines, on peut se poser toutes les questions habituelles concernant les problèmes de dépendance, de stationnarité, l'existence du caractère gaussien, markovien,... etc ... Naturellement, la réponse à chacune de ces questions est gouvernée par le fait que les fonctions certaines de départ satisfont ou non à des conditions "correspondantes" à préciser.

La présente communication étend les résultats déjà établis dans cette direction.

Des exemples sont donnés et interprétés.

Enfin, les liens entre ce type de questions et l'ergodisme sont précisés.

SUMMARY

The idea of probability was, from the origin, associated with the notion of frequency.

Similarly, it is known that, starting from one non random function -or from one set of non random functions- "having sufficient characters of permanence" to ensure the existence of asymptotic distributions of their values, it is possible to construct random variables and random functions, the probability law of which is derived from the time ratio $(\Delta t/T)$ of occurence of events, or, more precisely, from the limit of this time ratio when $T \to \infty$.

The random variables so introduced can be dependent or independent, gaussian or non gaussian, ... etc ... The random functions introduced can be stationary or non stationary, gaussian, markovian,... etc ... Indeed each of these properties implies "corresponding" properties of the initial non random functions.

In this paper we extend some previous results related to this kind of questions.

Examples are analysed.

Some remarks are made concerning the links between ergodicity and the above-mentioned problems.

FREQUENCE ET PROBABILITE - TEMPS RELATIF ET PROBABILITE
TRANSPOSITION A CERTAINES FONCTIONS NON ALEATOIRES DE CARACTERES SPECIFIQUEMENT INTRODUITS POUR L'ETUDE DES FONCTIONS ALEATOIRES.

1. INTRODUCTION

La notion de probabilité s'introduit physiquement à partir de celle de fréquence. Soient les variables aléatoires (v.a.) X_n, indépendantes et de même loi $\mathscr{L}$ $[n = 1, 2, \dots, \infty]$. La probabilité que $\mathscr{L}$ associe à l'événement

$$a < X(\omega) \leqslant b \tag{1-1}$$

est la limite vers laquelle tend (presque sûrement) le nombre relatif $[n/N]$ des composantes de la v.a. vectorielle $[X_1(\omega), \dots, X_N(\omega)]$ vérifiant (1-1).

De façon plus générale (puisqu'on ne fait plus appel à des tirages au sort distincts, successifs et indépendants), c'est la même position que prend l'expérimentateur qui, étudiant un phénomène fluctuant stationnaire ou, tout au moins, suffisamment stable, mesure une moyenne temporelle :

$$\overline{X(t,\omega)} = \lim_{T\to\infty} {}^{0}\overline{X(t,\omega)}^{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(\theta,\omega)\, d\theta \tag{1-2}$$

La reproductibilité macroscopique exige, d'ailleurs, que cette moyenne temporelle -dont nous ne discutons pas ici l'existence- soit indépendante [p.s.] de ω. On dit, alors, qu'il y a ergodisme. Pour $X(t,\omega)$, l'ergodisme se traduira donc par :

$$\overline{X(t,\omega)} = E\,\{X(t,\omega)\} \qquad [\alpha]$$

ou

$$\lim_{T\to\infty} \{ {}^{0}\overline{X(t,\omega)}^{T} - {}^{0}\overline{E\,\{X(t,\omega)\}}^{T} \} = 0 \qquad [\beta] \tag{1-3}$$

$[\alpha]$ correspondant à la stationnarité et $[\beta]$ postulant simplement une "stabilité suffisante".

L'expérimentateur ne travaille que sur un seul ω, soit ω_0, à savoir celui qui correspond à l'enregistrement que lui délivre "son" montage. Donc, pour lui, $X(t,\omega_0)$ se présente comme une fonction certaine à laquelle il peut associer des moments temporels : $\overline{X(t,\omega_0)}$, $\overline{X^2(t,\omega_0)}$, ... et, même, l'équivalent d'une fonction caractéristique :

$$\overline{\exp\,\{iu\, X(t,\omega_0)\}}$$

Ainsi donc, à une fonction certaine présentant des caractères de stabilité suffisants, en particulier pour assurer l'existence des moyennes temporelles, on peut associer la loi d'une variable aléatoire scalaire qui, à travers le passage à la limite $T \to \infty$, découle de la mesure $[dt/T]$ correspondant à l'équipartition de t sur (O.T.). De même, K fonctions certaines donnent ainsi naissance à une v.a. vectorielle. Enfin, à une fonction certaine $X(t,\lambda)$, dépendant de t (comme ci-dessus) et d'un autre paramètre λ, on associera la loi temporelle d'une fonction aléatoire (f.a.) de λ. A propos des êtres aléatoires ainsi introduits, on peut, évidemment, faire usage de toutes les notions utilisées en calcul des probabilités : indépendance, orthogonalité, lois conditionnelles, caractère gaussien, propriétés markoviennes ... etc ... Chacune de ces notions impliquera des propriétés "correspondantes" pour les fonctions certaines de départ. Il sera donc possible, au prix de transpositions adéquates, d'utiliser, pour ces fonctions certaines, une très large part du formalisme du calcul des probabilités et de la théorie des f.a. C'est à ce type de questions qu'est consacrée cette communication. Le point de vue développé ici présente des liens et des convergences avec les travaux de Kac et Steinhaus [1] sur les fonctions (certaines) indépendantes (au sens stochastique), de Wiener [2] sur l'analyse harmonique généralisée et, de façon très étroite, avec ceux de Bass et de ses collaborateurs (et notamment Bertrandias) [3] sur les fonctions pseudoaléatoires. Les considération qui vont suivre développent, précisent et illustrent le contenu de diverses publications antérieures de l'auteur sur le même sujet [4] et [5] (cf. Chap. XV, p. 364).

2. NOTATIONS ET HYPOTHESES

Soit $\mathscr{H}$ un espace vectoriel de fonction $h(t)$ mesurables, à valeurs complexes $[h(t) \in C$ = plan complexe $]$, telles que toute combinaison linéaire, soit $g(t)$, d'un nombre fini d'éléments de $\mathscr{H}$ a une répartition asymptotique des valeurs au sens suivant : pour toute fonction ϕ, continue et bornée sur C, la moyenne temporelle $\overline{\phi\,\{g(t)\}}$ existe. Les fonctions possédant cette propriété ont été très étudiées par J. Bass et ses collaborateurs. En particulier, pour la possibilité de l'existence et les propriétés de tels ensembles $\mathscr{H}$, on pourra se reporter à diverses publications de P. H. Pham [6]. L'existence de $\overline{\phi\,\{g(t)\}}$ pour tout ϕ satisfaisant aux hypothèses précitées entraine automatiquement celle d'une mesure μ_g sur C telle que l'on ait

$$\overline{\phi\,\{g(t)\}} = \int_C \phi(x)\, d\mu_g(x) \tag{2-1}$$

De même, une fonction vectorielle quelconque $k(t) = [h_1(t), \dots, h_\iota(t)]$ admet une répartition asymptotique sur C^ι en ce sens que, pour toute fonction complexe ϕ, continue et bornée sur C^ι, on a, de façon analogue à (2-1) :

$$\overline{\phi\{h_1(t),\dots,h_\iota(t)\}} = \overline{\phi\{k(t)\}} = \int_{C^\iota} \phi\{x_1,\dots,x_\iota\}\, d\mu_\iota(x_1,\dots,x_\iota) \tag{2-2}$$

où μ_L est une mesure de probabilité sur C^L.

3. VARIABLES ALEATOIRES ET FONCTIONS ALEATOIRES ASSOCIEES A $\mathcal{H}$.

3.1. *Variables aléatoires*

Sous les hypothèses faites ci-dessus, la loi P_T image (pour l'application $t(0 \leq t \leq T) \to \prod_{\mathcal{H}} h(t)$ de $[0,T]$ dans $C^{\mathcal{H}}$) de la mesure dt/T, converge cylindriquement, pour $T \to \infty$, vers une probabilité P dans $C^{\mathcal{H}}$. Les probabilités ainsi introduites correspondent bien à la pondération par le temps relatif dont il a été question au § 1. Par ce procédé :

- une fonction $h(t) \in \mathcal{H}$ engendre bien une variable aléatoire $\underline{h}(\omega)$ $[\omega \in \Omega = C^{\mathcal{H}}]$ dont la loi est conforme à P.
- un ensemble de L fonctions $[h_1(t), \ldots, h_L(t)]$ de $\mathcal{H}$ engendre une variable aléatoire vectorielle $\vec{\underline{h}}(\omega)$ $[\underline{h}_1(\omega), \ldots, \underline{h}_L(\omega)]$ $[\omega \in \Omega = C^{\mathcal{H}}]$ de loi toujours conforme à P.
- une suite S de fonctions $[h_1(t), h_2(t), \ldots]$ de $\mathcal{H}$ engendre une suite de variables aléatoires $\underline{S}$ $[\underline{h}_1(\omega), \underline{h}_2(\omega), \ldots]$ $[\omega \in \Omega = C^{\mathcal{H}}]$.

  Naturellement, la correspondance $h \to \underline{h}$ est linéaire. A ce stade, toutes les propriétés des variables aléatoires sont transposables à l'ensemble $\mathcal{H}$: fonctions de répartition, fonctions caractéristiques, moments (sous réserve d'hypothèses assurant leurs existences), indépendance, ... Ces questions sont analysées dans leurs grandes lignes dans (4) et (5). Nous nous bornons, ici, à expliciter quelques points particuliers pour bien fixer les idées :

  • Fonction de répartition associée à la variable aléatoire $\underline{h}_1(\omega)$:

$$F_{\underline{h}_1}(x) = \text{Prob}\{\underline{h}_1(\omega) < x\} = \overline{I\{h_1(t), x\}} \qquad (3\text{-}1)$$

où $I\{h_1(t), x\}$ est l'indicateur valant + 1 si $h_1(t) < x$ et 0 dans le cas contraire.

• Fonction de répartition associée à $\{\underline{h}_1(\omega), \underline{h}_2(\omega)\}$:

$$F_{\underline{h}_1,\underline{h}_2}(x,y) = \text{Prob}\{\underline{h}_1(\omega) < x \text{ et } \underline{h}_2(\omega) < y\}$$

$$= \overline{I\{h_1(t), h_2(t)\ ;\ x,y\}} \qquad (3\text{-}2)$$

où $I\{h_1(t), h_2(t)\ ;\ x,y\}$ vaut + 1 pour $h_1(t) < x$ et $h_2(t) < y$, et 0 dans le cas contraire.

• Fonction caractéristique associée à $\{\underline{h}_1(\omega), \underline{h}_2(\omega)\}$:

$$\phi_{\underline{h}_1,\underline{h}_2}(u_1,u_2) = E_\Omega\left\{e^{i[u_1 \underline{h}_1 + u_2 \underline{h}_2]}\right\}$$

$$= \overline{\exp\{i[u_1\ h_1(t) + u_2\ h_2(t)]\}} \qquad (3\text{-}3)$$

• Indépendance de $[\underline{h}_1(\omega)$ et $\underline{h}_2(\omega)]$. Elle se traduit, pour $h_1(t)$ et $h_2(t)$, par les propriétés temporelles suivantes :

α) $\forall$ x et y, on a :

$$\overline{I\{h_1(t), h_2(t)\ ;\ x,y\}} = \overline{I\{h_1(t),x\}} \cdot \overline{I\{h_2(t),y\}} \qquad (3\text{-}4)$$

β) $\forall$ u_1 et u_2, on a :

$$\overline{\exp\{i[u_1h_1(t) + u_2h_2(t)]\}}$$

$$= \overline{\exp\{i\ u_1h_1(t)\}} \cdot \overline{\exp\{i\ u_2h_2(t)\}} \qquad (3\text{-}5)$$

- convergence des suites de v.a. La transposition aux fonctions certaines $h(t)$ des divers types de convergence utilisables pour les v.a. $\underline{h}(\omega)$ ne pose pas de problèmes particuliers. Il en est notamment ainsi pour la convergence en m.q. puisqu'aux espérances mathématiques sur Ω correspondent des moyennes temporelles du côté des $h(t)$.

3.2. *Fonctions aléatoires* :

Supposons que $\mathcal{H}$ contienne un ensemble de fonctions $h(t,\lambda)$ dépendant d'un paramètre λ (il en était déjà ainsi, avec des λ entiers, pour les suites de v.a.) pouvant varier de façon discrète ou continue. A chaque λ fixé, correspond une v.a. $\underline{h}(\lambda,\omega)$. Si λ décrit l'ensemble de ses valeurs, on engendre ainsi, sur $\Omega = C^{\mathcal{H}}$, une fonction aléatoire de λ, de loi temporelle conforme à P.

Un cas particulièrement important est celui où

$$h(t,\lambda) = h(t + \lambda) \qquad (3\text{-}6)$$

c'est-à-dire où, si $h(t) \in \mathcal{H}$, il en est de même de toutes ses translatées $H(t + \lambda)$ $[\forall\lambda]$. $\mathcal{H}$ est alors invariant dans toute translation en t et $\underline{h}(\lambda,\omega)$ est, évidemment, strictement stationnaire en λ. Il va de soi que, en général, c'est-à-dire pour des $h(t,\lambda)$ différant de $h(t + \lambda)$, $\underline{h}(\lambda,\omega)$ n'a aucune raison d'être stationnaire. On pourra, par exemple, engendrer des f.a. $\underline{h}(\lambda,\omega)$ non stationnaires, mais assez voisines d'une f.a. stationnaire en posant :

$$h(t,\lambda) = h\left(t + \lambda + \psi(\lambda)\right) \qquad (3\text{-}7)$$

où $\lambda + \psi(\lambda)$ est une fonction monotone de λ pouvant être interprétée comme un temps μ déduit de λ par changement d'horloge.

FREQUENCE ET PROBABILITE - TEMPS RELATIF ET PROBABILITE
TRANSPOSITION A CERTAINES FONCTIONS NON ALEATOIRES DE CARACTERES SPECIFIQUEMENT INTRODUITS POUR L'ETUDE DES FONCTIONS ALEATOIRES.

Comme pour les variables aléatoires, les propriétés des fonctions aléatoires $\underline{h}(\lambda,\omega)$ ainsi introduites ont leur traduction temporelle pour l'ensemble des fonctions certaines $\mathcal{H}$. C'est ainsi qu'on peut, dans le cadre purement déterministe de ces fonctions, parler d'indépendance, d'orthogonalité, de caractère gaussien, markovien... C'est ainsi, également, qu'on peut avoir une transposition purement déterministe et temporelle des propriétés liées à la décomposition harmonique des $\underline{h}(\lambda,\omega)$, ... , etc.

4. EXEMPLES

4.1. *Exemples de fonctions h(t) indépendantes [c'est-à-dire telles que les v.a. $\underline{h}(\omega)$ associées soient indépendantes].*

a) les deux fonctions certaines périodiques $h_1(t)$ et $h_2(t)$ de la figure 1, toutes deux de période T et décalées l'une par rapport à l'autre, de (T/4) sont indépendantes :

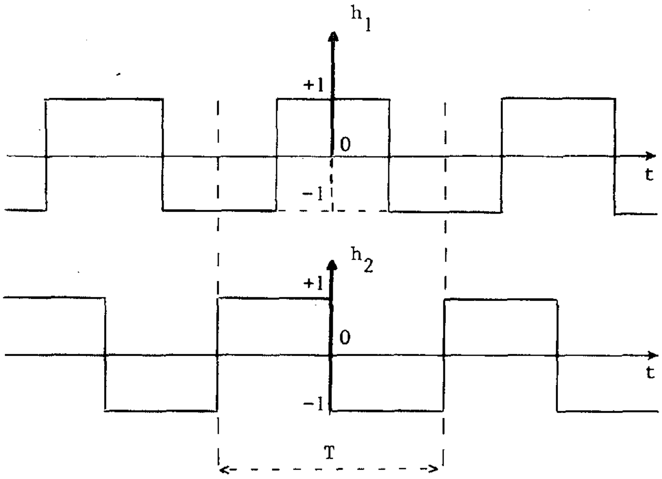

Figure 1

Cette indépendance ne subsiste en général pas si on translate l'une des fonctions. Par exemple, si on fait subir à h_2 une translation + (T/4) vers la droite, on rend h_2 identique à h_1.

b) les K fonctions périodiques $f_k(t) = h_2\,[2^k t]$ (k = 1, 2, ... , K) sont indépendantes dans leur ensemble. Leurs périodes sont égales à T, (T/2), (T/2²), ... (T/2^K). On notera que cette indépendance subsiste si on remplace chacune des fonctions $f_k(t)$ par $f'_k(t)$ qui s'en déduit par une translation τ_k fixée.

4.2. *Exemples de fonctions h(t) orthogonales*

Sous réserve de l'existence des moments du second ordre [temporels pour les h ou définis comme des espérances mathématiques en (Ω,P) pour les $\underline{h}$], les deux fonctions certaines $h_1(t)[\to \underline{h}_1(\omega)]$ et $h_2(t)\ [\to \underline{h}_2(\omega)]$ seront dites orthogonales si

$$\overline{h_1(t)\ h_2(t)} = \underset{[\Omega]}{E}\ \{\underline{h}_1(\omega)\ \underline{h}_2^*(\omega)\} = 0 \qquad (4\text{-}1)$$

Par exemple, pour

$$h_1(t) = \sum_{(j)} A_{j,1}\, e^{2\pi i \nu_{j,1} t} \quad \text{et} \quad h_2(t) = \sum_{(k)} A_{k,2}\, e^{2\pi i \nu_{k,2} t} \qquad (4\text{-}2)$$

l'orthogonalité sera assurée si

$$\sum_{(\ell)} A_{\ell,1}\ A^*_{\ell,2} = 0 \qquad (4\text{-}3)$$

où les $(A_{\ell,1}\ ,\ A_{\ell,2})$ sont, dans h_1 et h_2, les coefficients des exponentielles relatives aux ν_ℓ communs aux deux ensembles $\{\nu_{j,1}\}$ et $\{\nu_{j,2}\}$.

4.3. *Exemples relatifs à des fonctions aléatoires $\underline{h}(\lambda,\omega)$.*

Nous nous plaçons dans le cas le plus simple : celui où la fonction $h(t,\lambda)$ suit la relation (3-6). La fonction aléatoire $\underline{h}(\lambda,\omega)$ correspond donc à l'ensemble des fonctions certaines constitué par les h(t) et toutes leurs translatées. On sait que $\underline{h}(\lambda,\omega)$ est, alors, stationnaire.

a) *Questions d'indépendance.*

Il résulte de ce qui a été vu ci-dessus (§ 4.1 b) que, $\forall\ \lambda_1$ et λ_2 fixés, les "variables"

$$f_1(t+\lambda_1) \to \underline{f}_1(\lambda_1,\omega) \quad \text{et} \quad f_2(t+\lambda_2) \to \underline{f}_2(\lambda_2,\omega) \qquad (4\text{-}4)$$

sont indépendantes, en tant que variables aléatoires. Il ne faut cependant pas en conclure que les deux fonctions aléatoires $\underline{f}_1(\lambda,\omega)$ et $\underline{f}_2(\lambda,\omega)$ [où, de façon équivalente, les deux ensembles respectivement constitués, d'une part, par $f_1(t)$ et ses translatées et, d'autre part, par $f_2(t)$ et ses translatées] sont indépendantes. En effet, si l'on sait que, pour $\lambda = \lambda_0$, $\underline{f}_1(\lambda,\omega)$ passe de + 1 à - 1, on peut affirmer que $\underline{f}_2(\lambda,\omega)$ passe, elle aussi, de + 1 à - 1 pour cette même valeur λ_0. En définitive, les deux f.a. $\underline{f}_1(\lambda,\omega)$ et $\underline{f}_2(\lambda,\omega)$ sont telles que, bien que n'étant pas indépendantes en tant que f.a., les deux v.a. $\underline{f}_1(\lambda_1,\omega)$ et $\underline{f}_2(\lambda_2,\omega)$ sont indépendantes pour λ_1 et λ_2 quelconques mais fixés. Ceci est à rapprocher d'un résultat général que nous donnons ci-dessous.

Sous réserve d'hypothèses assurant l'existance des moments, on peut établir le résultat suivant [4] :

Soient les deux fonctions

$$h(t) = \sum_{m.q.} A_n\, e^{2\pi i \nu_n t}$$

et

$$h'(t) = \sum_{m.q.} A'_n e^{2\pi i \nu'_n t} \qquad (4\text{-}5)$$

Soient, d'autre part, $\boldsymbol{\nu}$ et $\boldsymbol{\nu}'$ les ensembles constitués , le premier, soit $\boldsymbol{\nu}$, par les combinaisons linéaires d'un nombre fini d'éléments ν_n à coefficients entiers (positifs ou négatifs) et, le second, soit $\boldsymbol{\nu}'$, de la même façon du côté des ν'_n. Si $\boldsymbol{\nu}$ et $\boldsymbol{\nu}'$ n'ont d'autre élément commun que $\nu = 0$, alors h(t) et h'(t) sont deux fonctions indépendantes ainsi que leurs translatées.

Or, pour $h(t) = f_1(t)$ et $h'(t) = f_2(t)$, on a $\nu_n = (n/T)$ et $\nu'_n = (2n/T)$, avec $n = (\pm 1, \pm 2, \ldots)$, et

$$A_n = A'_n = (2i/\pi n) \sin^2 \frac{\pi n}{2} \qquad (4\text{-}6)$$

Le résultat énoncé ci-dessus confirme donc bien la non indépendance de f_1 et f_2 et de leurs translatées. Par contre, le fait que les ensembles respectivement constitués par les ν_n et les ν'_n soient disjoints entraine l'orthogonalité de f_1 et de f_2 et de leurs translatées.

b) Propriétés du second ordre : filtrage linéaire, corrélation, spectres, analyse harmonique.

Ces questions sont étudiées dans (4) et (5). Nous nous bornons, ici, à mentionner les deux points suivants :

i) La filtrée $\mathscr{F}\{\underline{h}(\lambda,\omega)\}$ de la f.a. $\underline{h}(\lambda,\omega)$ [associée aux $h(t+\lambda)$] n'est autre que la f.a. de λ associée à la filtrée $\mathscr{F}\{h(t)\}$ de h(t).

ii) L'introduction des propriétés harmoniques de $\underline{h}(\lambda,\omega)$ fait intervenir la f.a. $\ell(\lambda, \nu ; \omega)$ résultant du filtrage de $\underline{h}(\lambda,\omega)$ dans le filtre $\mathscr{F}_{-\infty,\nu}[\ ]$ de gain 1 sur $(-\infty,\nu)$ et zéro ailleurs. On est, tout naturellement, conduit à écrire :

$$\underline{h}(\lambda;\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \nu\lambda}\, d_\nu \eta(\nu;\omega) \qquad (4\text{-}7)$$

avec $\eta(\nu;\omega) = \ell(0,\nu;\omega)$

Les $d_\nu\eta(\nu;\omega)$ sont, évidemment, orthogonaux au sens de l'espérance mathématique sur Ω. Les passages à la limite intervenant dans la définition des filtres linéaires ou dans celle de l'intégrale contenue dans (4-7) sont entendus au sens de l'espérance mathématique dans (Ω,P), mais, d'après ce qui précède, il est clair que ces moyennes quadratiques peuvent, si on se réfère aux h(t) eux-mêmes, être interprétées comme des moyennes temporelles.

c) Caractère markovien.

On dira que h(t) est markovien si la f.a. associée aux $h(t+\lambda)$, c'est-à-dire $\underline{h}(\lambda,\omega)$ possède cette propriété. C'est une propriété particulière de la loi temporelle de $\underline{h}(\lambda,\omega)$. Or les fonctions caractéristiques qui définissent cette loi peuvent être obtenues comme moyennes temporelles :

$$\phi\left[u_1,\ldots,u_K;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_K\right]$$

$$= E\left[\exp\{i[u_1\, \underline{h}(\lambda_1) + \ldots + u_K\, \underline{h}(\lambda_K)]\}\right]$$

$$= \overline{\exp\{i[u_1\, h(t+\lambda_1) + \ldots + u_K\, h(t+\lambda_K)]\}} \qquad (4\text{-}8)$$

On peut donc parler du caractère markovien -ou de l'absence de ce caractère- pour la fonction certaine h(t).

Il parait difficile de construire, par une voie totalement déterministe, des exemples non triviaux de fonctions certaines h(t) ayant la propriété markovienne, de même qu'il est difficile de construire, toujours par voie totalement déterministe, une fonction certaine à accroissements indépendants. Par contre, on peut obtenir de telles fonctions si on accepte de faire appel à une trajectoire particulière $h(t,\omega)$ d'une fonction aléatoire markovienne possédant un ergodisme suffisant.

5. FONCTIONS A REPARTITIONS ASYMPTOTIQUES ET ERGODISME.

Nous nous plaçons dans le cas où $\mathscr{H}$ est invariant par translation (si $h(t) \in \mathscr{H}$, il en est de même de toutes ses translatées $h(t+\tau)$ $[\forall\tau]$).Nous avons montré qu'il était alors possible d'associer à $\mathscr{H}$ un ensemble $\underline{\mathscr{E}}_{\mathscr{H}}$ de f.a. globalement stationnaires, définies sur l'espace de probabilité $[\Omega_{\mathscr{H}},P_{\mathscr{H}}]$. La stationnarité de l'ensemble $\underline{\mathscr{E}}_{\mathscr{H}}$ des $\underline{h}(\lambda,\omega)$ découle de l'invariance de $\mathscr{H}$ par translation et du mécanisme même d'obtention des moyennes temporelles. Naturellement, le mot "stationnaire" n'a aucun sens pour les fonctions certaines h(t) qui, comme cela a été dit plus haut, ne sont astreintes qu'a une "stabilité suffisante", indispensable à l'existence des moyennes temporelles. Nous pouvons imaginer que l'ensemble des fonctions h(t) est associé à l'évolution déterministe S(t) d'un système S variable dans le temps et présentant, dans sa globalité, la "stabilité suffisante" exigée ci-dessus. Il est équivalent de connaître l'évolution de S(t) ou l'ensemble des h(t), c'est-à-dire $\mathscr{H}$, et cette connaissance définit l'ensemble $\underline{\mathscr{E}}_h$ des $\underline{h}(\lambda,\omega)$ et l'espace de probabilité $[\Omega_{\mathscr{H}},P_{\mathscr{H}}]$:

$$\{S(t) \to \{h(t)\} \equiv \mathscr{H}\} \quad \to \quad \{\underline{\mathscr{E}}_{\mathscr{H}}, \Omega_{\mathscr{H}}, P_{\mathscr{H}}\} \qquad (5\text{-}1)$$

Considérons, maintenant, un système aléatoire $S'(t,\omega')$ $[\omega' \in \Omega']$ dont l'évolution fait intervenir un ensemble de f.a. $h'(t,\omega')$. Soit $\mathcal{H}'(\omega')$ l'ensemble constitué par les $h'(t,\omega')$ et leurs translatées. A ce stade, nous n'avons aucune raison de penser que, pour un sous ensemble $\Delta\Omega'$ de probabilité positive, ou même pour un ω' quelconque, $\mathcal{H}'(\omega')$ puisse constituer un espace $\mathcal{H}$, c'est-à-dire un espace vectoriel dans lequel soit assurée l'existence des répartitions asymptotiques. Est-il possible qu'il en soit ainsi avec une probabilité positive ? Avec une probabilité 1 ?

Dans (4), on suggère, dans ses grandes lignes, la construction d'exemples où il peut en être ainsi avec une probabilité 1. On peut construire de tels exemples dans lesquels les f.a. $h'(t,\omega')$ sont stationnaires dans leur ensemble ; on peut aussi en construire dans lesquels cette stationnarité n'a pas lieu. Il est intéressant d'analyser séparément ces deux situations.

i) Cas d'une évolution $S'(t,\omega')$ stationnaire.

Soit P' la loi temporelle de l'ensemble des $h'(t,\omega')$. Alors, pour les exemples considérés, on peut, presque sûrement, affirmer ce qui suit. Portons notre attention sur les réalisation $h'(t,\omega'_0)$ des $h'(t,\omega')$ correspondant à une épreuve particulière $\omega'_0 \in \Omega'$. L'ensemble des $h'(t,\omega'_0)$ constituera un ensemble $\mathcal{H}$, soit $\mathcal{H}(\omega'_0)$. A $\mathcal{H}(\omega'_0)$, les méthodes développées plus haut associent une loi asymptotique $P_{\mathcal{H}(\omega'_0)}$. Cette loi n'est autre que P'(p.s.). Elle est donc p.s. indépendante de ω'_0 dans Ω'. Ainsi, dans le cas considéré, on peut, presque sûrement, atteindre la loi temporelle P' de l'ensemble des $h'(t,\omega')$ défini sur Ω', à travers des moyennes temporelles portant uniquement sur la seule épreuve ω'_0. C'est la plénitude de l'idée d'ergodisme.

ii) Cas d'une évolution $S''(t,\omega'')$ non stationnaire.

On peut construire des systèmes aléatoires $S''(t,\omega'')$ $[\omega'' \in \Omega'']$ non stationnaires tels que p.s. les $h''(t,\omega'')$ constituent, pour tout ω'', soit ω''_0, un ensemble $\mathcal{H}$ que nous noterons $\mathcal{H}(\omega''_0)$. Les $S''(t,\omega'')$ correspondants sont ergodiques au sens suivant : pour tout F, où F est une fonction assez générale de K fonctions h'', soit $F\{h''_1(t_1), h''_2(t_2), \ldots, h''_K(t_K)\}$, on a, $\forall\ [K,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_K]$, la relation presque-sûre suivante :

$$\overline{F\{h''_1(t+\tau_1),\ldots,h''_K(t+\tau_K)\}} = E[F\{h''_1(t+\tau_1),\ldots,h''_K(t+\tau_K)\}] \quad (5-2)$$

(Ces moyennes temporelles étant supposées exister)(+)

(+) La relation (5-2), qui traduit l'ergodisme d'un système, c'est-à-dire de tout l'ensemble des fonctions qui lui sont associées, n'est autre qu'une généralisation de la relation (1-3-ß) qui traduisait l'ergodisme d'une seule fonction.

Alors, sur presque tout ω'', on définira une loi asymptotique $P(\omega'')$ qui sera indépendante de ω'', soit $P(\omega'') = P$. Naturellement, P différera de la loi temporelle P'' des $h''(t,\omega'')$. D'ailleurs, de toute évidence, P est stationnaire (par construction), alors que P'' ne l'est pas. On montre aussi que, si P'' présente le caractère markovien, en général il n'en sera pas de même de P. De la même façon, si P'' est gaussien, P ne le sera pas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KAC M., Sur les fonctions indépendantes I. *Studia Math.* 6, 45-58, 1936.
KAC M. et STEINHAUS H., Sur les fonctions indépendantes II. *Studia Math.* 6, 59-66, 1936.
STEINHAUS H., La théorie et les applications des fonctions indépendantes au sens stochastique. *Actualités Sci. Indust.* 738, 57-73, 1938.

[2] WIENER N., Generalized harmonic analysis. *Acta Math.* 55, 117, 258 - 1930.

[3] BASS J., Les fonctions pseudo-aléatoires. *Mémorial des Sciences Mathématiques* - Fascicule CLIII - Gauthier-Villars, Paris 1962.
Fonctions stationnaires. Fonctions de corrélation. Application à la représentation spatio-temporelle de la turbulence. *Ann. Inst. Henri Poincaré,* Section B, Vol. V, n°2, p. 135-193, Calcul des Probabilités et Statisque, 1969.
Moyennes et mesures en mécanique quantique et en mécanique classique. *Ann. Inst. Henri Poincaré,* Section A, Vol. XXXIII, n°3, p. 301-307, Physique Théorique, 1980.
BERTRANDIAS J.P. Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p. Thèse, Université de Paris, 1964.

[4] BLANC-LAPIERRE A. et LEFEVRE C., Analyse harmonique généralisée et fonctions aléatoires stationnaires. *C. R. Acad. Sci. Paris,* Série A, 274, 257-261, 1972.
BLANC-LAPIERRE A., Fonctions certaines admettant des répartitions asymptotiques et fonctions aléatoires stationnaires, reprinted from "Perspectives in Probability and Statistics" edited by J. GANI, *Academic Press,* Londres, 1975.

[5] BLANC-LAPIERRE A. et PICINBONO B., Fonctions Aléatoires - Masson Editeur, Paris, 1981.

[6] PHAM P.H., Fonctions admettant une répartition asymptotique des valeurs. *C. R. Acad. Sci. Paris,* Série A, 267, 803 - 1968.
Deux théorèmes sur les mesures asymptotiques. *C. R. Acad. Sci. Paris,* Série A, 268, 448 - 1969.
Mesures asymptotiques. Thèse, Université de Paris, 1972.